幂零与可解之间

原著 Henry G. Bray　　　　译纂 张远达(组编)
W. E. Deskins　　　　文志雄
David Johnson　　　　朱德高
John F. Humphreys　　　　郑延履
B. M. Puttaswamaiah　　　　胡承义
Paul Venzke　　　　蒋庆凯
Gary L. Walls　　　　樊 恽
Michael Weinstein (组编)

武汉大学出版社

内容简介

本书概括了有限群论中幂零与可解之间的群的几个主要研究方向，给出了基础性的知识及较新成果，同时指出了若干待解决问题。原作精练，能把读者很快引向研究工作前沿。中译本除保留了原作优点外，并改写和补充了一些部分，使初学者较容易入门。

本书可供大学、师范院校高年级学生作为教材、研究生，教师以及各种对群论感兴趣的读者阅读，一般数学工作者、科学工作者也可以从中了解有限群论的这一领域的状况。

幂零与可解之间

Michael Weinstein 等原著

张 远 达 等译纂

武汉大学出版社出版

（武昌珈珞山）

新华书店湖北省发行所发行 武汉大学印刷厂印刷

850×1168毫米 1/32 15.125印张 380千字

1988年11月第1版 1988年11月第1次印刷

印数：1—1000

ISBN 7-307-00377-5/O·34

定价：3.00元

译纂寄语

有限群论是现代数学的重要一支。有限群论的对象大致可分为p-群与幂零群，幂零与可解之间的群，不可解群特别是非交换单群。近年来有限非交换单群分类问题已获解决，此乃国际数学界最重要的新闻之一。可解群亦属活跃的研究领域。由于众多群论工作者的努力，这一领域在近二十几年有崭新的变化：新概念的引入，新工具、新方法（包括纯群论方法与表示论方法）的采用，新方向的开拓等不断地充实着它的生命力；在它当中至今还有很多待解决且可能解决的令人感兴趣的课题，随着发展，这样的课题还会产生。

由 M. Weinstein 等编著的《Between Nilpotent and Solvable》一书是可解群领域近几十年状况的一个反映，它基本上概括了该领域的几个主要研究方向，描绘了这些方向的轮廓，给出了一些较新的成果，指出了若干尚待解决的问题。作者们都是目前正工作在该领域前沿的专家，他们熟悉有关方向的历史与现状，所写内容中许多就是他们本人的工作，因而驾轻就熟，写来线索清晰，叙述简洁，精华突出。我与其他译纂者都感到此书不失为在可解群领域目前的一本好书，它可使非专业读者较快地了解这一领域的情况，更可使专业读者迅速进入这一领域的前沿而少走弯路。将此书翻译并介绍给我国读者，我想对拓广有限群论的影响，较快提高我国群论工作者的水平不无好处。

于是，我们认真研读讨论了原英文本内容。译纂中文本时，我的宗旨是：抓住原书的实质内容而不囿于原书的文字及形式，

力求使具备大学代数知识并初通群论的读者也能不困难或较少困难地阅读，让初学者易于由之入门，专业者也能因之获益。这样一来，本书中文本与原英文本在风格上有很大差异，内容也有改动。中文本的叙述详尽流畅，推导初等易懂，某些原证被简化，间或插有中文笔者的工作在内。

已如上述，此中文本仅立足于大学代数及群论基础，此外大体上别无它求，必须引用其他知识时，也尽量引用我国读者容易获得的资料书籍。符号与中文术语经过统一权衡，努力做到通用、达意、方便，当然仍难免偏颇差池。

本书预篇原为英文本的附录，考虑到中文本须为初学者着想，移至全书之前作预篇，由我执笔成文。

本书六章内容除第六章外各自相对独立。

第一章原作者为 W.E.Deskins 和 Paul Venzke，我与樊恽同志译纂。原作提到一个尚未解决的问题：有限群的超广义中心与所有极大超可解子群之交是否一致？樊恽同志举例给出了否定解答；同时证明了另一个与幂零性相关的类似问题有肯定答案。

第二章原作者是 B.M.Puttaswamaiah，中文稿系胡承义同志译写。为便于读者尤其是初学者阅读，§1中逐条列出表示论的基本概念和基本结论并加以证明，对几个重要群的特征标表也给出了计算过程。

第三章原文由 H.G.Bray 写作，中文行文者郑延履同志对原作体系有所改动，把多次运用的若干重要引理集中到§0，进行适当的合并与删改，补充了原文略去的证明。

第四章原作者为 J.F.Humphreys 和 D.Johnson，文志雄同志基本保持了原作风貌，但在一些不容易理解的地方，反复比较几何方法与矩阵方法之后，选择了使我国读者易于接受的途径。

第五章原文乃 G.L.Walls 编写。由于原英文本对一个极重要的定理处理欠妥，蒋庆凯同志在编译中文时不得不添加了一节内容以补足证明。

第六章是第一、三、四章中关于封闭性质与刻画性质的小结（也有新内容），原作者为 M.Weinstein。中文由朱德高同志编撰。他利用第五章知识加上了§0以统一处理几种群类的若干性质，将原书各节的若干内容作为特例给出，充实、深化了某些断言。§7中定理7.2，定理7.3系郑延履同志给出。

总之，中文译纂本乃集体劳动之所成，窃望它有裨益于我国群论事业。但我们才疏学浅，心有余而力不足，措置不当及谬误疏漏在所难免，然而努力使我国科技走上世界前列乃众心所向，故诚盼读者、同好者正之。

张远达

1985年6月于武汉

符 号 表

$B:=A$	B 定义为 A，或用 B 表示 A
$\{a,b,\cdots\mid\cdots\}$	由条件…限定的元 $a,b,\cdots$的集合
$\varnothing$	空集
$a\in A\quad(a\notin A)$	元 a 属于集 A(a 不属于 A)
$A\subseteq B\quad(A\nsubseteq B)$	A 含于 B （A 不含于 B）
$A\cap B$	交集
$A\cup B$	并集
$A\backslash B$	差集
$\lvert A\rvert$	集 A 的基数(群 A 的阶)
1	数字 1， 单位元， 单位元群， 恒等映射
$\langle a,b,\cdots\mid\cdots\rangle$	由关系…约束的元 $a,b,\cdots$生成的群
$G\sim H$	G 全同态于 H(上)
$G\cong H$	G 同构于 H(上)
$\ker\theta$	同态 θ 的核
$\mathrm{im}\,\theta$	同态 θ 的象
$o(x)$	元 x 的阶
x^θ	映射 θ 作用于元 x 的象
x^y	$:=y^{-1}xy$
$[x,y]$	$:=x^{-1}y^{-1}xy$
$[X,Y]$	$:=\langle[x,y]\mid x\in X,y\in Y\rangle$
$\exp(G)$	群 G 的幂指数
$\mathrm{Aut}(G)$	群 G 的自同构群
$\mathrm{Inn}(G)$	群 G 的内自同构群
G'	$:=[G,G]$，群 G 的换位子群

$H\leqslant G$	H 是 G 的子群
$H<G$	$H\leqslant G$ 但 $H\neq G$
$H\trianglelefteq G$ 或 $H\lhd G$	H 是 G 的正规子群
$H \ntrianglelefteq G$	$H\trianglelefteq G$ 但 $H\neq G$
$H\,\mathrm{char}\,G$	H 是 G 的特征子群
G/H	G 对正规子群 H 的商群
$\|G:H\|$	子群 H 在 G 中的指数
$N_G(H)$	子群 H 在 G 中的正规化子
$C_G(H)$	子群 H 在 G 中的中心化子
$P_G(H)$	子群 H 在 G 中的可换化子
$N_G^*(H)$	子群 H 在 G 中的弱 正规化子
$C_G^*(H)$	子群 H 在 G 中的弱中心化子
H^G	$:=\langle H^x\|x\in G\rangle$, H 在 G 中的正规闭包
H_G	$:=\bigcap_{x\in G} H^x$, H 在 G 中的内核
$\mathrm{Aut}_G(H/K)$	G 在 H/K 上 诱导 的自同构群
G^n	$:=\langle x^n\|x\in G\rangle$
$G^{\langle n\rangle}$	G 的换位群列的第 n 项
G_p	常表示 G 的 Sylow p-子群
$\mathrm{Syl}_p(G)$	G 的 Sylow p-子群的集合
$G^{\langle p\rangle}$	常表示 G 的 Sylow p-补
G_π	常表示 G 的 Hall π-子群
$G^{\langle\pi\rangle}$	常表示 G 的 Hall π-补
$\Phi(G)$	G 的 Frattini 子群
$\Phi_p(G)$	G 的 p-Frattini 子群
$\mathrm{Fit}(G)$	G 的 Fitting 子群
$O_p(G)$	$:=\langle N\trianglelefteq G\|N$ 为 p-子群$\rangle$
$O_{p'}(G)$	$:=\langle N\trianglelefteq G\|N$ 为 p'-子群$\rangle$

$O_{p'p}(G)$	$O_{p'p}(G)/O_{p'}(G)=O_p(G/O_{p'}(G))$
$O^p(G)$	$:=\cap\{N\trianglelefteq G \mid G/N$ 为 p-群$\}$
$K_i(G)$	G 的下中心列的第 i 项
$K_\infty(G)$	$:=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}K_i(G)$，$G$ 的幂零剩余
$Z(G)$	G 的中心
$Z_i(G)$	G 的上中心列的第 i 项
$Z_\infty(G)$	$:=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}Z_i(G)$，$G$ 的超中心
$Q(G)$	1. G 的拟中心
	2. G 的子商集
$Q_\infty(G)$	G 的超拟中心
$WZ(G)$	G 的弱中心
$WZ_\infty(G)$	G 的超弱中心
$genz(G)$	G 的广义中心
$genz_\infty(G)$	G 的超广义中心
$SE(G)$	G 的最大超可解嵌入子群
$LME(G)$	G 的最大 LM-嵌入子群
$NAE(G)$	G 的最大幂零被交换嵌入子群
$STE(G)$	G 的最大 Sylow 塔嵌入子群
$\rho_{\mathscr{F}}(G)$	G 的$\mathscr{F}$-根基
$\rho^*_{\mathscr{F}}(G)$	G 的$\mathscr{F}$-剩余
$A\times B$	1. 群 A 与 B 的直积
	2. 集 A 与 B 的集合积
$A\rtimes_\theta B$	群 A 被 B 通过 θ 的半直积
$A\wr P$	群 A 被置换群 B 的置换圈积
$A\wr^* P$	由置换圈积构造的单项矩阵群
$A\,\mathrm{wr}\,B$	群 A 被 B 的标准圈积
$\mathrm{Form}(G,H,\cdots)$	由群 $G,H,\cdots$ 生成的群系

$\mathscr{X} * \mathscr{Y}$	$:=\{G \mid \exists N \trianglelefteq G$ 使 $N \in \mathscr{X},\ G/N \in \mathscr{Y}\}$
$a \mid b \quad (a \nmid b)$	数 a 除得尽数 b （a 除不尽 b）
$p^e \| b$	$p^e \mid b$ 但 $p^{e+1} \nmid b$，此处 p 为素数
$(a,\ b)$	数 a 与 b 的最大公约数
$\exp(a,\ b)$	a 模 b 的幂指数
π	常表示一些素数的集合
π'	π 在全体素数集中的补集
$\pi(m)$	数 m 的素因数集合
$\pi(G)$	$:=\pi(\lvert G \rvert)$
$m_\pi,\ \lvert G \rvert_\pi$	数 m 的 π-部分，$\lvert G \rvert$ 的 π-部分
$\varphi(n)$	数论中的 Eular 函数
$\psi(n)$	数论函数见第三章§3。
$U \underset{F}{\otimes} V$	域 F 上向量空间 U 与 V 的张量积
$U \oplus V$	向量空间 U 与 V 的直和
$\boldsymbol{Z}$	整数集
$\boldsymbol{Z}_n$	$:=\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$，模 n 剩余类环，n 阶循环群
$\boldsymbol{Q}$	有理数集
$\boldsymbol{R}$	实数集
$\boldsymbol{C}$	复数集
S_n	n 次对称群
A_n	n 次交代群
$2Sn$	S_n 的二重群
$2A_n$	A_n 的二重群
$\mathrm{GL}(n,\ F)$	域 F 上 n 次一般线性群
$\mathrm{SL}(n,\ F)$	域 F 上 n 次特殊线性群
$\mathrm{Sp}(2e,\ F)$	域 F 上 $2e$ 次辛群
$\mathscr{A}$	交换群类
$\mathscr{C}\mathscr{L}\mathscr{T}$	CLT-群类

$\mathscr{G}_\pi$	π-群类
$\mathscr{N}$	幂零群类
$\mathscr{NCLT}$	非 CLT-群类
$\mathscr{QCLT}$	QCLT-群类
$\mathscr{S}$	可解群类
$\mathscr{SN}$	半幂零群类
$\mathscr{SS}$	超可解群类
$\mathscr{ST}$	Sylow 塔群类
$\mathscr{SY}$	子群全为 $\mathscr{Y}$-群的群类
$\mathscr{X}$	$\mathscr{X}$-群类
$\mathscr{Y}$	$\mathscr{Y}$-群类

目　录

译纂寄语……………………………………………………（1）
符号表……………………………………………………（1）
预篇……………………………………………………（1）
§1　推广的 Sylow 定理……………………………………（1）
§2　主因子、中心化子、诱导自同构……………………（7）
§3　各种子群……………………………………………（11）
（Ⅰ）　Frattini 子群 $\Phi(G)$……………………………（11）
（Ⅱ）　Fitting 子群 Fit（G）……………………………（12）
（Ⅲ）　$O_p(G)$，$O_{p'}(G)$及$O_{p'p}(G)$……………………（16）
（Ⅳ）　p-Frattini 子群 $\Phi_p(G)$…………………………（20）
（Ⅴ）　$O^p(G)$与幂零剩余…………………………………（24）
（Ⅵ）　超中心 $Z_\infty(G)$………………………………………（26）
第一章　超可解群
§1　基本结果……………………………………………（30）
§2　等链群……………………………………………（49）
3　极大子群……………………………………………（55）
§4　子群的存在性………………………………………（59）
§5　广义中心与广义中心列……………………………（74）
§6　有关超可能性的一些别的条件……………………（89）
§7　超可解地嵌入子群…………………………………（106）
§8　弱正规性……………………………………………（149）
第二章　M-群
§1　表示论的结论………………………………………（164）

§2 单项表示…………………………………………………………（187）
§3 M－群…………………………………………………………（196）
§4 M-群的子群……………………………………………………（205）
第三章 CLT群和非CLT群
0 预备知识…………………………………………………………（212）
§1 CLT群的简单性质……………………………………………（222）
§2 SBP群，BNCLT群和Mccarthy群…………………………（224）
§3 本原非超可解数，极小非超可解群和Pazderski定理……（239）
§4 阶为4-型数或5-型数的非CLT群……………………………（256）
第四章 若干群类
§1 可解线性群………………………………………………………（265）
§2 同态象全为CLT群的群…………………………………………（278）
§3 正规超可解子群的积……………………………………………（286）
§4 子群的格是下半模的群…………………………………………（291）
§5 $\mathscr{X}$类和$\mathscr{Y}$类…………………………………………………………（297）
§6 题外的话：极小置换表示………………………………………（304）
§7 半幂零群…………………………………………………………（305）
第五章 有限可解群的几个群类
§1 群系………………………………………………………………（315）
§2 Fitting类…………………………………………………………（367）
§3 态类与正规态类…………………………………………………（386）
§4 局部化定理………………………………………………………（392）
第六章 封闭性质和刻划性质的小结
§0 $\mathscr{F}$－嵌入子群…………………………………………………………（402）
§1 CLT群……………………………………………………………（407）
§2 QCLT群…………………………………………………………（408）
§3 幂零被交换的群…………………………………………………（410）
§4 Sylow塔性质……………………………………………………（417）
§5 超可解群…………………………………………………………（423）
§6 $\mathscr{Y}$类…………………………………………………………………（434）

§7 $\mathscr{S}\mathscr{Y}$类 …………………………………………………… (440)
§8 LM-群 …………………………………………………… (448)
参考文献 …………………………………………………… (450)
英汉名词索引 …………………………………………………… (458)
汉英名词索引 …………………………………………………… (464)

预　篇

§1　推广的 Sylow 定理

设 π 为某些素数的集合，在一切素数的集合中 π 的补集通常记为 π'，如果集合 π 仅含一个素数 p，则 π 与 π' 习惯上简记为 p 与 p'. 当整数 n 的每个素因数都在 π 内时，就称 n 是一个 **π-数**. 当群 G 的子群 H 的阶 $|H|$ 是一个 π-数时，就叫 H 是 **π-子群**. 若 H 是 G 的一个 π-子群，且 $|G:H|$ 为 π'-数，则称 H 为 G 的 **Hall π-子群**. 群 G 的 Hall π'-子群也叫做 G 的 **Hall π-补**. 当 π 仅含一个素数 p 时，G 的 Hall π-子群就是 G 的 **Sylow p-子群**，这时的 Hall π-补就是 **Sylow p-补**. 在可解群中，有类似于 Sylow 定理的 Hall 定理，它在可解群的理论中起非常重要的作用.

定理1（P. Hall）设 G 是有限可解群，π 是某些素数的集合，则

（1） G 中 Hall π-子群存在，且 G 之任意二个 Hall π-子群共轭；

（2） G 的每个 π-子群至少包含于 G 的一个 Hall π-子群中.

证明　关于群阶用归纳法来证. 设 N 是 G 的一个极小正规子群，G 之可解性 $\Rightarrow |N|=p^a$，p 为素数. 因 G/N 可解且 $|G/N|<|G|$，故归纳的假设保证了 G/N 有 Hall π-子群 H/N，

且 G/N 之任二个 Hall π-子群在 G/N 内共轭．下分 $p\in\pi$ 与 $p\notin\pi$ 两款讨论．

情况1 $p\in\pi$．这时 H 为 π-子群，且 $|G/N:H/N|=|G:H|$ 为 π'-数，故这时 H 确尔 G 之 Hall π-子群．

若 L 是 G 之任一 π-子群，则 LN/N 为 G/N 的 π-子群，故由归纳假设知 LN/N 包含在 G/N 之某 Hall π-子群内，但 G/N 之 Hall π-子群均互共轭，故有 $x\in G$ 使 $LN/N\leqslant(H/N)^{Nx}$，于是 $\forall l\in L\Rightarrow Nl=(Nh)^{Nx}$ 之 $h\in H$ 必存在，即 $Nl=(Nx)^{-1}(Nh)(Nx)=Nx^{-1}hx$，故有 $y\in N$ 使 $l=y(x^{-1}hx)=(yx^{-1})(hx)=x^{-1}y'\cdot hx(y'\in N)=x^{-1}h_1x$，$h_1=y'h\in H$，说明 $L\leqslant H^x$，即 G 之任一 π-子群 L 为 G 的某 Hall π-子群 H^x 之子群．

于是若 L 又是 G 的 Hall π-子群，则 $|L|=|H|=|H^x|$，故再与 $L\leqslant H^x$ 合并即得 $L=H^x$，说明 G 之 Hall π-子群均互共轭．

情况2 $p\notin\pi$．这时，若 H 为 G 之真子群 $(H<G)$，则据归纳假设知 H 有 Hall π-子群 H_1，故 $|H:H_1|$ 为 π'-数，因之 $|G:H_1|=|G:H||H:H_1|$ 为 π'-数，说明 H_1 也是 G 之Hall π-子群．若 L 是 G 之任一 π-子群，由归纳法因 LN/N 为 G/N 之 π-子群可知 $LN/N\leqslant(H/N)^{Nx}=H^x/N,x\in G$，故 $L\leqslant H^x$；然 H_1^x 是 H^x 之 Hall π-子群，故由 $|H^x|<|G|$ 而再用归纳假设得知 $L\leqslant(H_1^x)^y=H_1^{xy},y\in H^x$，即 L 为 G 之 Hall π-子群 H_1^{xy} 的子群．于是，当 L 更是 G 之 Hall π-子群，则如在情况 1 中讨论的一样，完全得知 $L=H_1^{xy}$，即 G 中 Hall π-子群均共轭．

剩下要讨论的是 $G=H$ 的场合．这时，$H/N=G/N$ 为 π-群，这时的 N 必是 G 之唯一个 Sylow p-子群，即 $N\in\mathrm{Syl}_p(G)$．当然，有讨论价值的是 $G\neq N$ 的场合（因 $G=N$ 时，G 为 p-

群，而 $p\notin\pi$ 就说明 G 中任何 π-子群均为单位元群）。这时若令 T/N 为 G/N 的一个极小正规子群，则由 G/N 之可解性知 $|T/N|=q^r$, q 为素数且 $q\neq p$。再令 $Q\in \mathrm{Syl}_q(T)$，则 $T=NQ$；据 Frattini 推理（见[张远达，1982]之638页引理1）知 $G=TN_G(Q)=NQN_G(Q)=NN_G(Q)$。苟若 $G=N_G(Q)$，则 $Q\lhd G$，且注意 $q\in\pi$，故作 G/Q 时，归结为已讨论过了的情况 1，因而定理成立。于是下面考虑 $G\neq N_G(Q)$，即 $N_G(Q)<G$ 的场合。

因 $N\cap N_G(Q)\lhd N_G(Q)$，又 N 之交换性 $\Rightarrow N\cap N_G(Q)\lhd N$，故 $N\cap N_G(Q)\lhd G=NN_G(Q)$，据 N 在 G 内的极小正规性得知或有 $N\cap N_G(Q)=N$，或有 $N\cap N_G(Q)=1$。但 $N\cap N_G(Q)=N\Rightarrow N\leqslant N_G(Q)\Rightarrow G=NN_G(Q)=N_G(Q)$，与假定 $N_G(Q)<G$ 相抵，不可。故有 $N\cap N_G(Q)=1$，由是 $|G:N|=|N_G(Q)|$，而 $N_G(Q)(\simeq G/N)$ 为 π-群，因之 $N_G(Q)$ 是 G 之 Hall π-子群，证明了 G 中 Hall π-子群之存在性。

令 $H_1=N_G(Q)$，L 是 G 之任一个 π-子群。因 $G=NH_1$，故 $LN=LN\cap NH_1=N(H_1\cap LN)\Rightarrow H_1\cap LN$ 是 LN 之 Hall π-子群。如果 $LN\neq G$，据归纳假设知有 $x\in LN$ 使 $L\leqslant(H_1\cap LN)^x\leqslant H_1^x$；若 $LN=G$，则 $T=T\cap G=T\cap LN=N(L\cap T)$，$\Rightarrow L\cap T$ 为 T 之 Sylow q-子群（$\because |T|=q^rp^a$, $|N|=p^a$, $p\nmid |L\cap T|$），故有 $x\in T$ 使 $L\cap T=Q^x$，于是从 $T\lhd G$ 知 $L\cap T\lhd L$，即 $Q^x\lhd L$，因而有 $L\leqslant N_G(Q^x)=(N_G(Q))^x=H_1^x$。总之，不管怎样，恒得 $L\leqslant H_1^x$，即 G 之任一 π-子群 L 必为 G 之某 Hall π-子群 H_1^x 的子群。于是当 L 也为 Hall π-子群时，就应有 $x\in G$ 使 $L=H_1^x$，即 G 之任二个 Hall π-子群共轭。定理 1 证毕。

注意定理 1 的逆定理亦真，即适合定理 1 中条件的群只能是有限可解群。说确切些，当群 G 之阶 $|G|$ 分解为互素之二数的

积，如 $|G|=mn$, $(m,n)=1$ 时，G 恒有阶 m 之子群，那么 G 必是可解群。其证明要利用 Burnside 的两个素数的定理，较定理 1 困难得多，我们不去证明它，读者需要时可参看[张远达，1982]pp192～193。

定理2 设 H 与 K 是群 G 中指数互素的二子群，则 $G=HK$ 且 $|G:H\cap K|=|G:H||G:K|$。又若 H,K 还都是 G 的 Hall 子群，则 $H\cap K$ 亦为 G 的 Hall 子群。

证明 $|G|\geqslant|HK|=|H||K:H\cap K|$，故 $|G:H|\geqslant|K:H\cap K|$，从而 $|G:H\cap K|=|G:K||K:H\cap K|\leqslant|G:K||G:H|$。另方面，$|G:H|$ 与 $|G:K|$ 互素且都整除 $|G:H\cap K|$，故 $|G:K||G:H|$ 可整除 $|G:H\cap K|$。故必有 $|G:H\cap K|=|G:H||G:K|$。此等式同时说明了 $|G|\geqslant|HK|$ 中等号成立，即 $G=HK$。若 H,K 还都是 G 的 Hall 子群，则 $|H\cap K|$ 既与 $|G:H|$ 互素也与 $|G:K|$ 互素，从而 $|H\cap K|$ 与 $|G:H||G:K|$ 互素，即与 $|G:H\cap K|$ 互素，说明 $H\cap K$ 为 G 的 Hall 子群。

定理 3 每个可解群 G 恒有一组 Hall 子群（以 Σ 表这样一组）使得

（1） 对素数之任一个集合 π, Σ 恰含有 G 之一个 Hall π-子群；

（2） Σ 中任二个 Hall 子群可交换（相乘时）。

证明 $\forall$ 素数 $p\,|\,|G|$，选取一个 Sylow p-补 $G^{\langle p\rangle}$（其存在性由定理 1 得知）。对于每一组素数之集 π，令 $G_\pi=\bigcap\limits_p\{G^{\langle p\rangle}|p\notin\pi\}$。反复地引用定理 2 即知 G_π 是 G 的 Hall π-子群。令 $\Sigma=\{G_\pi\}$，于是 Σ 恰含有一个 Hall π-子群（G 的），对每一组素数之集 π 言。

再在 Σ 中任取二元（Hall 子群）G_π 与 G_ρ，因为 $G_\pi=\bigcap\limits_p\{G^{\langle p\rangle}|p\notin\pi\}\leqslant\bigcap\limits_p\{G^{\langle p\rangle}|p\notin\pi\cup\rho\}=G_{\pi\cup\rho}$，同理 $G_\rho\leqslant G_{\pi\cup\rho}$，