HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

工程数学(二)

GONGCHENG SHUXUE

华中理工大学数学系主编

华中理工大学出版社

高等学校教材

工 程 数 学

（二）

华中理工大学数学系主编

华中理工大学出版社

（鄂）新登字第 10 号

图书在版编目(CIP)数据

工程数学(二)/华中理工大学数学系主编
武汉:华中理工大学出版社， 1996.2
ISBN 7-5609-1256-7

Ⅰ.工…
Ⅱ.①华… ②黄… ③林… ④孙…
Ⅲ.工程数学-复变函数与积分变换-数学物理方程与特殊函数
Ⅳ.O13

工 程 数 学

(二)

华中理工大学数学系主编
责任编辑 林化夷

*

华中理工大学出版社出版发行
(武昌喻家山 邮编:430074)
新华书店湖北发行所经销
华中理工大学出版社照排室排版
中科院科技印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:13.5 字数:332 000
1996 年 2 月第 1 版 1996 年 2 月第 1 次印刷
印数:1-6 000
ISBN 7-5609-1256-7/O·146
定价:10.50 元
(本书若有印装质量问题,请向承印厂调换)

内容简介

本书为高等院校工科用工程数学课程教材，分(一)、(二)两册出版。《工程数学》(一)包括线性代数、计算方法、概率论与数理统计等三门课程内容；《工程数学》(二)包括复变函数与积分变换、数 学物理方程与特殊函数两门课程内容。该书根据国家教委高等学校工科数学课程教学指导委员会制订的《工科数学课程教学基本要求》编写，这次出版又根据 1993 年修订的《工科数学课程教学基本要求》进行了修改。本书适合高等学校工程各专业使用。

前　言

工程数学课程是高等学校工科的重要必修课程，为了适应教学改革和当前教学的需要，于1993年列为华中理工大学教学改革基金课题。《工程数学》教材是这个教研项目的重要组成部分，这套教材是由我系几位经验丰富的教师，根据国家教委高等学校工科数学课程教学指导委员会制订的《工科数学课程教学基本要求》，在教学实践的基础上首先写成讲义. 而后，在多次的教学实践中使用过这套讲义，经多次修改，效果是好的. 这次，又根据1993年修订的《工科数学课程教学基本要求》，对讲义的内容再次进行调整修订，由华中理工大学出版社正式出版. 本教材适于高等学校工科各专业使用. 在编写这套教材的过程中，作了如下的分工：

第一篇　线性代数. 32～36学时，由林昇旭副教授编写；

第二篇　计算方法，40～42学时(包括上机)，由施超群副教授编写；

第三篇　概率论与数理统计，44～52学时，由汪昌瑞副教授编写；

第四篇　复变函数与积分变换，42～46学时，由黄先春、林益副教授编写；

第五篇　数学物理方程与特殊函数，32～36学时，由孙金海副教授编写.

为了出版与使用的方便，本教材分为两册. 第一册包括前三篇，第二册包括后两篇；全书的习题，是在教学实践中不断积累、更新而成. 既有基本概念、基本理论和基本方法的题目，又有在此基础上的提高题. 在书的最后，附有习题的答案或提示，其目的是为了帮助读者克服在解题过程中的困难，而不是为了某些读者好逸之需. 书中打星号“*”之处，是供某些专业实际需要时使用的内容.

本教材在编写过程中，曾得到华中理工大学教务处和数学系领导及许多同志们的关心与支持. 校教改基金会本课题负责人、数学系林益副主任组织了本书的编写工作. 高等学校工科数学课程教学指导委员会委员林化夷教授审阅了全部书稿. 华中理工大学出版社的领导与责任编辑们，保证了本书的如期出版. 所有这一切，对本书的诞生和完善，都起了关键性作用. 为此，感谢他们的关心、支持与帮助.

由于编者水平有限，加之本书出版工作时间较紧. 因此，书中考虑不周，乃至鱼鲁之误，自属难免，敬请读者惠予指正.

华中理工大学数学系

1995年12月

目　录

第四篇　复变函数与积分变换

第五篇 数学物理方程与特殊函数

第四篇

复变函数与积分变换

黄先春　　林　益　编

复变函数课程的主要任务是讨论复变数之间的相互依赖关系，其主要对象是解析函数. 粗略地说，积分变换是通过积分运算，把一个函数变成另一个函数的变换. 这里，积分变换的内容是傅里叶变换与拉普拉斯变换，它与复变函数有着密切的联系.

复变函数又称复分析，是实变数微积分的推广与发展. 因此它不仅在内容上与实变数的微积分有许多类似之处，而且在研究问题的方法与逻辑结构方面也很类似. 但复变函数又有不少独特之处. 积分变换也是在实变数微积分的基础上发展起来的. 因此在学习中应特别注意分清异同，这样就能抓住要点、融会贯通.

复变函数与积分变换的理论与方法不仅在纯数学的各个分支有广泛应用，而且在力学、电磁学、传热学等平面问题中是不可缺少的重要工具. 我们在学习中要正确理解和系统掌握数学概念与方法，从而在分析问题与解决实际问题的能力方面得到提高.

第一章　复数与复变函数

复数是复变函数的预备知识，在初等代数中已有论述. 为了以后讨论的方便，作一简要回顾. 以便在此基础上了解复变函数.

§1.1　复　　数

一、复数及其四则运算

形如 $z=x+iy$ 的数称为**复数**，其中 x 和 y 是任意的实数，$i=\sqrt{-1}$ 称为**虚单位**. 实数 x 和 y 分别称为复数 z 的**实部与虚部**，分别记为 $\mathrm{Re}z=x$ 与 $\mathrm{Im}z=y$.

如果 $\mathrm{Im}z=0$，则 $z=\mathrm{Re}z$ 是实数；如果 $\mathrm{Im}z\neq0$，而 $\mathrm{Re}z=0$，那么 z 称为**纯虚数**. 两个复数**相等**的充要条件是实部与虚部分别相等.

设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ 是两个复数，其加法与乘法的运算由下列等式定义：

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

减法与除法则定义为加法与乘法的逆运算，有

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)-(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2),$$

$$\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(x_2+\mathrm{i}y_2\neq 0).$$

可以证明，复数的运算与实数的相应运算一样满足交换律、结合律与分配律：

$$z_1+z_2=z_2+z_1,\quad z_1z_2=z_2z_1,\quad z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3;$$

$$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3,\quad z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

设 $z=x+\mathrm{i}y$，则称 $x-\mathrm{i}y$ 为 z 的**共轭复数**，记为 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$. 不难证明共轭复数有如下性质：

$$\mathrm{Re}z=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad \mathrm{Im}z=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}},\quad \bar{\bar{z}}=z,\quad \overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},\quad z\bar{z}=[\mathrm{Re}z]^2+[\mathrm{Im}z]^2=x^2+y^2.$$

二、复数在平面上的表示

在平面上取定直角坐标系 xoy 后，就可建立复数 $x+\mathrm{i}y$ 与点 (x,y) 间的一一对应关系. 当平面上的点被用来代表复数时，我们就把这个平面叫做**复平面**或 **z 平面**. 复平面上 x 轴上的点代表实数，因此 x 轴称为**实轴**. y 轴上的点(除坐标原点)代表纯虚数 $\mathrm{i}y(y\neq 0)$，因此 y 轴称为**虚轴**. 今后约定将复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与点 z 用作同义词.

复数还可用来表示平面向量. 从原点到点 $z=x+\mathrm{i}y$ 的平面向量与复数 z 也构成一一对应(图 4.1.1). 因此有时也把复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与向量 z 用作同义词. 向量 $z=x+\mathrm{i}y$ 的长度称为 z 的**模或绝对值**，记为 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. 假定 $z\neq 0$，向量 z 与实轴正方向的夹角 θ 称为复数 z 的**辐角**，记作 $\theta=\mathrm{Arg}z$；显然 $\mathrm{Arg}z$ 有无穷多个值，其中任意两值之间相差 2π 的整数倍. 但 $\mathrm{Arg}z$ 只有一个值 α 满足条件 $-\pi<\alpha\leqslant\pi$，我们称 α 为 z 的**辐角的主值**，记作 $\arg z$. 显然

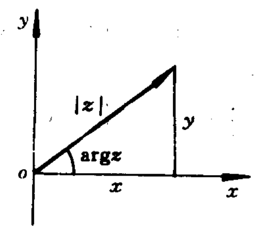

图 4.1.1

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).\tag{4.1.1}$$

$\arg z$ 的具体表示方法如下：

$$\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x>0, y\text{ 为任意实数},\\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & x=0, y\gtrless 0,\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\pm\pi, & x<0, y\gtrless 0,\\ \pi, & x<0, y=0.\end{cases}$$

$z=0$ 是唯一以零为模，辐角没有定义的复数.

根据复数加减法的规定，可知它们与向量加减的平行四边形法则是一致的(图 4.1.2).

由于复数不能比较大小，但复数的模是实数. 由图 4.1.1 和图 4.1.2 易知下列不等式成立.

$$|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|,\quad |\mathrm{Im}z|\leqslant|z|,\tag{4.1.2}$$

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\tag{4.1.3}$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|.\tag{4.1.4}$$

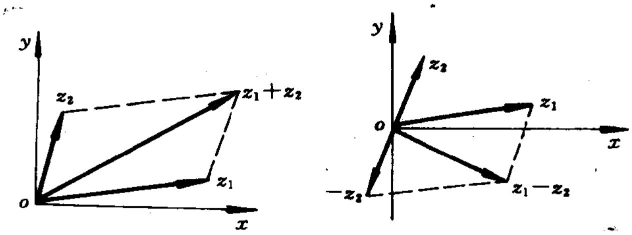

图 4.1.2

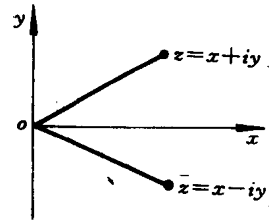

图 4.1.3

对共轭复数 z 与 $\bar{z}$ 在复平面内是关于实轴对称的(图 4.1.3)且有 $|z|=|\bar{z}|$, $|z|^2=z\bar{z}$, $\arg z=-\arg\bar{z}$ $(\arg z\neq\pi)$.

例 1 设 z_1 与 z_2 是两个复数,证明

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|\text{(三角不等式)}.$$

证

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\\&=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).\end{aligned}$$

由(4.1.2)式知, $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\leqslant|z_1\bar{z}_2|=|z_1||z_2|$,所以

$$|z_1+z_2|^2\leqslant|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|.$$

两边开方,就得到所需证明的三角不等式.

根据直角坐标与极坐标的关系:

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta,$$

立即可知

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).\tag{4.1.5}$$

再用欧拉(Euler)公式:$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,又可得到

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.\tag{4.1.6}$$

我们分别称(4.1.5)和(4.1.6)式为复数 $z\neq0$ 的**三角表示式**和**指数表示式**.

例如 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, $\mathrm{i}=1\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$;

$$-3\mathrm{i}=3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=3\mathrm{e}^{-\pi/2\mathrm{i}}.$$

现在把不等于零的复数 z_1,z_2 写成三角表示式:

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),\quad z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2),$$

则由平面三角公式得

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

因而两个复数相乘,等于是它们的模相乘,而辐角相加,即

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2.\tag{4.1.7}$$

这个公式可以推广到任意有限个复数的乘积.

(4.1.7)式的后一等式应理解为:对于 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$ 的任一值,必有 $\mathrm{Arg}z_1$ 与 $\mathrm{Arg}z_2$ 的值使等式成立;反之亦然.

对于除法有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

因而两个复数相除,所得商的模等于分子的模除以分母的模,商的辐角等于分子的辐角减去分

母的辐角，即

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2. \tag{4.1.8}$$

(4.1.8)中后一等式应与(4.1.7)中后一等式类似的理解.

如果不等于零的复数 z_1, z_2 采用指数表示式：$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$，则有

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

三、复数的乘幂与方根

n 个相同复数 z 的乘积，称为 z 的 n 次幂，记作 z^n. 设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$，则

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}, \tag{4.1.9}$$

显然该式对 $n=0$ 成立. 如果我们定义 $z^{-1} = \frac{1}{z}$，那么当 n 为负整数时，这个公式也成立.

当 $r=1$ 时，得到棣莫佛(DeMoivre)公式：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta. \tag{4.1.10}$$

因此，$\cos n\theta$ 和 $\sin n\theta$ 可用 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 来表示出来.

设 z 为已给复数，方程 $w^n = z$ 的所有解，称为 z 的 n 次方根，记作 $\sqrt[n]{z}$，即 $w = \sqrt[n]{z}$，其中 n 为正整数. 当 $z=0$ 时，方程 $w^n = z$ 只有唯一解 $w=0$. 当 $z \neq 0$ 时，为了求出根 w，设

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

利用棣莫佛公式(4.1.10)得

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

比较上式两端，并考虑到复数的辐角可以相差 2π 的整数倍，因此

$$\rho^n = r, \qquad n\varphi = \theta + 2k\pi.$$

或

$$\rho = \sqrt[n]{r} \qquad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n},$$

其中，$\sqrt[n]{r}$ 是算术根，k 为任何整数，但只当 $k = 0,1,\cdots,n-1$ 时，才能得到不同的 w 的值. 因此这 n 个根是

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0,1,\cdots,n-1).$$

这 n 个 n 次方根的模都是 $\sqrt[n]{r}$，因此在几何上不难知道：这 n 个根是以原点为中心，$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的顶点.

例 2 计算 $\sqrt[3]{-8}$ 所有的值.

解 因 $-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$，则

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) \quad (k = 0,1,2).$$

因此当 $k = 0,1,2$ 时的值分别为 $1 + \sqrt{3}i, -2, 1 - \sqrt{3}i$.

四、无穷大与复球面

为了使复数系统在许多场合是方便的，我们引进一个新的数无穷大，记作∞. 我们约定：设 α 为异于∞的一个复数

$$\alpha \pm \infty = \infty \pm \alpha = \infty, \ \alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty(\alpha \neq 0), \ \frac{\alpha}{0} = \infty(\alpha \neq 0), \ \frac{\alpha}{\infty} = 0.$$

为了避免与算术中的观念相矛盾，运算$\infty\pm\infty$，$0\cdot\infty$，$\frac{\infty}{\infty}$，不规定其意义.

对于复数∞而言，其模规定为$+\infty$，而实部、虚部和辐角均没有意义. 对于其它的每一个复数，则有$|z|<+\infty$，称有限复数.

在复平面上没有一点与∞相对应，但我们可设想复平面上有一理想点与它对应，此点称为**无穷远点**、复平面加上无穷远点称为**扩充复平面**.

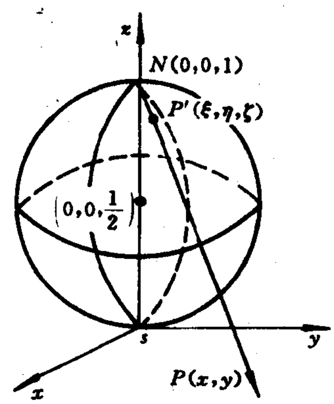

图 4.1.4

我们需要给出一个具体的模型，在这个模型上扩充复平面上的一切点都有具体的表示. 为此我们在三维空间中，把 xoy 面看作是复平面. 作一直径为 1 的球面，与复平面上的原点 $z=0$ 相切(图 4.1.4). 设切点为南极 S，过 S 的直径的另一端点设为北极 N. N 与复平面上点 $P(x,y,0)$的连线与球面的交点设为 P'(P'称为 P 的**球极投影**). 这样每一复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 对应于球面上不是 N 的唯一的一点. 反之，球面上除去 N 以外的每一点对应唯一的复数. 在这种对应下，随着 P 远离原点，则 P'愈加接近 N. 故令无穷远点与 N 对应. 这样球面与扩充复平面构成一一对应. 如果把球面看作地球，则赤道与复平面上的单位圆对应，南半球与单位圆的内部对应，北半球与单位圆的外部对应. 我们称此球面为**复球面**或**黎曼(Riemann)球面**. 不难想到过北极 N 的圆与复平面上的直线对应.

取 z 轴过 SN，设 P'的坐标为(ξ,η,ζ)则从 $\xi^2+\eta^2+(\zeta-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$，以及 N、P'、P 三点在一直线上的关系：$\frac{x-0}{\xi-0}=\frac{y-0}{\eta-0}=\frac{1}{1-\zeta}$得到球面与复平面点的对应规律：

$$\begin{cases} x=\dfrac{\xi}{1-\zeta}, \\ y=\dfrac{\eta}{1-\zeta}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi=\dfrac{x}{x^2+y^2+1}, \\ \eta=\dfrac{y}{x^2+y^2+1}, \\ \zeta=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}. \end{cases}$$

上式在天文学与地理学中有广泛应用.

五、复平面上的曲线

在高等数学中，我们知道平面上一条连续曲线可以表成

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases} \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta),$$

其中，$x(t)$，$y(t)$是在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上的实连续函数. 因此，这条曲线在复平面上可以表成

$$z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t) \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta), \tag{4.1.11}$$

$z(\alpha)$和 $z(\beta)$称为该曲线的端点. 对于(α,β)内的两点 t_1，t_2，当 $t_1\neq t_2$ 时，$z(t_1)\neq z(t_2)$，则曲线(4.1.11)称为**简单曲线**或**约当(Jordan)曲线**. 如果曲线(4.1.11)的两端点重合，即 $z(\alpha)=z(\beta)$，则称曲线(4.1.11)为简单闭曲线或约当闭曲线. 由此可见简单曲线自己不相交，或说简单曲线是一条无重点的连续曲线.

如果在$[\alpha,\beta]$上，$x(t)$，$y(t)$连续并有连续导数，而且 $z'(t)\neq0$，则曲线(4.1.11)称为光滑

曲线. 由几段光滑曲线连接组成的曲线称为逐段光滑曲线.

为了叙述的方便，约定以后提到的曲线(包括简单曲线)都是光滑或逐段光滑的. 另外，我们考虑曲线 $z=z(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 是有方向的，其方向为从起点 $z(\alpha)=a$ 到终点 $z(\beta)=b$，设此曲线为 C. 反之，方向是从 b 到 a 的曲线 $z=z(-t)$ $-\beta\leqslant t\leqslant-\alpha$，以 C^- 记之. 若是闭曲线，其方向规定为逆时针方向.

复平面上的曲线，也可看作是满足某种条件的点 z 的轨迹. 我们已知 $|z-z_1|$ 是表示 z_1 与 z 的距离. 例如 $|z-i|=2$，是表示所有与点 i 的距离为 2 的点 z 的轨迹，即以 i 为中心，半径为 2 的圆周(图 4.1.5). 用代数方法可得 $x^2+(y-1)^2=4$. 又如 $\arg(z-1)=\dfrac{\pi}{4}$，表示由点 1 出发，与实轴的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的半射线(图 4.1.6).

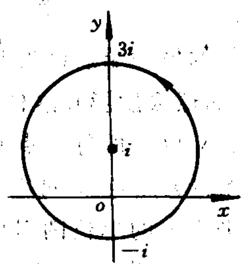

图 4.1.5

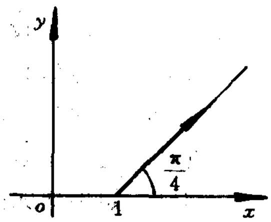

图 4.1.6

§1.2 区　　域

我们简要的回顾一下，在高等数学中已学过的关于平面点集的一些基本概念.

平面上以 z_0 为中心，以任意正数 δ 作半径的圆：$|z-z_0|=\delta$ 内部的点的集合称为 z_0 的**邻域**，记作 $|z-z_0|<\delta$，而称 $0<|z-z_0|<\delta$ 为 z_0 的**去心邻域**. 利用邻域可把复平面上的点分类：设已给集 E，z_0 为复平面上一点，如果点 z_0 有一邻域完全属于 E，点 z_0 称为 E 的**内点**；点 z_1 的邻域内总存在属于 E 的点与不属于 E 的点，点 z_1 称为 E 的**边界点**；E 的边界点全体称为 E 的**边界**；点 z_3 有一邻域完全不属于 E，点 z_3 称为集 E 的**外点**(图 4.1.7).

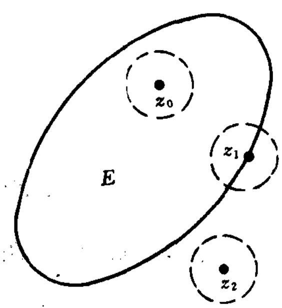

图 4.1.7

若点集 E 的每一个点都是内点，称 E 为**开集**. 如果集 E 的边界完全属于 E，称 E 为**闭集**. 如果集 E 可包含在原点的某个邻域内，E 称为**有界集**. 否则 E 称为**无界集**.

平面上具备下列性质的点集 D 称为**区域**：

(1)　D 的每个点都是内点(开集性质)；

(2)　D 的任意两个点，可用全部属于 D 一条折线连接起来(连通性质).

简单的说，区域是连通的开集. 一个区域 D 加上它的边界所构成的集，称为**闭区域**. 记作 $\overline{D}$. 区域的边界可能是由曲线、割痕和孤立的点所组成(图 4.1.8). 边界的方向约定为：当观察者沿边界前进时，区域应在左手边. 如果一个区域 D 可以包含在某个以原点为中心，以某一正数为半径的圆内，则称区域是**有界的**，否则称为**无界的**. 按照 D 为有界或无界区域，$\overline{D}$ 称为有

界闭区域或无界闭区域.

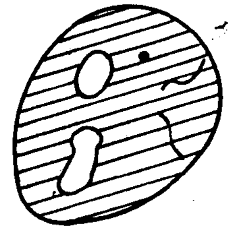

图 4.1.8

例如 $1<|z|<2$,其边界为 $|z|=1$, $|z|=2$. 有界区域,又称此区域为圆环域(图 4.1.9).

$|\mathrm{Im}z|\leqslant 1$,其边界为 $|y|=1$,无界闭区域(图 4.1.10).

$|\mathrm{Re}z|>1$,是开集,但不是区域(图 4.1.11).

$z+|z|\neq 0$,是从复平面去掉原点与负实轴而成,是无界区域(图 4.1.12).

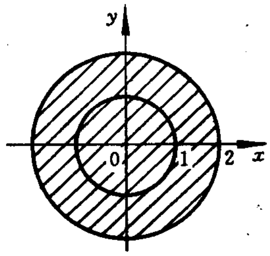

图 4.1.9

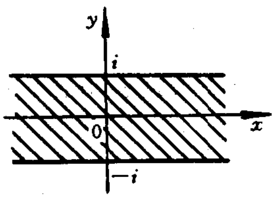

图 4.1.10

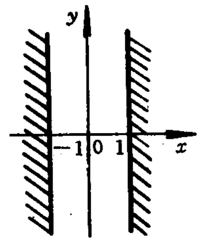

图 4.1.11

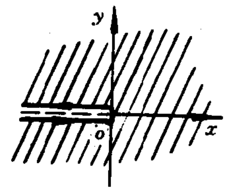

图 4.1.12

任意一条简单闭曲线把整个平面分成两个没有公共点的区域,一个有界的称为它的**内区域**. 一个无界的称为它的**外区域**. 这两个区域都以已给的简单闭曲线作为边界,其几何意义是很显然的. 例如简单闭曲线 $|z|=2$,内区域为 $|z|<2$,外区域为 $|z|>2$.

用简单闭曲线所围成的区域是比较简单的区域,也是我们通常所考虑的区域.

设 D 为区域,若属于 D 的任何简单闭曲线的内部仍属于 D,则称 D 为**单连域**(图 4.1.13). 一个区域若不是单连域,就称为**多连域**(图 4.1.14).

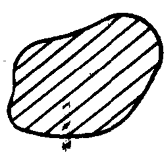

图 4.1.13

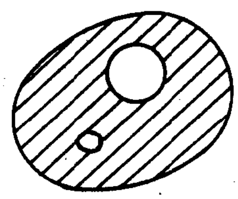

图 4.1.14

单连域的特征是经过连续变形而缩成一点. 而多连域的边界是由有限条简单闭曲线及一些割痕和点组成.

§1.3 复变函数

一、复变函数概念

设 E 是复平面上一个点集,如果对 E 中的每一点 z,依据某一规律有复数 $w=u+\mathrm{i}v$ 与其对应,则称 w 为定义在 E 上的**复变函数**,记为 $w=f(z)$.

如果一个 z 值,只有一个 w 的值与之对应,称 $w=f(z)$ 为**单值函数**. 如果一个 z 值有两个或两个以上的 w 的值与之对应,称 $w=f(z)$ 为**多值函数**. 今后如不另作说明,都是指单值函数.

设 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $w=f(z)$ 可以写成下列形式

$$w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y) \tag{4.1.12}$$

因此，一个复变函数可以看作两个实函数对. 例如 $w=z^2+2=x^2-y^2+2+2xy\mathrm{i}$，$u(x,y)=x^2-y^2+2$，$v(x,y)=2xy$.

关于复变函数的反函数与复合函数的概念与一元实函数相同，这里不讨论了.

一个复变函数也可看作一个**映射**（或**变换**），设 $f(z)$ 的值的集合为 G，则 $f(z)$ 将点集 E 的点映射为点集 G 的点. 设 $f(z)$ 将 E 中的点 z 映射为 G 中的点 w，集 E 映射为集 G，则称点 w 为点 z 的**像**，点 z 为点 E 的**原像**. 同样称 G 为 E 的像，E 为 G 的原像. 由(4.1.12)式要描出 $w=f(z)$ 的图形，因 x,y,u 和 v 均为变数，为避免采用四维空间的困难，我们用两个平面，一个是 z 平面，将 E 的点描在 z 平面上；另一个是 w 平面，将其像描在 w 平面上（图 4.1.15）. 例如函数 $w=z^2$，将点 $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ 映射为点 $w=\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，而将区域 D：$\mathrm{Im}z>0,\mathrm{Re}z>0,|z|<1$ 映射为 w 平面上的区域 D'：$\mathrm{Im}w>0,|w|<1$（图 4.1.16）.

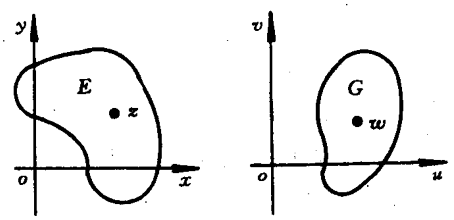

图 4.1.15

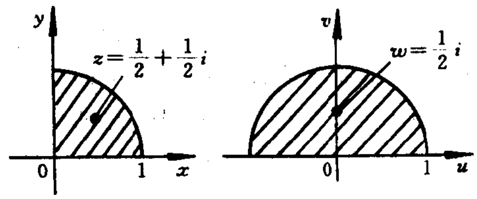

图 4.1.16

二、复变函数的极限与连续性

定义 1 设函数 $w=f(z)$ 在 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义，若有确定的复数 A $(A\neq\infty)$ 存在，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在一个正数 δ，使得当满足 $0<|z-z_0|<\delta(0<\delta\leqslant\rho)$ 的一切 z，都有 $|f(z)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(z)$ 当 z **趋向** z_0 时的**极限**. 记作 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 或 $f(z)\to A$（当 $z\to z_0$）.

这个定义的几何意义是：当变点 z 在 z_0 的一个充分小的 δ 邻域时，它们的像点就在 A 的一个给定的 ε 邻域.

由于 z_0 是复平面上的点，因此 z 趋近于 z_0 的方式可任意，但不论怎样趋近，$f(z)$ 的值总是趋近于 A.

这个定义形式上与单元实函数的情况相同，所以当 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$，$\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$ 时有

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B,\ \lim_{z\to z_0}f(z)g(z)=AB,\quad \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}(B\neq 0).$$

复变函数极限的计算，可归结为实函数对的计算，具体来说，有下面的定理：

定理 1 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，$A=u_0+\mathrm{i}v_0$，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=u_0,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=v_0.$$

证 必要性：若 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$，根据极限定义有：当 $0<|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

$<\delta$ 时，则有

$$|f(z)-A| = |(u+\mathrm{i}v)-(u_0+\mathrm{i}v_0)| = \sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2} < \varepsilon.$$

于是显见，当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时则有

$$|u-u_0| < \varepsilon, \quad |v-v_0| < \varepsilon,$$

即
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v_0.$$

充分性：当上面两式成立，即当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，就有 $|u-u_0|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|v-v_0|<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是便有当 $|z-z_0|<\delta$ 时，

$$|f(z)-A| = |(u-u_0)+\mathrm{i}(v-v_0)| \leqslant |u-u_0|+|v-v_0| < \varepsilon,$$

即
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A.$$

关于含 ∞ 的极限可作如下定义：

$$\lim_{t\to 0} f\left(\frac{1}{t}\right) = A \Leftrightarrow \lim_{z\to\infty} f(z) = \alpha(\alpha \text{ 为有限复数}); \lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty;$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{f\left(\frac{1}{t}\right)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{z\to\infty} f(z) = \infty.$$

定义 2 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ 成立，则称 $f(z)$ 在 z_0 处**连续**. 如果 $f(z)$ 在区域 D 中的每一点连续，则称 $f(z)$ **在 D 内连续**.

由此定义与定理 1 知

定理 2 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续的充要条件是 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

上面引进的复变函数极限与连续性的定义与实函数的极限与连续性的定义形式上完全相同，因此高等数学中证明的关于连续函数的和、差、积、商（分母不为零）及复合函数仍连续的定理依然成立. 由此可知幂函数 $w=z^n$（n 为正整数），更一般的多项式 $P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+z_n$ 是复平面上的连续函数. 而有理函数 $R(z)=\dfrac{a_0z^n+z_1z^{n-1}+\cdots+a^n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}$ 除在分母为零的点外在复平面上处处连续.

同二元实函数一样，在有界闭区域上的复连续函数，具有下列几个性质：

(1) 有界闭区域 $\overline{D}$ 上的连续函数 $f(z)$ 是有界的.

(2) 有界闭区域 $\overline{D}$ 上的连续函数 $f(z)$，在 $\overline{D}$ 上其模 $|f(z)|$ 至少取得最大值与最小值各一次.

(3) 有界闭区域 $\overline{D}$ 上的连续函数 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上是一致连续的.

习题 1

1. 求下列各复数的实部、虚部、模与辐角.

(1) $\dfrac{1-2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}-\dfrac{2-\mathrm{i}}{5\mathrm{i}}$；(2) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\right)^3$；(3) $\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$.

2. 将下列复数化为三角表示式与指数表示式.