高等财经院校试用教材

经济应用数学基础（五）

运筹学通论

中国人民大学数学教研室编

高等财经院校试用教材

经济应用数学基础（五）

运筹学通论

中国人民大学数学教研室编

中国人民大学出版社

高等财经院校试用教材

经济应用数学基础（五）

运筹学通论

中国人民大学数学教研室编

•

中国人民大学出版社出版

（北京西郊海淀路39号）

中国人民大学出版社印刷厂印刷

（北京鼓楼西大石桥胡同61号）

新华书店北京发行所发行

•

开本：850×1168毫米32开　印张：12

1987年5月第1版　1987年5月第1次印刷

字数：291,000　册数：1—45,000

•

ISBN7-300-00039-0/F·12

书号：13011·33　定价：2.85元

前　言

《经济应用数学基础》是受原教育部委托编写的高等财经院校试用教材，全书共分五册。

本书为第五册《运筹学通论》，书中介绍了运筹学各分支的主要内容（线性规划部分已独立为第四册）。本书不仅适宜作为高等院校财经专业的试用教材，也可作为其他院校的运筹学、系统工程、管理工程等有关专业的教材。书中有些章节（例如，第三章、第八章、第十章、第十二章），时间不够时可略去不讲。

参加本书编写的有胡显佑（第一、二、三、四章）、严颖（第五、九、十、十一、十二章）、魏权龄（第六、七、八章）。在编写过程中，中国科学院系统科学研究所田丰同志、应用数学研究所程侃同志和北京航空学院王日爽等同志对有关章节提出了很多宝贵意见，谨在此表示感谢。

编　者　1985年7月

目　　录

第一章　整数规划

整数规划是数学规划的一个重要分支。在一个规划问题中，如果它的某些变量（或全部变量）要求取整数时，这个规划问题就称为整数规划问题。特别是当这问题的约束条件为线性等式或不等式、目标函数为线性函数时，就称此问题是整数线性规划问题。

求解整数规划问题是相当困难的。到目前为止，整数规划问题还没有一个很有效的解法。但是，由于在应用及理论方面提出的许多问题都可以归结为整数规划问题，所以，对整数规划的研究在理论上和实践上都有着重大意义。在这一章，我们只讨论整数线性规划问题的解法。

§1.1　整数规划的例子

（一）下料问题

例.　设用某种型号的圆钢下零件A_1，A_2，…，A_m的毛坯，在一根圆钢上，下料的不同方式有B_1，B_2，…，B_n种，每种下料方式可以得到各种零件的毛坯数以及每种零件的需要数量如下页表 1-1。问应怎样安排下料方式，使得既满足需要，又使所用原材料最少？

设用B_j方式下料的圆钢有x_j根，则这一问题的数学模型为

求一组变量x_j（$j=1,2,\cdots,n$）的值，使它满足约束条件：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \geqslant a_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \\ \qquad (\text{所得第}A_i\text{种零件毛坯个数不少于}a_i) \\ x_j \geqslant 0,\ \text{且为整数} \end{cases}$$

并使目标函数$S=\sum_{j=1}^{n} x_j$的值最小。

表 1-1

各方式下的零件毛坯个数 / 下料方式 / 零件名称	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	各零件的需要量
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m

在这个例子中，所有变量均要求是整数。这类问题称为全整数规划问题。

（二）工厂设址问题

例1． 要在m个不同地点计划修建m个规模不全相同的工厂，它们的生产能力分别是a_1，a_2，…，a_m（为简便起见，假设生产同一种产品）。第i个工厂的建设费用为f_i，$i=1$，2，…，m。又有n个零售商店销售这种产品，对这种产品的需求量分别为b_1，b_2，…，b_n。从第i个工厂运送一个单位产品到第j个零售商店的运费为c_{ij}。试决定应修建哪些工厂，使得既满足零售商店的需求，又使建设工厂和运输的总费用最小。

设x_{ij}是第i个工厂运往第j个零售商店的产品数量（$i=1$，…，m；$j=1$，…，n）。

又设 $y_i=\begin{cases} 1 & \text{如果决定修建第}i\text{个工厂} \\ 0 & \text{相反} \end{cases} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$

问题化为求 $\min\sum_{i=1}^{m}\left[f_i y_i+\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right]$

并且满足

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\geqslant b_j & (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\leqslant a_i y_i & (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\\ y_i=0\text{ 或 }1 & (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\\ x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\end{cases}$$

在这个例子中，y_i 可取 0 或 1，而 x_{ij} 可取任意非负实数。这类整数规划问题称为混合整数规划问题。

例 2． 有 m 台同一类型的机床，有 n 种零件在这类机床上进行加工，设各种零件的加工时间分别为：$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$。问如何分配，使各机床的总加工任务相等，或者说尽可能均衡。

引进变量 x_{ij} $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，规定

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若零件 } j \text{ 分配在第 } i \text{ 台机床加工}\\ 0 & \text{若零件 } j \text{ 不分配在第 } i \text{ 台机床上加工}\end{cases}$$

于是第 i 台机床加工各种零件的总时间为

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij}\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

又一个零件只能在一台机床上加工，所以又有

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=1\qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

问题归结为：求一组变量 x_{ij}，使得

$$\min\left\{\max\left[\sum_{j=1}^{n} a_j x_{1j},\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_{2j},\ \cdots,\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_{mj}\right]\right\}$$

且满足

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=1 & (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\\ x_{ij}\text{ 取 0 或 1} & (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

在这个例子中，所有变量均取 0 或 1。这类整数规划问题称为 0 — 1 规划问题。

（三）背包问题

例. 一个旅行者，为了准备旅行的必备物品，要在背包里装一些最有用的东西。但他最多只能携带 b 公斤的物品。而每件物品都只能整件携带，于是他给每件物品规定了一定的“价值”，以表示其有用程度。如果共有m件物品，第i件物品重a_i公斤，其价值为c_i。问题就变成：在携带的物品总重不超过 b 公斤的条件下，携带哪些物品，可使总价值最大。

首先引进变量x_i，规定

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{当携带第}j\text{件物品时} \\ 0 & \text{当不携带第}j\text{件物品时} \end{cases}$$

问题的数学形式可写成

求 $\max \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$ （m为正整数）

满足

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \leqslant b \\ x_i = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

这也是一个 0 — 1 规划问题。

§1.2 整数规划的解法一——分枝定界法

对于整数线性规划问题，如果它的可行解集是有限集，我们可以将它的所有的可行解依次代入目标函数中，比较所得目标函数值的大小，从而求得最优解。

例如，§1.1的背包问题中，若 x^0是它的一个可行解：$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_3^0)$，（$x_j^0 = 0$ 或 1），则可能的解最多有 2^n 个。

当n较小时，逐个地比较这些解的优劣，则可求得最优解。这样的方法称为完全枚举法。

但是，当n较大时，利用完全枚举法几乎是不可能的。这时，我们可以利用部分枚举法来解决这一问题。这种方法亦称分枝定界法。我们仍以背包问题来说明这一解法的基本思想。

例1、现有100万元资金打算在5个不同的地方修建某种工厂，如图1-1。由于条件不同，所需投资分别为：$a_1 = 56$，$a_2 = 20$，$a_3 = 54$，$a_4 = 42$，$a_5 = 15$（单位：万元）。工厂建成后，每年能得到的利润分别为$c_1 = 7$，$c_2 = 5$，$c_3 = 9$，$c_4 = 6$，$c_5 = 3$（单位：万元）。问应如何确定投资地点，使总投资不超过100万元，且使建成后每年所获总利润最多？

设

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{当在}L_j\text{处投资建厂} \\ 0 & \text{当不在}L_j\text{处投资建厂} \end{cases} \quad (j = 1,2,3,4,5)$$

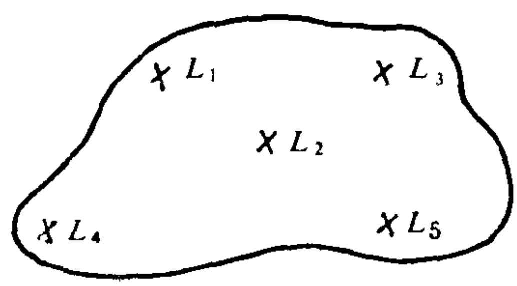

图 1-1

由问题的条件可得

$$\max f = 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 3x_5 \qquad ①$$

问题［0］

$$56x_1 + 20x_2 + 54x_3 + 42x_4 + 15x_5 \leqslant 100 \qquad ②$$

$$x_j = 0 \text{ 或 } 1 \qquad (j = 1,2,3,4,5) \qquad ③$$

问题［0］显然有一个可行解$\bar{x}^0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$，对应的目标函数值$\bar{f}_0 = 0$。显然$\bar{f}_0$是目标值的一个下界。我们可得表1-2：

表 1-2

现有可行解	现有下界
ϕ	$-\infty$
0	0

这个表说明当前已求得的可行解，及对应的目标函数值（即问题［0］的目标值的下界）。其中（ϕ，$-\infty$）表示最初未求得问题的可行解时，目标值的下界是$-\infty$。而（0，0）表示当可行解取$\bar{x}^0=0$（零向量）时，对应的目标值（问题的下界）是$\bar{f}_0=0$。

如果我们将问题［0］中的约束条件③改为$0\leqslant x_j\leqslant 1$，则问题［0］变为普通线性规划问题：

$$
\text{问题}[0]'\begin{cases}\max f=7x_1+5x_2+9x_3+6x_4+3x_5 & ①\\ 56x_1+20x_2+54x_3+42x_4+15x_5\leqslant 100 & ②\\ \left.\begin{array}{l}x_j\leqslant 1\\ x_j\geqslant 0\end{array}\right.\quad (j=1,\cdots,5) & ③\end{cases}
$$

问题［0］的可行解集是问题［0］′的可行解集的子集合，问题［0］′称为问题［0］的松弛问题。它是较易求解的。解问题［0］′，可能有下面几种情形：

（1）所得最优解恰好全为整数。当然，这个解也是问题［0］的解。

（2）若松弛问题无可行解，显然问题［0］也无可行解。

（3）有最优解，但其分量不全为整数，所以不是问题［0］的最优解。

为了求问题［0］′的解，我们可以利用单纯形方法。但是，这里，我们用更简单的方法来求它的解：首先，求出c_i/a_i（$i=1,\cdots,5$），这个比值的经济意义是投资1万元在第i地所能获得的利润，求出比值如下页表1-3。

将最大比值所对应的变量取作1（$x_2=1$），再取次大比值所对应的变量为1（$x_5=1$），依次作下去，使满足约束条件②；就得到一个解：

$x^0 = (0, 1, 1, 11/42, 1)^{\prime}$

表 1-3

变量x_i	a_i	c_i	c_i/a_i
1	56	7	1/8
2	20	5	1/4
3	54	9	1/6
4	42	6	1/7
5	15	3	1/5

对应的目标值$f^0 = 18\frac{4}{7}$，f^0是问题［0］的目标值的上界。但是x^0不是问题［0］的解，因$x_4^0 = 11/42$不是整数，但x_4只能取0或1，所以我们分别令$x_4 = 0$或$x_4 = 1$，可将问题［0］化为两个子问题：

子问题［1］
$$\begin{cases} \max f = 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 3x_5 \\ 56x_1 + 20x_2 + 54x_3 + 15x_5 \leqslant 100 \\ x_4 = 0 \\ x_j = 0 \text{ 或 } 1 \qquad (j = 1,2,3,5) \end{cases}$$

子问题［2］
$$\begin{cases} \max f = 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 3x_5 + 6 \\ 56x_1 + 20x_2 + 54x_3 + 15x_5 \leqslant 58 \\ x_4 = 1 \\ x_j = 0 \text{ 或 } 1 \qquad (j = 1,2,3,5) \end{cases}$$

这一过程我们可以用树形图（图1-2）表示。

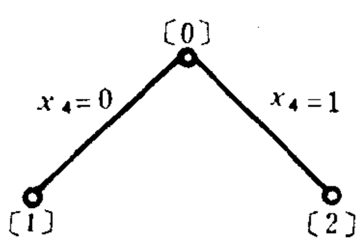

图 1-2

它形象地表明原问题［0］“分枝”为子问题［1］和子问题［2］。

对于任一子问题，如果已求得它的最优解，或知道它无解，或能断定它的最优解不是所求的原问题的最优解时，我们就称这一子问题已经探明。否则，称未探明。我们将一个问题分为若干个子问题的过程称为分枝。

用同样的方法，我们可以得到问题［1］的松弛问题，并可求得这个松弛问题的解：

$$x' = (\frac{11}{56}, \ 1, \ 1, \ 0, \ 1)^T$$

对应的目标值为 $f_1 = 18\frac{3}{8}$。x'仍不是整数解,可分别令 $x_1 = 0$ 或$x_1 = 1$，又将问题［1］分枝为

子问题［3］ $\begin{cases} \max f = 5x_2 + 9x_3 + 3x_5 \\ 20x_2 + 54x_3 + 15x_5 \leqslant 100 \\ x_4 = 0 \qquad x_1 = 0 \\ x_j = 0 \text{或} 1 \qquad (j = 2,3,5) \end{cases}$

子问题［4］ $\begin{cases} \max f = 5x_2 + 9x_3 + 3x_5 + 7 \\ 20x_2 + 54x_3 + 15x_5 \leqslant 44 \\ x_4 = 0 \qquad x_1 = 1 \\ x_j = 0 \text{或} 1 \qquad (j = 2,3,5) \end{cases}$

上述分枝过程又可用树形图（图 1－3）表示：

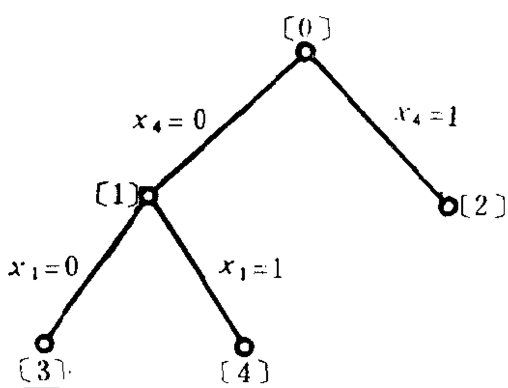

图 1-3

解子问题［3］的松弛问题得

$$x^3 = (0,1,1,0,1)^T$$

$$f_3 = 17$$

显然x^3也是子问题［3］的最优解。这时,子问题［3］已探明。同时，$f_3 = 17$ 也是原问题［0］目标值的一个下界，于是表 1－2 可修改为表1-4。

表 1-4

现有可行解	现有下界
φ	$-\infty$
0	0
x^3	17

再解子问题［4］对应的松弛问题，可得其最优解为

$$x^4 = (1,1,\tfrac{1}{6},0,1)^T$$

$$f_4 = 16\tfrac{1}{2}$$

注意到x^4仍不是子问题［4］的解,但其对应的目标值$f_4 = 16\frac{1}{2}$

小于原问题最优值下界17。所以子问题［4］也不用再分枝了。于是子问题［4］也已探明。已探明的子问题，在树形图中该子问题下面标一横线，表示该子问题已不需再分枝（如图1-3）。

做到这里，我们总结一下解某一子问题的松弛问题时，可能碰到的几种情况和处理方法：

（1）对应的松弛问题无解，则该子问题也无解。这时，该子问题不必再分枝。这个子问题称为已探明。已探明的子问题在树形图中标一横线。

（2）对应的松弛问题的解，恰是该子问题的解。这也就求得该子问题的最优解。这时，亦无必要从这个子问题再进行分枝了，因为它的子问题的最优值决不会超过这个最优值。这时，该子问题也已探明。例如：子问题［3］的解已求得，则子问题［3］已探明，并用$f_3=17$代替$\bar{f}_0=0$，做为下界。这一过程称为定界。

（3）对应的松弛问题的解不是这个子问题的解。则当其目标值大于现有最好下界时，该子问题继续分枝；而当其目标值不超过现有最好下界时，则该子问题也已探明。这时，称它为剪枝。例如：子问题［4］的最优值$f_4<f_3$，则可剪枝。将子问题［4］标明已探明。

现在，再看子问题［2］，可求其松弛问题的解为：$x^2=(0, 1, \frac{23}{54}, 1, 1)$；$f_2=17\frac{5}{6}>f_3$。所以，将子问题［2］分枝。分枝方法仍根据$x_3$取0或1来进行。分别令$x_3=0$或1，得子问题［5］、子问题［6］，如下页图1-4。

$$\max f=7x_1+5x_2+3x_5+6$$

子问题［5］
$$\begin{cases}56x_1+20x_2+15x_5\leqslant 58\\ x_4=1 \qquad x_3=0\\ x_j=0\text{或}1 \qquad (j=1,2,5)\end{cases}$$

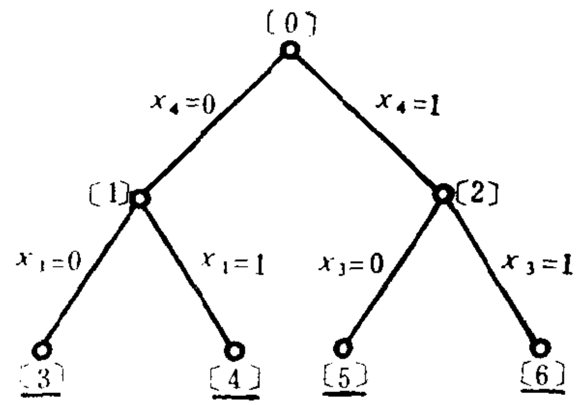

图 1-4

子问题［6］$\begin{cases} \max f = 7x_1 + 5x_2 + 3x_5 + 15 \\ 56x_1 + 20x_2 + 15x_5 \leqslant 4 \\ x_4 = 1 \qquad x_3 = 1 \\ x_j = 0 \text{ 或 } 1 \qquad (j = 1, 2, 5) \end{cases}$

由于$x^5 = \left(\frac{23}{56},\ 1,\ 0,\ 1,\ 1\right)$；$f_5 = 16\frac{7}{8} < f_3 = 17$。所以，可剪枝。子问题［5］已探明。

又$x^6 = \left(0,\ \frac{1}{5},\ 1,\ 1,\ 0\right)$；$f_6 = 16 < f_3$。所以也可剪枝。子问题［6］也已探明。至此全部子问题均已探明，从而求得原问题［0］的解就是

$x^3 = (0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1)$；$f_3 = 17$。整个解题过程可用树形图表示如图1-4。

如果我们用完全枚举法，就要试 $2^5 = 32$次才能得出结果。由此例可以看出，对于这类问题，关键首先在于如何确定原问题的松弛问题，而松弛问题又存在比较有效的解法。其次，就是如何确定分枝的规则，将原问题分枝为若干个子问题。最后，在求解过程中，要不断考虑能否修改下界（定界）以便于剪枝。如果所有子问题都已探明，就可以获得原问题的解。

对于更一般的 0 - 1 规划问题，可以利用隐枚举法来求解，