线性代数

王耕禄 编

北京理工大学出版社

线 性 代 数

王耕禄 编

北京理工大学出版社

（京）新登字149号

内 容 简 介

本书是根据1987年高等学校工科数学课程教学指导委员会制订的《线性代数课程教学基本要求》的精神，在北京理工大学所用的《线性代数》讲义的基础上修改编写的。

内容包括高斯消元法、行列式、矩阵、线性方程组、n维向量空间 R^n、矩阵的相似对角形、二次型等，此外还有两个附录。

本书内容取材比较适当，层次结构清楚，语言流畅，概念清晰。每节末有练习，每章末有习题与内容分析，书末附有练习与习题答案，便于教与学。

本书可作为高等工科院校各专业使用，也可供工程技术人员自学。

线 性 代 数

王 耕 禄 编

*

北京理工大学出版社出版发行

各地新华书店经售

清华大学印刷厂印刷

*

787×1092 毫米 32 开本 10.125 印张 238 千字

1992年10月第一版　1992年10月第一次印刷

ISBN 7—81013—578—3/O·90

印数：1—6200 册　定价：4.35 元

前　言

本书是在北京理工大学《线性代数》讲义的基础上修改而成的。修改时参照了 1987 年高等学校工科教学课程指导委员会制订的《线性代数课程教学基本要求》。

关于教材的安排与写法。

1. 前四章是高斯消元法、行列式、矩阵、线性方程组。每一章的内容均有各自广泛的应用领域，而在教学上则又均可看成是围绕线性方程组问题的研究展开的。

将高斯消元法放在第一章的目的，是使学生一开始就进入线性代数的重要内容——线性方程组，也是为了对稍后引入的矩阵及 n 维向量显得比较自然，并且这一章的内容也易于接受。

第四章在研究线性方程组的问题时，引入了 n 维向量，也讲述了它们的运算、线性相关性的有关概念、性质和结论。第五章在此基础上给出了 n 维向量空间的概念，侧重于空间的结构，它是线性空间及欧氏空间的具体模型。第六章讲了矩阵的最重要的内容之一，矩阵的相似对角形。在给出特征值和特征向量概念、性质的基础上，以它为工具讲述了矩阵与对角形矩阵相似的充要条件。第七章是有重要应用的二次型，着重讲解实二次型及有广泛应用价值的用正交变换化二次型为标准形的问题。

2. 每节后配有练习题，用以对基本概念和方法的理

解；每章有小结和习题。各章的小结，主要是阐明内容的重点、作用、联系，用以帮助读者理解所学的内容及了解本章内容的地位。书后附有部份练习和习题的答案。

3． 本书正文部分大致适用于高等工业院校 32～40 学时线性代数课程的教材，以及工程技术人员自学线性代数的用书。

4． 最后写了两个附录，它们是为了要求线性代数内容比较多的专业设置的，内容是 n 维向量空间 R^n 的线性变换和线性空间与线性变换。

在编写过程中王朝瑞教授提出了许多宝贵意见和建议，也得到几何代数教研室全体老师的支持和帮助，在此向他们表示衷心的感谢。

限于水平，不妥或谬误之处敬请同行、读者批评指正。

编　　者

1992 年 2 月

目　录

第一章　高斯（Gauss）消元法

线性方程组是线性代数中的重要内容之一，它有广泛的应用，许多工程、技术问题常常归结为线性方程组的求解问题。本章介绍求线性方程组解的高斯消元法，它是解线性方程组的一个古典的方法，但确是一个行之有效的、基本的方法。研究方程组的求解问题，要回答：方程组是否有解，如何判断；如果有解，解的个数是多少，并把解求出来。

线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\cdots \qquad \cdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

称（1.1）为 m 个方程 n 个未知数的线性方程组，这里 m 和 n 不一定相等（即方程的个数 m 与未知数的个数 n 不一定相等），其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 代表未知数，$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 称为未知数的**系数**；$b_1,b_2,\cdots,b_m$ 称为**常数项**。

在方程组（1.1）中如果用数 $k_1,k_2,\cdots k_n$ 分别代替未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 后，(1.1) 中的每一个方程都成为恒等式，则称数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为方程组（1.1）的一个**解**。全部解构成的集合称为**通解**，也称为**解集合**。在线性方程组有解时，常称为**相容的**方程组。否则，称为**不相容的**或**矛盾的**方程

组。

如果另有一个方程组

$$\begin{cases} c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + \cdots + c_{1n} x_n = d_1 \\ c_{21} x_1 + c_{22} x_2 + \cdots + c_{2n} x_n = d_2 \\ \quad\cdots \qquad\quad \cdots \qquad\qquad \cdots \\ c_{m1} x_1 + c_{m2} x_2 + \cdots + c_{mn} x_n = d_m \end{cases} \tag{1.2}$$

与方程组（1.1）的解集合相同，则称这两个方程组是**同解的**或**等价的**。

下面通过具体例子介绍高斯消元法。

例 1.1　解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases} \tag{1.3}$$

解　将（1.3）的第 1 个与第 2 个方程交换位置得到

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

将第一个方程乘 -2 及 -3 分别加到第 2，3 个方程上去，得到

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ \qquad 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ \quad\;\; - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

将第 3 个方程乘 -1，并与第 2 个方程互换位置得到

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

将第 2 个方程乘 -4 加到第 3 个方程上去，便得到阶梯形方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_3 = 10 \end{cases} \tag{1.4}$$

容易求得方程组的解为

$$x_1 = 9, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 5$$

我们看到，用消元法解例 1.1 的过程就是对方程组施行了三种变换：

(1) 互换两个方程的位置；

(2) 用一个非零的数乘某一个方程；

(3) 用一个方程的 k 倍加到另一个方程上去。

称这三种变换为线性方程组的**初等变换**。

由初等代数知道，下面的定理是成立的。

定理 1.1 方程组的初等变换把一个线性方程组变成一个与它同解的线性方程组。

用消元法解方程组就是反复利用初等变换化简方程组，使之容易求出方程组的解。化简是遵循下面的过程：对于给定的方程组，每次除了一个方程外，其余 $m-1$ 个方程都消去某一个未知数。这样，就能做到在方程组中只有一个方程含有 x_1，在其余 $m-1$ 个方程中也只有一个方程含有 x_2，等等。直至将方程组化为形如 (1.4) 式的阶梯形。这时实际

上已能看出该方程组有没有解，如果有解也容易立即将解写出。

用消元法解方程组，包含两个过程，一个是将方程组（1.3）变为（1.4）的过程，称为**消元过程**；一个是由方程组（1.4）求解，先求得 x_3，然后逐步求得 x_2 和 x_1，这一过程称为**回代过程**。

在解例 1.1 时，将方程组（1.3）变为（1.4）后，已能容易地求出方程组的解。有时为了方便亦可再进一步化简方程组，直至不能再消去未知数时为止。这就是：将（1.4）的第 3 个方程除 2；再将它加到第 2 个方程上去：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ \quad\;\; x_2 \qquad\;\; = 3 \\ \qquad\qquad\;\; x_3 = 5 \end{cases} \tag{1.5}$$

最后，将（1.5）的第 2，3 个方程加到第 1 个方程上去：

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\;\; = 9 \\ \quad\;\; x_2 \qquad\;\; = 3 \\ \qquad\qquad\;\; x_3 = 5 \end{cases} \tag{1.6}$$

（1.6）已经是方程组的解了。

从例 1.1 的解题过程可以看到，主要的是对各方程的系数和常数项进行运算，而未知数 x_1，x_2，x_3 并未参加运算。也就是说，方程组的解只是由它们的系数与常数项决定的。为使书写简洁，将方程的未知数，运算符号以及等号都省略，而用方程组（1.1）的系数及常数项构成的如下矩形数表

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
 & \cdots & & \cdots & \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{bmatrix} \tag{1.7}
$$

来表示方程组(1.1)。显然，方程组(1.1)与矩形数表(1.7)是互相唯一确定的，(1.7)的第 i 行就代表(1.1)的第 i 个方程。

定义 1.1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的矩形数表

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & & \cdots & \cdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix} \tag{1.8}
$$

称为 m 行 n 列的**矩阵**，或 $m\times n$ 矩阵。其中 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列的**元素**。

矩阵常用大写字母 A，B，C，…表示。

有了矩阵的概念，我们称(1.7)为方程组(1.1)的**增广矩阵**，称(1.8)为方程组(1.1)的**系数矩阵**。

定义 1.2 矩阵的下述行变换，称为矩阵的**行初等变换**：

(1) 互换矩阵的两行；

(2) 用一非零的数乘矩阵的某一行；

(3) 用一数 k 乘矩阵的某一行加到另一行上去。

显然方程组的初等变换，相当于方程组所对应增广矩阵的行初等变换。因此利用初等变换求解方程组(1.1)的过程，完全可以用矩阵的行初等变换化简(1.7)来达到目的。

为叙述方便，引入阶梯形矩阵的概念。所谓**阶梯形矩阵**

是指满足下面两个条件的矩阵：

（1）零行（元素全为零的行）全位于矩阵的下方；

（2）各非零行（元素不全为零的行）的第一个不为零的元素的列标，随行标的增大而严格增大。

例如

$$A=\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} * & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

这里矩阵 A,B,C 为阶梯形矩阵，而 D 不是阶梯形矩阵，其中 $*$ 表示非零元素。

如果阶梯形矩阵的每一个非零行的第一个不为零的元素均为1，并且这第一个非零元素所在之列的其余元素均为零，则称这个阶梯形矩阵为行简化阶梯形矩阵。例如矩阵

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{及} \quad F=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

均为行简化阶梯形矩阵。

下面研究方程组（1.1），用以说明消元法解一般线性方程组的方法与步骤。写出代表方程组（1.1）的增广矩阵（1.7）：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

不失一般性可设 $a_{11}\neq 0$。因为增广矩阵 A 的第1列(方程组 x_1 的系数）如果全为零，则方程组对 x_1 没有任何限制，x_1 就可取任意数，这时方程组（1.1）就可作为 $n-1$ 个变量 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 的方程组来解。如果第1列不全为零，则可利用行初等变换使得左上角元素不为0，因此可设 $a_{11}\neq 0$。利用行初等变换，分别把第一行乘上 $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ 加到第 i 行上（$i=2,3,\cdots,n$），于是增广矩阵 A 就变成

$$A_1=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{bmatrix}$$

其中 $a'_{ij}=a_{ij}-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}\cdot a_{1j}(i=2,3,\cdots,m;\ j=2,3,\cdots,n)$，用 A_2 记 A_1 中用虚线标出的右下角部份

$$A_2=\begin{bmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{bmatrix}$$

不难理解，A_1（为增广矩阵）所对应的方程组有解的充分必要条件为 A_2 对应的方程组有解，而 A 与 A_1 对应的方程组是同解的，由此可推得，A 对应的方程组有解的充分必要条件是 A_2 对应的方程组有解。

对 A_2 按如上方法继续作行初等变换，且一步步作下去，必要时调动 A 的前 n 列的次序（相应的对未知数重新编号）*。于是可得阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} & e_1 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} & e_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{rr} & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} & e_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & e_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

其中 $b_{ii} \neq 0$ $(i=1,2,\cdots,r)$，再进一步利用行初等变换（从第 r 行往上作）可得行简化阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

(1.10) 所对应的方程组是

$$\begin{cases} x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \end{cases} \tag{1.11}$$

---

* 这里完全是为了在一般讨论时叙述上的方便，在实际解题时并无必要。这一点将在下面的举例中说明。

$$
\begin{aligned}
x_r + c_{r,r+1}x_{r-1} + \cdots + c_{rn}x_n &= d_r \\
0 &= d_{r+1} \\
0 &= 0 \\
&\cdots \\
0 &= 0
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

方程组（1.11）后面的 $n-(r+1)$ 个方程即“$0=0$”是一些恒等式，可以去掉，它表明这些方程是前面方程运算的结果，因而是多余的。

由定理1.1知道，方程组（1.11）是与（1.1）同解的，所以只要求出（1.11）的解便得到（1.1）的解。

下面着手讨论方程组（1.11）的解的存在性及解的个数问题。

先考察（1.11）的第 $r+1$ 个方程

$$0 = d_{r+1}$$

如果它不是恒等式，即 $d_{r+1} \neq 0$，则（1.11）无解，也就是（1.1）无解。

我们在 $d_{r+1}=0$ 的情况下来讨论方程组

$$
\begin{cases}
x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\
x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\
\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\
x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_r = d_r
\end{cases}
\tag{1.12}
$$

的解。这时（1.12）与（1.1）是同解的。

若 $r=n$，可得唯一解

$$
\begin{cases}
x_1 = d_1 \\
x_2 = d_2 \\
\cdots \\
x_n = d_n
\end{cases}
$$

这唯一解也就是（1.1）的唯一解。

若 $r<n$，方程组（1.12）可改写为

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n \\ x_2 = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ x_r = d_r - c_{r,r-1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n \end{cases} \tag{1.13}$$

这里 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 是通过 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 表示出来的，任给 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 一组值就可唯一地定出 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 的值，随之可得方程组（1.12）的一个解。由于未知数 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 可以任意取值，所以（1.12），也就是（1.1）有无穷多个解。称 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 为**自由未知数**。于是（1.1）的全部解可表示为

$$\begin{aligned} x_1 &= d_1 - c_{1,r-1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n \\ \cdots & \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_r &= d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n \\ x_{r+1} &= x_{r+1} \\ \cdots & \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n &= x_n \end{aligned} \tag{1.14}$$

综上所述，可得如下结论：

（1）$d_{r+1} \neq 0$ 时，方程组（1.1）无解。

（2）$d_{r+1}=0$，且 $r=n$ 时，方程组(1.1)有唯一的解。

（3）$d_{r+1}=0$，且 $r<n$ 时，方程组(1.1)有无穷多个解。

由以上讨论可见，(1.1)有解的充分必要条件是 $d_{r+1}=0$

例 1.2 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 1 \end{cases}$$