

气候的第四类自然因子

彭公炳 陆 巍 编著

科学出版社

气候的第四类自然因子

彭公炳 陆 巍 编著

科学出版社

1983

内 容 简 介

本书比较系统地阐述了日月引潮力、太阳活动、地球重力场、地极移动和地球自转速度变化对气候的可能影响。揭示了气候形成和气候变化与这些宇宙-地球物理因子相联系的大量事实，分析了这类因子影响气候的可能物理机制，并讨论了利用上述因子开展长期天气预报的方法；同时涉及若干海洋现象问题。书中附有大量图表。

本书可供气象、水文、海洋、天文、地球物理、自然地理等方面的研究人员，高等院校师生，以及气象、水文、海洋台站的广大专业工作者参考。

气候的第四类自然因子

彭公炳 陆 巍 编著

责任编辑 郑秀灵

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983年8月第 一 版 开本：787×1092 1/16
1983年8月第一次印刷 印张：15 1/8
印数：0001—2,500 字数：348,000

统一书号：13031·2294

本社书号：3140·13—15

定价：2.35 元

前 言

某些宇宙-地球物理因子,对气候的影响有较长的研究历史,但是,近若干年来才取得了较大的进展,正在形成一个专门的分支学科。本课题的任务是,从理论上总结这类因子影响气候形成和气候变化的事实,从实践上寻求利用这类因子进行天气气候预报的方法,以期提高预报准确率。

劳动人民和实际气象工作者早已积累了若干这方面的知识。例如,测量月影长度预报降水的方法,早在我国一些地区试用;近几年来,我国也开展了月球影响天气气候的研究工作。本书作者着重研究了地极移动和地球自转速度变化对气候的影响,并探讨了某些宇宙-地球物理因子在长期和超长期天气预报上的应用。一些水文气象部门,也在利用这一途径进行水文气象预报试验。我们不断收到来信,要求提供这方面的研究成果和资料。为了促进这类工作的进一步开展,有必要系统地从理论上、方法上阐明本问题的各个基本方面,同时提供已经整理和计算的较系统的资料,以满足有关人员的需要。

本书总结和评述了国外这方面的主要研究成果。同时,总结了我们多年来的有关研究工作。书中并附若干我们收集、整理和统计的基本资料,以及我们绘制的一些必需的图幅。为了便于读者理解书中的有关内容,我们在第二章介绍了本专题的数学物理基础知识。针对本书的需要,作者参考近代地球科学、天体物理学、理论力学和位势理论等方面的专著,对若干公式进行适当的变换和推导。

在开展本专题研究的过程中,得到了许多专家的鼓励和帮助。么枕生教授和施永年同志审阅了本书初稿。司有元、吴祥定同志协助完成了本书的部分统计的上机计算工作,李德宜同志清绘了全书用图。我们的工作还得到了北京天文台 223 组的热情赞助。作者谨致谢意。

本专题涉及气象、水文、海洋、天文以及地球物理等多方面学科的知识,而我们的能力、学识都很有限,错误和不妥之处,尚望读者指正。

目 录

前 言	iii
第一章 引论	1
第二章 第四类自然因子理论的数学物理基础知识	6
§1 球坐标	6
§2 引力和引力位势	7
§3 能量守恒定律	10
§4 离心力位势和重力的引力位势	11
§5 球状层和球体的位势	13
§6 球函数	15
§7 物体绕定轴转动和角动量守恒原理	17
§8 地球势的表达式	20
第三章 引潮力与气候	22
§1 潮汐的基本概念	22
§2 潮汐产生的一般原因	22
§3 日月引潮力效应比较和地球上海潮情况	25
§4 引潮力公式推导	28
§5 引潮力位势	30
§6 引潮力的垂直和水平分量	33
§7 静力学潮汐高度的基本方程	36
§8 分解月球和太阳引潮力为谐波项序列	39
§9 海洋和大气中的长周期潮汐“振荡”	40
§10 海洋和大气中的长周期月球半月、月潮汐	42
§11 海洋和大气中的长周期太阳潮汐	43
§12 海洋和大气中的19年月球潮汐	45
§13 海洋和大气中的长周期潮汐现象	49
§14 海洋和大气中长周期潮汐的可能机制	53
第四章 地极运动与气候	64
§1 地球转动瞬时极的运动	64
§2 地极移动的变形力位势和地极移动各分量的表达式	68
§3 地极移动变形力位势和该力各分量的空间变化	75
§4 地极移动变形力及其位势的量级估计	76
§5 海洋状况与地极移动的实例分析	77
§6 气候特点与地极移动的实例分析	84
§7 地极移动影响海洋和大气的可能机制	115
§8 利用地极移动规律,作长期、超长期天气预报的探讨	118
第五章 潮汐型力的多年变化	121
§1 引潮力和章动力的多年变化	121

§ 2	北大西洋海水环流年内和多年变化的静力学指数	129
§ 3	潮汐型力多年变化在我国若干气候要素演变中的作用	132
第六章	地球自转速度变化与气候	134
§ 1	问题的提出	134
§ 2	地球自转速度变化的不均匀性	134
§ 3	地球自转速度变化的计量	137
§ 4	地球自转速度变化的效果	139
§ 5	苏联学者关于地球自转速度变化气候效应的研究	148
§ 6	我们关于地球自转速度变化气候效应的一些分析	150
§ 7	几点看法	163
第七章	太阳活动与气候	165
§ 1	太阳活动影响大气和海洋过程的可能机制	165
§ 2	太阳活动多年变化的频率结构	167
§ 3	太阳活动在北半球气压场和海洋水文气象中的反映	171
第八章	变形力与长期海洋-气象预报	180
§ 1	长期海洋-气象预报变形力方法的基本思路	180
§ 2	北半球气压场变形力背景长期预报	185
§ 3	关于长期气压场预报变形力方法的讨论	194
§ 4	运用变形力概念作短期气压背景预报的问题	208
附录一	一些天文常数	221
附录二	一些地球物理数据	223

第一章 引 论

气候是对人类生活和生产活动影响最大的自然环境之一。气候学的基本任务是，研究地球上各地区气候特点及其演变规律，探讨气候形成和变化的原因，并在此基础上进行气候预测。

气候特点及其演变规律，有很长的研究历史。地球上各地区现代气候的基本状况，已经比较清楚；大陆地区比海洋地区被研究得更多。然而，气候形成的理论研究，则是近几十年才取得了较大的进展，建立了一整套气候形成的理论。气候变化的基本特点的研究，现在愈来愈被重视，正在利用不同手段进行分析推断。至于气候变化理论的研究，则大都带有假说的性质，远远没有达到成熟的阶段。目前，气候预测还没有可靠的方法，这方面的工作尚处于探索阶段。气候预测是建立在气候形成和变化理论基础上的；既然气候变化理论尚未取得长足的进展，也就不可能有完整而准确的气候预测方法。

太阳辐射是气候形成的最基本的因子。地球上气候不同的主要原因，是由于太阳辐射到达量的不同。辐射到达量在地面上的分布，决定于季节、地理纬度和太阳高度角。大气中发生的各种过程，对地面太阳辐射到达量的分布，也有很大的影响；这些过程有吸收、散射、反射和折射等。知道地面上太阳热总量的情况，就可以用数学方法计算，在没有大气环流的情况下地球上温度的分布。这样，就可能将辐射因子从气候形成诸因子中分离出来。

下垫面状况是气候形成的另一个重要因子。下垫面对气候的影响包括两个方面：海陆分布和受热不均匀的方面，以及地形对于大气环流的影响方面。下垫面从热力和动力两方面影响着大气环流和气候，然而，从地球与下垫面的差异规模和影响程度来说，海陆差异是基本的方面。海陆间的差异，甚至在不考虑一般大气环流的情况下，也能引起气流的产生，因而，海陆间的相互作用，不仅发生在海陆边界上，而且也发生在海陆内部。实际上，这种地方性环流是重叠在更强的一般大气环流之上的。下垫面对于辐射平衡及其各成份有很大的影响。首先，由于下垫面不同，会使反射率改变，因而辐射平衡亦随之改变。下垫面对热量的吸收，热量和水分向大气的传送，在相当程度上是以下垫面性质及其物理属性为转移的。它们在大陆和海洋上，在有植被和光秃的地区，在平原和高山，都是各不相同的。由于海陆表面的平滑度不同，辐射性质不同，海陆表面的增温和冷却的特点也不同。于是，造成了海洋和大陆上温度的日变化和年变化规律的不同，以及风速特点的不同。

气候形成的第三个重要因子是大气环流。大气运动的直接原因之一，是赤道和极地的温度差异，从而引起了经向输送；另一个原因是地球自转的偏向力作用，从而引起了纬向输送。大气永远是不平静的。它一直力图恢复其平衡状态，而事实上，旧的平衡还没有巩固，新的不平衡又产生了。这样，大气环流永远不会完结，永远不会维持在一个水平上。大气环流的主要环节是气旋活动。热量和水分的输送都是通过大气环流来实现的。各地区气候特点的不同，都与大气环流条件直接相关；大气环流的演变，必将导致

气候的演变。

在以往的大多数气候学著作中，都将气候形成的自然因子归结为上述三个方面。这些理论，能够解释地球气候的基本特点，但仍然有一些现象得不到解释。例如，南北半球的副热带高压同时加强同时减弱的特点，与两个半球太阳辐射年变程的特点是矛盾的；尤其是，在发现赤道地区长期存在着大面积显著的下沉气流这一事实以后，用热力因子和定常的地转偏向力的理论是解释不了的；而且，气候变化的特点和规律用上述三个基本因子也是很难解释清楚的。根据这三个因子建立起来的长期天气预报和气候预测方法，也没有取得满意的结果。因此，人们在考虑新的气候形成和变化的因子问题。本书所讨论的，正是第四类自然因子——宇宙-地球物理因子——在气候形成和变化中的作用，同时讨论依据这一类因子来开展天气气候预报的问题。这类因子对气候的影响，表现在两个方面：一方面它们直接作用于大气；另一方面它们作用于海洋，使海平面高度、海水温度和洋流发生变化，而这些海洋状况的变化，又影响大气运动的变化。因此，本书中有些篇幅涉及海洋本身状况的变化问题。

值得注意的是，大气环流是气候形成和变化最直接的因子，而大气环流又受许多因子所制约。例如，太阳辐射随纬度的不均匀分布，地球定常自转偏向力，海陆分布和地形特点，这些因子相对地比较稳定，一年又一年地重复出现。然而另外一些大气环流因子，例如，气旋活动，宇宙-地球物理因子综合体中的大多数成员，相对地都有较大的时间变化，各年都不相同。因此，尤其在研究气候变化和长期、超长期天气预报时，这些时间变化大的因子，具有更加重要的意义。这也是我们强调研究第四类自然因子必要性的原因之一。

所谓宇宙因子，指的是月球和太阳的引潮力以及太阳活动。而地球物理因子，指的是地球重力空间变化，地球转动瞬时极的运动和地球自转速度的变化。贯穿本书的一个基本思路是，这些宇宙-地球物理因子的时间或空间变化，引起地球上变形力的产生，从而导致地球上海洋和大气的变形。在这里，我们以地极移动为例，来说明变形力的概念。地球绕瞬时轴旋转与绕惯性轴旋转，其离心力是不同的。而地球转动瞬时极的运动，导致离心力的变化；这种变化的力的系统，称为地极移动变形力。

海洋的月球和太阳潮汐现象，有很长的研究历史；短周期潮汐和长周期潮汐方面，都进行了许多研究。其中以 Doodson, Darwin, Максимов, Rossiter 和 Lisitzin 等人的研究较有成效。而有关大气中的潮汐问题的研究是不多的，而且是有争论的。Максимов, Смирнов, Абрамов, Brier, Fatt, Kviz 以及薛凡炳、任振球、濮培民等人，在这方面的的工作取得了进展。问题在于，大气中月球和太阳潮汐的机制尚不很清楚；但月球和太阳引潮力造成的地球气压场和大气环流的扰动，则为观测事实所证明。这些现象的规律性很清楚，而且不断重复，以致在实际工作中可以加以利用。近代国内外的若干专著和我国群众经验的总结都说明，日月引潮力对气候的影响是不容忽视的。本书着重介绍国外这方面的一些工作。

太阳活动对海洋的影响研究较少；而太阳活动对大气的影晌问题，则一直吸引着许多学者的注意力。例如，Визе, Вительс, Максимов, Рубашев, Эйгенсон, Shell, Wexler, Brier 以及杨鉴初、林学椿等，都曾致力于这方面的研究。太阳活动在不断变化，与此同时，地球磁场特征、大气环流指标、海平面高度、海水环流都发生变化，

相应地，地球上的气候和水文现象也发生变化。这些现象，已为观测资料所证实。但是，这个问题的研究并不顺利，出现了一些矛盾的、不能解释的现象。例如，太阳常数的年际变化不大（不超过1.5%），因而，很难理解，太阳活动引起的地球上海洋和大气现象的机制；尽管出现了微粒辐射理论，但仍然不能说明，为什么微粒辐射的变化会引起海洋和大气环流的显著变化。另外一个矛盾是，太阳活动与气候要素的相关是不稳定的，即某些时段为正相关，而另外的时段则为负相关。关键的问题仍然是，日地关系的机制没有解决。而且，迄今还没有完全弄清太阳活动的频率谱，因而，将一些气候周期与没有证明的太阳活动周期相联系，是不可能得到科学的结果的。本书中介绍的，不是太阳活动影响海洋和大气的全貌，而着重介绍太阳活动影响大气过程的变形力假说及其有关问题。从这个假说的角度出发，能够解释日地关系的许多现象。例如，能够解释不同纬度地区日地关系效应的变化。这种变化是，由于在不同纬度地区，太阳活动引起的变形力不同的缘故；太阳活动引起的地球气压变化，与 $(1 - 3\sin^2\varphi)$ 这个纬度项有关。

Максимов和Усманов都研究过重力场对海平面高度或气压场的作用。地球上重力的不均匀分布，是地球外形结构和地球本身质量不均匀分布的结果。重力的空间变化对海平面高度的影响，可以从海平面高度距平（ ΔH ）与重力的空间距平（ Δg ）之间的关系式中分析出来。 ΔH 值的空间分布轮廓，与大气活动中心的分布轮廓相对应，这反映了气压场背景的重力性质。即重力场的空间距平，导致海洋圈和大气圈结构上的一系列重要特点的产生，导致海洋环流和大气环流一系列重要特点的产生。这是重力变形力造成的气压场背景的不变部分，即它们不随时间而变化。

地球转动瞬时极具有自由和强迫两种运动。地极运动也产生相应的变形力，这种变形力也引起海洋和大气运动的一系列变化。例如，气压的14个月周期，气候要素的6—7年周期和35年左右的周期，都与地极运动的相应周期吻合。计算结果表明，地极运动变形力造成的海平面高度变化和大气压力的变化是很显著的。国内外利用气候要素与地极运动的联系，试作长期、超长期天气预报，也取得了一定的效果。Максимов, Саруханян, Байдал, Spitaler, Shmizu, 松仓秀夫都曾致力于地极运动对海洋或大气影响的研究。本书作者近几年来也对地极移动影响气候演变的事实、机制以及预报应用问题进行了研究。国内外的这些研究，都有显著的进展，引起了人们对这个问题的注意。

地球自转速度变化对海洋和大气的影晌问题，目前的研究还不多。Усманов和Максимов研究过这一问题，取得了若干进展；叶笃正、杨大升研究过地球自转速度变化与大气环流的关系，得到了肯定性结果。本书作者也研究过地球自转速度变化影响气候的若干事实，并进一步讨论了前者影响后者的可能机制。尽管有的学者持不同看法，但气候和海洋状况的变化，同地球自转速度变化的联系，却有不少事实。近几年来，我国的海洋部门和水文部门，也有人注意到这些事实，关于机制问题的讨论也为人们所注意。

在综括上述宇宙-地球物理因素对海洋和大气的影晌的基础上，Максимов提出了变形力“海洋—气象”预报问题，并进行了长、中、短期的气压预报试验，取得了一定的效果。我们针对北半球东部的情况，进行了气压月平均值预报的试验，其结果表明，对1月西伯利亚高压地区的预报效果较好，而7月和其它地区的预报效果较差。这可能与这一类因子的经纬度效应以及季节效应有关，夏季热力因子破坏了外动力形成的气压

场背景。我们认为，总的来说，宇宙-地球物理因子的长周期韵律更突出，而在短期天气过程中热力因子的影响更大；因而，利用这一途径作长期天气预报更为适宜，而作短期天气预报效果可能较差。

我们的星球以海洋覆盖为主，又具有崎岖不平的陆地。它不是孤立地存在的，而存在于整个太阳系中，并有其卫星——月球围绕它运动。地球外形的结构是很复杂的：极轴和赤道轴不相等，极轴较短；地球绕其轴转动，但速度在不断变化，转动轴的方向也在不断变化，即地极在运动；而且不断受到太阳活动的影响，因而形成地球上大气和海洋状况的多年变化。上述每一现象，都对地球起作用，改变着海洋和大气的一般环流。因此，不考虑这些宇宙-地球物理因子的影响，就不可能深入揭露地球上气候形成和气候变化的复杂原因。

有关宇宙-地球物理因子影响海洋和大气的研究，已经构成了海洋学和气象学的专门领域。这个领域的理论，并不排斥现有的气候形成理论，而是它的重要补充。尽管这类因子影响海洋和气候的机制研究尚不成熟，但它们影响海洋和大气的事实则是大量的。我们认为，如果因为机制不很清楚，理论尚不完整和成熟，就否定现象本身的存在，这种态度是错误的。一般科学问题的提出、研究和解决的道路是：先观测到自然现象，然后研究这些现象产生的原因，即所谓物理机制的分析，而且，这种机制分析，是由浅入深、由片面到全面逐步发展的。在没有弄清物理机制以前，也可以利用已知的自然现象为人类排灾造福；但只有明瞭这些现象的物理机制以后，才能更广泛、更深入地将这些自然现象的规律应用于实际。

要全面评价本书所述的这个领域的研究为时尚早。这个问题的理论方面和实践方面，都还处于探索阶段，但这个学科分支包括的内容是很丰富的，深入研究这方面的问题，在理论上和实践上都很有价值。

我们认为，这类研究的理论和方法，具有以下优点：

(1) 这类研究工作，有其理论体系。宇宙-地球物理因素，被看作大气运动的外动力，其基本思路是，这类力的常量部分（重力空间距平场），决定大气压力场的背景，制约大气活动中心；而其变量部分（地极移动、地球自转速度变化、日月潮汐和太阳活动），则使大气活动中心发生强度变化和位置移动，从而说明了大气环流和天气气候形成、变化的原因。因此，这方面的工作，是从成因的角度研究天气气候及其预测的。

(2) 除少数经验系数外，分析和预报过程中的一些物理量，都是通过数学物理推导得出的公式计算出来的。所以说，这类工作是有数学物理基础的，比较客观和定量。例如，气压场预报值，就是通过一系列公式计算出来的。

(3) 这类工作将气象学与天文学、海洋学、地球物理学联系起来，思路比较开阔。

(4) 各种时间尺度的宇宙-地球物理因子的资料，都可以从天文和地球物理观测中得到。这方面已经积累了长序列的历年资料；预报的这类因子的数值，也比气象预报值准确一些，所以便于利用它们来作长、中、短期天气预报和气候预测，而对长时间尺度的天气气候预报的价值可能更大。

看来这类工作存在以下缺点：

(1) 这类因子，只是天气气候演变的外动力，它们只能形成大气压力分布的背景，即气压场的基本特征。实际的气压场，还要受太阳辐射、下垫面状况和大气环流的影响。

响，因此，单纯考虑这些外动力是不够的，应该与其它类型的因子进行综合分析，才能更好地反映实况，作出预报。

(2) 当宇宙-地球物理力最大发展时，它们能明显反映出实际气压场的基本特征，预报效果就好。而当这些力减小时，大气运动主要受其它因素控制，它们就不能明显反映实际气压场，预报效果就差；短期天气预报尤其如此。

(3) 利用这些因素计算气压场的所有公式，都有纬度效应，有的公式还有经度效应（例如地极移动项），所以，在某些地区计算效果较好，而某些地区效果较差。此外，还存在季节效应问题，冬季计算效果较好；夏季由于热力因子的作用加大，计算效果就差。

(4) 利用这类因子计算气压场时，公式中作了一些假定，例如，假定全球都被海洋覆盖，这是不合乎实际情况的。此外，有些公式中运用了经验系数，这些经验系数的取值不一定准确，需要订正。

尽管存在上述缺点，这类工作的理论和实践价值决定了其存在和发展的必要性。而且上述第四个缺点是可以随着研究工作的深入而得到克服的；第一个缺点，也可以通过综合分析各类型因子的办法来弥补。

本课题今后的任务是，继续全面揭露宇宙-地球物理因子在水文、气象和海洋中反映的新事实；同时，更重要的是，加强这类因子影响水文、气象和海洋状况的物理机制的研究；此外，还应该进一步完善运用这条途径预报天气气候的具体方法。为了较快地解决这一任务，必须依靠气象、水文、海洋、天文和地球物理学界的共同努力。

第二章 第四类自然因子理论的数学物理基础知识

§1 球 坐 标

大气运动发生在地球表面上的大气圈里，用球坐标来处理大气运动，常常是比较方便的。在这里，坐标的原点 O 即地心；地球上的正交坐标系，就是经度 λ 和纬度 φ 或余纬 θ 。很明显， $\theta + \varphi = 90^\circ$ 。

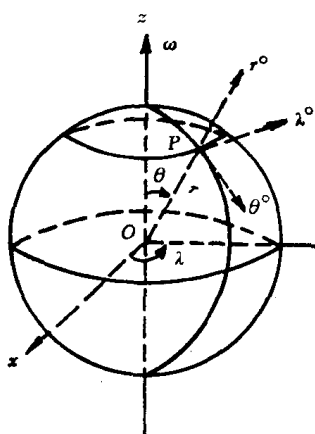


图2.1 球坐标

设在点 $p(\theta, \lambda, r)$ 上，沿子午圈方向的单位向量为 θ° ，向南为正；沿纬圈的单位向量为 λ° ，向东为正；沿向径方向，即垂直方向的单位向量为 r° ，向上为正。 r 即为向径的长度，即 $r = \overline{OP}$

于是，速度 V 沿这三个方向上的投影为 v_θ ， v_λ ， v_r ，有关系式：

$$V = \theta^\circ v_\theta + \lambda^\circ v_\lambda + r^\circ v_r, \quad (2.1)$$

而

$$\left. \begin{aligned} v_\theta &= r \frac{d\theta}{dt} \\ v_\lambda &= r \sin\theta \frac{d\lambda}{dt} \\ v_r &= \frac{dr}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

由此可知，某一个量 F 的个别变化，可用下面的形式表示：

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} [F(\theta(t+dt), \lambda(t+dt), r(t+dt), t+dt) \\ &\quad - F(\theta(t), \lambda(t), r(t), t)] \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{dr}{dt} \frac{\partial}{\partial r} \right) F \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + v_r \frac{\partial}{\partial r} \right) F \end{aligned} \quad (2.3)$$

但是，由于地球的非正球形、地球的自转，以及地表性质的不同，任何地点的纬度，还有地理纬度和地心纬度的差别。地心纬度，乃是该地点至地心的连线与赤道平面的交角，而地理纬度，则是本地法线与赤道平面的交角。根据定义，这种法线跟参考椭球体面垂直。

设地心纬度为 φ' ，地理纬度为 φ 。那么，如图2.2所示，角 $\varphi - \varphi'$ 等于参考椭圆和圆在 P 点的切线之间的夹角。它是三

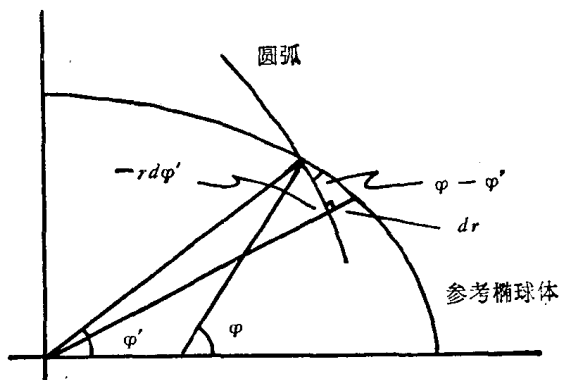


图2.2 地理纬度与地心纬度之差

角形的一个锐角，等于

$$\tan(\varphi - \varphi') = -\frac{dr}{r d\varphi'} \quad (2.4)$$

但是，我们已经知道，对旋转椭圆面的一个椭圆截面，用极坐标表示的方程是

$$r^2 \left[\frac{\cos^2 \varphi'}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi'}{a^2(1-e)^2} \right] = 1 \quad (2.5)$$

这里 a 是长半轴， b 是短半轴， e 是扁度，定义为

$$e = \frac{a-b}{a} \quad (2.6)$$

于是，对 $\frac{dr}{d\varphi'}$ 有

$$2r \frac{dr}{d\varphi'} \left(\frac{\cos^2 \varphi'}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi'}{a^2(1-e)^2} \right) + r^2 \left(\frac{-2\cos\varphi' \sin\varphi'}{a^2} + \frac{2\sin\varphi' \cos\varphi'}{a^2(1-e)^2} \right) = 0 \quad (2.7)$$

或准确到一级微量项，有

$$\frac{dr}{d\varphi'} = -\frac{r^3 2e \sin 2\varphi'}{2a^2(1-e)^2} = -r e \sin 2\varphi' \quad (2.8)$$

因为 $\varphi - \varphi'$ 是一个小角，所以 $\text{tg}(\varphi - \varphi') \approx \varphi - \varphi'$ 。于是，可以得到

$$\varphi - \varphi' = e \sin 2\varphi' \quad (2.9)$$

因为 φ 和 φ' 几乎相等，所以，它们的差准确到一个量级项，也可以用 $e \sin 2\varphi$ 表示，即

$$\varphi - \varphi' = e \sin 2\varphi \quad (2.10)$$

有时候，碰到须用 $\sin^2 \varphi$ 来表示 $\sin^2 \varphi'$ ，例如在某一种重力公式的表示形式中就是这样。因为 $\varphi - \varphi'$ 是小角，利用两角之和的三角公式，只保留到一级微量项，得

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \sin[\varphi' + (\varphi - \varphi')] \\ &= \sin \varphi' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \varphi' \sin(\varphi - \varphi') \\ &= \sin \varphi' + (\varphi - \varphi') \cos \varphi' \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \text{或} \quad \sin^2 \varphi &= \sin^2 \varphi' + 2(\varphi - \varphi') \cos \varphi' \sin \varphi' + (\varphi - \varphi')^2 \cos^2 \varphi' \\ &= \sin^2 \varphi' + e \sin^2 2\varphi' \end{aligned} \quad (2.12)$$

在南北纬 45° 处，地理纬度比地心纬度大 $11'36''$ ；其差值向赤道或两极都减小至零。

坐标系之间可以互相转换。用球坐标系的 θ, λ, r 来表示直角坐标系的 x, y, z ，有关系式

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \lambda \\ y &= r \sin \theta \sin \lambda \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

§2 引力和引力位势

一、引 力

空间两个质点 m 和 m' ，受牛顿万有引力定律支配。它的数学表达式为

$$F = k \frac{mm'}{r^2} \quad (2.14)$$

式中 $k = 6.670 \times 10^{-8}$ 达因·厘米²·克⁻²，为万有引力常数。

这种表达式与坐标系没有关系，可任择坐标系展开。下面作直角坐标系推演。

设 O 为原点， (x, y, z) 和 (x', y', z') 分别为 m 和 m' 两质点的坐标。则当 m' 被假定为单位质点时，有

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \quad (2.15)$$

因此，引力在 x, y, z 方向的分力，分别为

$$\left. \begin{aligned} X &= k \frac{x' - x}{r^3} m \\ Y &= k \frac{y' - y}{r^3} m \\ Z &= k \frac{z' - z}{r^3} m \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

总引力为

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (2.17)$$

该引力对三个坐标轴的余弦，分别为

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{X}{F} \\ \cos \beta &= \frac{Y}{F} \\ \cos \gamma &= \frac{Z}{F} \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

在这里，已经假定物体 m' 是一个单位质点，且两个质点本身的尺寸与其距离相比较，显得非常小。如果物体是由许多质点的总和组成，那么应当分别计算它们的引力，然后求和或积分。

如果以 dm 代表每一个微小体的质量，则引力分别为

$$\left. \begin{aligned} X &= k \int_M \frac{(x' - x) dm}{r^3} = k \int_V \frac{\delta(x' - x)}{r^3} d\tau \\ Y &= k \int_M \frac{(y' - y) dm}{r^3} = k \int_V \frac{\delta(y' - y)}{r^3} d\tau \\ Z &= k \int_M \frac{(z' - z) dm}{r^3} = k \int_V \frac{\delta(z' - z)}{r^3} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

式中 r 仍用公式 (2.15) 来计算。 M 为物体的总质量， τ 为物体的体积，则有 $dm = \delta d\tau$ 。其中 δ 为微分体积 $d\tau$ 的密度。

在 (2.15) 和 (2.19) 式中， (x', y', z') 为被吸引物质点的坐标，是常数，不参与积分。而 (x, y, z) 为吸引物质点的坐标，是参与积分的流动坐标。

二、引力位势

从公式 (2.16) 和 (2.19)，我们可以知道， X, Y, Z 是一个函数对于坐标 x', y', z' 的偏导数。假设这个函数为 U ，则可以证明

$$U(x', y', z') = -\frac{km}{r} \quad \text{或} \quad U(x', y', z') = -\int \frac{k\delta d\tau}{r} \quad (2.20)$$

而

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x'} = \frac{km(x' - x)}{r^3} \\ Y &= \frac{\partial U}{\partial y'} = \frac{km(y' - y)}{r^3} \\ Z &= \frac{\partial U}{\partial z'} = \frac{km(z' - z)}{r^3} \end{aligned} \right\} \quad \text{或} \quad \left. \begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x'} = k \int \frac{\delta(x' - x)}{r^3} d\tau \\ Y &= \frac{\partial U}{\partial y'} = k \int \frac{\delta(y' - y)}{r^3} d\tau \\ Z &= \frac{\partial U}{\partial z'} = k \int \frac{\delta(z' - z)}{r^3} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

我们称 $U(x', y', z')$ 为质点或物体对于 (x', y', z') 点的力函数、势函数，或称为位势。

力函数具有下列特征：

1. 在物体以外空间的任意点 $P(x', y', z')$ 上，它是有限的、连续的和单值的。但在物体以内的点上，它可以趋向无穷大。

2. 如果 P 点向远处移动，它将随距离的增加而减小，但始终保持正值。在无穷远的地方，它趋近于 0。有关系式（图 2.3）

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (lU) = \lim_{r \rightarrow \infty} (rU) = kM \quad (2.22)$$

3. 当 P 点在物体以外， U 对于任意坐标、任何阶导数都是有限的、连续的，并且是单值的。它满足拉普拉斯方程

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z'^2} = 0 \quad (2.23)$$

若 P 点在物体以内，则 U 和它的一阶导数是连续的。二阶导数则满足泊松方程

$$\Delta U = -4\pi k\delta \quad (2.24)$$

δ 为物体在 P 点上的密度。

4. 当 $l \rightarrow \infty$ 时， U 对于任意坐标的偏导数都趋向于 0。但是，

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) = -kM \quad (2.25)$$

对于这些特征，都可以进行数学证明。在这里，我们只对第二个特征，给以简单的推导。

设在物体内选择一点 O 作为坐标原点。 P' 为物体内任一质点，而 P 为物体外的任一被吸引点（图 2.3）。又设 $r = \overline{OP}$ ， $r' = \overline{OP'}$ ，则

$$l^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi \quad (2.26)$$

其中 ψ 为向径 r 和 r' 之间的交角。而 l 满足下列条件

$$r - r' < l < r + r' \quad (2.27)$$

假设 $\bar{r}$ 为从 O 点到物体上最远一点的距离。此时，上述关系仍然成立

$$r - \bar{r} < l < r + \bar{r} \quad (2.28)$$

由此可得

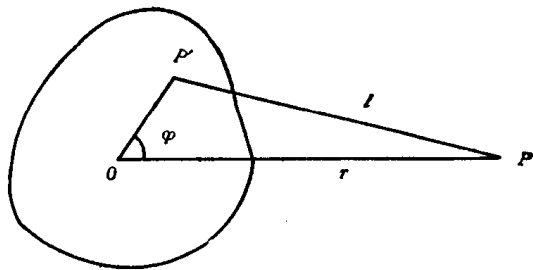


图 2.3 证明力函数在无穷远处一个性质

$$\frac{kr}{r+r_M} \int_M dm < kr \int_M \frac{dm}{l} < \frac{kr}{r+r'} \int_M dm \quad (2.29)$$

当 r 趋近于无穷大时, 两边积分号外的系数都趋近于 k , 而 $\int_M dm = M$, 因此有(2.22)式

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (rU) = kM$$

§3 能量守恒定律

对于相互间按照牛顿引力定律吸引着两个质点的力学系统来说, 能量守恒定律可以写成下面的形式

$$E + U = \text{const} \quad (2.30)$$

式中 E 表示这个系统的动能, U 表示这个系统的位能。设 (x', y', z') 表示质量为 m' 的质点 P' 的坐标; (x, y, z) 表示质量为 m 的质点 P 的坐标。则 P 对于 P' 的位置 (假定 P' 是不动的), 可以从下面的分析进行研究。

动能 E 可以取决于公式

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \quad (2.31)$$

在这里 v 表示 P 点的速度, 而 v_x, v_y, v_z 表示 v 在 x, y, z 坐标轴上的分量。

微分(2.30)和(2.31)式, 得

$$\frac{dU}{dt} = - \frac{dE}{dt} = - m \left(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt} \right) \quad (2.32)$$

以 X, Y, Z 分别表示作用在质点 P 上的力在三个坐标轴上的分量。则因为力等于质量和加速度的乘积, 所以(2.32)式可以写成

$$\frac{dU}{dt} = - (v_x X + v_y Y + v_z Z) \quad (2.33)$$

因为作用在 m 上的只有力 F , 所以可以把分量 X, Y, Z 写成下列几个式子

$$\left. \begin{aligned} X &= -k \frac{mm'}{r^2} \frac{x-x'}{r} \\ Y &= -k \frac{mm'}{r^2} \frac{y-y'}{r} \\ Z &= -k \frac{mm'}{r^2} \frac{z-z'}{r} \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

在式(2.34)中, 负号表示引力。右端中最后的乘数都是线段 r 的方向余弦。这实际上和前一节中公式(2.16)是一致的, 只是在这里 m' 并不再是一个单位的质量了。

考虑到(2.34), 用 $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ 代替 v_x, v_y, v_z , 把式(2.33)改写成

$$dU = kmm' \left(\frac{x-x'}{r^3} dx + \frac{y-y'}{r^3} dy + \frac{z-z'}{r^3} dz \right) \quad (2.35)$$

因为有(2.15)式

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

所以

$$\left. \begin{aligned} \frac{x-x'}{r^3} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \\ \frac{y-y'}{r^3} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) \\ \frac{z-z'}{r^3} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

根据(2.36), 把(2.35)式改写成

$$dU = -kmm' \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) dz \right] \quad (2.37)$$

由此可见, (2.37)式的右端是一个全微分。对此进行积分, 得

$$U = -k \frac{mm'}{r} + \text{const} \quad (2.38)$$

上式表明, 一系统的位能 U , 可以准确地确定到一个常数项。

把(2.33)式改写成下面形式

$$dU = -(Xdx + Ydy + Zdz) \quad (2.39)$$

(2.39)式的右端就是功元 dA ; 也就是说, $dA = Xdx + Ydy + Zdz$ 。因为(2.39)式是一个全微分, 可以进行积分, 所以, 在坐标 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) 两个位置之间就有关系式:

$$A = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_2, y_2, z_2) \quad (2.40)$$

可见, 引力的功与路径无关, 它只决定于路径的起点和终点的位置, 而且等于这两点处的位能之差。

还应该指出, 在引力场内, 位势等于位能的负值。而在电场中, 同符号的电子互相排斥, 位势与位能的符号却一致。如果我们假定力场在无穷远处的位势为0, 则任何一点 P 上的位势就等于将此点由无穷远处移到 P 点时所作的功。

事实上, 从前一节(2.21)式知道, 势函数在任一方向上的导数, 总等于在这方向上的分力。以 ds 表示点 P 在方向 s 上的位移元素, 那就可能把势看做藉引数 x, y, z 为媒介的 s 的复函数。因此

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{ds} \quad (2.41)$$

但是, $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ 正是位移元素 ds 的方向余弦。因而就有

$$\frac{dU}{ds} = X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma = F. \quad (2.42)$$

这里 F 是在 ds 方向上的分力。

§4 离心力位势和重力的引力位势

地球以一定的角速度 ω , 绕地轴转动。假定先不考虑地球自转速度的快慢变化, 则在一个位于点 P 的单位质点上, 除了牛顿引力 F 以外, 作用着的还有离心力 Φ , 它等于

$$\Phi = \omega^2 r \quad (2.43)$$

这里的 r 是所研究的那一点 P 对于地轴的距离。如取地球的转动轴线为 Z 轴, 那末