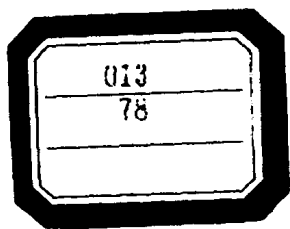


高等数学的基本理论与方法

李远东 刘庆珍 编

重庆大学出版社



1703155

高等数学的基本理论与方法

李远东 刘庆珍 编

J911/43/16



重庆大学出版社



B1316761

内 容 简 介

本书对高等数学的内容作了系统而全面的概述,通过大量例题介绍了解题的思路、解题的一般方法和一些特殊技巧,并且指出了学习中容易出现的一些错误。

本书可作为工科大学高等数学课程的辅导教材,也可作为报考研究生的复习参考资料。

高等数学的基本理论与方法

李远东 刘庆珍 编

责任编辑 韩洁

*

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆通信学院印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:17.25 字数:430千

1995年10月第1版 1995年10月第1次印刷

印数:1—8000

ISBN 7-5624-1061-5/O·121 定价:15.00元

(川)新登字 020 号

序 言

数学是在人类社会的形成与发展过程中,随着计量与分析的需要而逐渐形成的一门重要的基础科学。它对于社会、经济、科学与技术有着巨大的推动作用。因此,在历来的教育活动中,无论理、工、文、管等类专业都将数学放在很重要的地位。建设和出版一批成熟的数学教材、专著、教学参考资料,是一件十分有益的事情。

本书是编写者多年教学经验的结晶。除了系统地阐述高等数学的基本内容,一般分析技巧与解题方法外,还用较多的篇幅介绍编者自身的心得及一些特殊的处理技术,使学习者可从中获取多方面的教益,对提高高等学校本专科生的数学素养与解题能力无疑是有帮助的。

当然,随着高科技的发展与计算机的广泛应用,数学教学的内容与方法必将经历一个漫长而深刻的推陈出新过程。相信不久的将来,运用计算机进行数学教学的辅助推理、符号演算及数值分析,必将最终步入基础数学教学的神圣殿堂之中。但当今时代加深对高等数学等课程的解题训练依然是十分重要的事情。我期待本书成为大学生们的良师益友,期待本书的成功。

杨万年 于重庆大学

一九九五年三月

前 言

高等数学是工科大学的一门重要基础理论课。要学好这门课程,既需要掌握它的基本理论和基本内容,又需要掌握解题的一般方法和一些特殊技巧。本书的编写目的是使读者只需花较少的时间和精力,就能掌握高等数学的基本理论与方法。我们尽力使本书的篇幅不过长,内容少而精,以期达此目的。

全书共分8章。每章由内容概述、例题选解及思考与练习三部分组成,其中前两部分是主要的。在内容概述中对该章的基本概念、定理、公式和法则作了系统的、纲要性的叙述,有的地方作了适当的扩展与引伸,力求结构严谨、纲目清晰,使读者能一目了然。对少量超纲内容在书中都用*号标明。在例题选解中我们精选了覆盖面较广,具有代表性及典型性的一些题目,并作了详细的解答;我们不局限于就题论题,而是分析解题思路,归纳解题规律,有些例题还给出了多种解法或证法,以启迪读者思维。在每章的二、三部分中,我们根据多年的教学经验,指出了初学者容易出现的一些错误。由于本书不是教材,在个别地方我们在逻辑体系上作了一些让步,例如在前面的例题中用到了后面的结论,等等。

本书的主要对象是工科大学本科生以及报考研究生的读者,其中的大部分内容也适用于工科专科生。

本书由渝洲大学李远东和昆明理工大学刘庆珍编写。第一章至第四章由李远东执笔,第五章至第八章由刘庆珍执笔,最后由二人共同统纂全稿。李远东主持了本书的编写工作。

我们衷心感谢本书的主审——重庆大学谢树艺教授。谢先生认真、细致地审阅了原稿,在内容上提出了许多改进意见,在文字上作了不少润色,甚至对例题都逐一作了检查,在此深表谢意。

重庆大学应用数学系主任杨万年教授在百忙中抽出时间为本书写了序言;昆明理工大学陈殿杰教授和渝洲大学李登信教授对本书的编写极为关心,并且提出了不少宝贵意见;重庆有色金属研究所严文民同志绘制了书中的全部插图,我们在此一并致谢。

由于成书时间仓促,又限于编者水平,书中一定存在许多不妥之处,敬请专家及读者们指正。

编 者

1995年3月

013/78

1703155

常用的数学符号与逻辑符号

符号	表示的意义
$\forall$	对任意的、对一切的
$\exists$	存在、找到
$\triangleq$	定义为、记作
$\square$	证毕
$A \Rightarrow B$	由 A 得到 B
$\Leftrightarrow$	等价、充分且必要、当且仅当
N	自然数集
Z	整数集
Q	有理数集
R	实数集
$\ll$	远远小于
$(2n)!!$	$2n$ 的双阶乘, 即 $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n$
$(2n+1)!!$	$2n+1$ 的双阶乘, 即 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)$
$f(x) \in C(x_0)$	$f(x)$ 在点 x_0 连续
$f(x) \in D(x_0)$	$f(x)$ 在点 x_0 可导
$f(x) \in C[a, b]$	$f(x)$ 属于在 $[a, b]$ 上连续的函数类
$f(x) \in D(a, b)$	$f(x)$ 属于在 (a, b) 内具有导数的函数类
$f(x) \in D^n(a, b)$	$f(x)$ 属于在 (a, b) 内具有 n 阶导数的函数类
$f(x) \in C^1(a, b)$	$f(x)$ 属于在 (a, b) 内具有一阶连续导数的函数类
$f(x) \in C^n(a, b)$	$f(x)$ 属于在 (a, b) 内具有 n 阶连续导数的函数类



B1316761

目 录

第一章 函数、极限与连续

I	内容概述	(1)
	§1 函数	(1)
	§2 函数的极限	(3)
	§3 连续函数及其性质	(6)
II	例题选解	(8)
III	思考与练习	(21)

第二章 单元函数微分学

I	内容概述	(23)
	§1 导数与微分	(23)
	§2 微分法的公式和法则	(26)
	§3 高阶导数	(28)
	§4 中值定理及罗必塔法则	(29)
	§5 函数性态的研究	(31)
	§6 曲率	(34)
II	例题选解	(35)
III	思考与练习	(63)

第三章 单元函数积分学

I	内容概述	(66)
	§1 不定积分的概念和性质	(66)
	§2 不定积分的换元积分法与分部积分法	(68)
	§3 几种特殊类型函数的积分	(70)
	§4 定积分的概念与性质	(73)
	§5 牛顿—莱布尼兹公式	(75)
	§6 定积分的换元积分法与分部积分法	(75)
	§7 广义积分	(76)
	§8 定积分的应用	(78)
II	例题选解	(81)

III	思考与练习	(109)
-----	-------	-------

第四章 向量代数与空间解析几何

I	内容概述	(112)
	§ 1 向量概念	(112)
	§ 2 向量的线性运算	(112)
	§ 3 向量的坐标	(114)
	§ 4 向量的数量积、向量积、混合积	(115)
	§ 5 平面及直线方程	(117)
	§ 6 旋转曲面与柱面	(120)
	§ 7 二次曲面	(121)
	§ 8 空间曲线及其投影	(123)
II	例题选解	(124)
III	思考与练习	(131)

第五章 多元函数微分学

I	内容概述	(133)
	§ 1 多元函数、极限与连续	(133)
	§ 2 多元函数微分法	(135)
	§ 3 多元函数微分法的应用	(141)
II	例题选解	(145)
III	思考与练习	(160)

第六章 多元函数积分学

I	内容概述	(163)
	§ 1 重积分	(163)
	§ 2 第一类曲线积分与第一类曲面积分	(170)
	§ 3 第二类曲线积分与第二类曲面积分	(172)
	§ 4 格林公式与高斯公式	(178)
	附录 各类积分的总结	(179)
II	例题选解	(180)
III	思考与练习	(200)

第七章 微分方程

I	内容概述	(203)
	§ 1 微分方程的基本概念	(203)
	§ 2 常见的一阶微分方程及其解法	(204)
	§ 3 可降阶的微分方程	(206)
	§ 4 线性微分方程的解的结构	(207)

§ 5 二阶常系数线性微分方程的解法	(208)
Ⅱ 例题选解	(211)
Ⅲ 思考与练习	(229)

第八章 无穷级数

I 内容概述	(231)
§ 1 常数项级数	(231)
§ 2 幂级数	(236)
§ 3 函数展开为幂级数	(239)
§ 4 付立叶级数	(241)
Ⅱ 例题选解	(243)
Ⅲ 思考与练习	(259)
“思考与练习”中部分题的答案	(262)
参考文献	(267)

第一章 函数、极限与连续

I 内容概述

§1 函 数

一、函数概念

函数定义 设有两个变量 x 和 y , x 的变域是数集 D 。若存在法则 f , 使每一 $x \in D$, y 都有确定的值与之对应, 则称 y 为 x 的**函数**, 记作 $y=f(x)$ 。 x 叫做**自变量**, y 叫做**因变量**, D 叫做函数的**定义域**。当 x 取遍 D 的各个值时, y 的对应值所构成的集合 W 叫做函数的**值域**, 即

$$W = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

若对任一 $x \in D$, 因变量 y 的对应值都只有一个, 则称 $f(x)$ 为**单值函数**; 否则称 $f(x)$ 为**多值函数**。在微积分学中, 我们研究的函数都是单值函数。

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时, 与 x_0 对应的 y 的数值叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**, 记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$ 。

函数关系的两个要素是定义域及对应法则。一个函数随定义域及对应法则的给定而完全确定; 两个函数当且仅当它们的定义域及对应法则都相同时它们是相同的函数。

如果在定义域的不同部分对应法则用不同的式子表示, 这样的函数叫做**分段函数**。例如记号 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数 (即 x 的整数部分), 当 $k \leq x < k+1$ 时, $[x]=k (k \in \mathbb{Z})$, 它是分段函数, 叫做**取整函数**, 其图形叫做**阶梯曲线**。

复合函数 设 y 是 u 的函数: $y=f(u)$, 其定义域为 D_u ; 而 u 又是 x 的函数: $u=\varphi(x)$, 其定义域为 D_x 。如果函数 $u=\varphi(x)$ 的值域 W_u 与 D_u 有公共部分, 即 $D_u \cap W_u \neq \emptyset$, 那末 y 通过 u 的联系也是 x 的函数, 叫做由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数, 简称**复合函数**, 记作 $y=f[\varphi(x)]$, u 叫做**中间变量**。复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域为数集 $D=\{x | x \in D_x \text{ 且使 } \varphi(x) \in D_u \cap W_u\}$ 。若 $D_u \cap W_u = \emptyset$, 则 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 不能复合。

复合函数的中间变量可以不止一个。把一个较复杂的函数按复合关系拆成若干个简单函数具有重要的意义; 为此, 必须正确分析复合函数的构成, 分清层次, 由外到内, 逐层分解。例如 $y=\sin^2 x$ 可分解为 $y=u^2, u=\sin x$; $y=\sin x^2$ 可分解为 $y=\sin u, u=x^2$; $y=2^{\sin^2 \frac{1}{x}}$ 可分解为 $y=2^v, u=v^2, v=\sin w, w=\frac{1}{x}$, 其中 u, v, w 均为中间变量。

反函数 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W 。那么, 对每一 $y \in W$, 均有确定的 x

$\in D$, 使 $f(x)=y$ 。于是 x 成为 y 的函数: $x=\varphi(y)$, 它的定义域为 W , 值域为 D , 这个函数叫做 $y=f(x)$ 的**反函数**。相应于反函数 $x=\varphi(y)$, 函数 $y=f(x)$ 叫做**直接函数**。习惯上常将反函数 $x=\varphi(y)$ 改记为 $y=\varphi(x)$ 。

在同一坐标平面上, $y=f(x)$ 的图形与反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称。

反函数 $y=\varphi(x)$ 可能是多值函数。在这种情形, 我们可以对 y 的取值范围作适当限制, 使之成为单值函数。例如反正弦函数 $y=\text{Arcsin}x$ 是多值函数, 若限制 $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, 就得到一个单值函数, 叫做反正弦函数 $y=\text{Arcsin}x$ 的**主值**, 记为 $y=\arcsinx$ 。

一般地, 如果直接函数 $y=f(x)$ 是单值单调函数, 则它的反函数 $x=\varphi(y)$ 也是单值单调函数。

隐函数 若因变量 y 是用含自变量 x 的数学式子来直接表示的, 则称 y 是 x 的**显函数**; 若 y 与 x 的函数关系隐含于一个二元方程 $F(x, y)=0$ 中, 则称 y 为该方程所确定的**隐函数**。

如果能从方程 $F(x, y)=0$ 中解出 y 来, 则隐函数转化为显函数, 这叫做**隐函数的显化**。但是在很多情形下, 显化一个隐函数非常困难, 甚至不可能。

参数式函数 若参数方程组

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (1-1)$$

通过参数 t 作为媒介, 确定 y 为 x 的函数, 则称此函数为由方程组 (1-1) 所确定的**参数式函数**。

若能由方程组 (1-1) 消去 t 得到二元方程 $F(x, y)=0$, 则参数式函数转化为隐函数。

二、函数的几种特性

有界性 $f(x)$ 在区间 I 上有界: $\exists$ 常数 $M > 0, \forall x \in I \Rightarrow |f(x)| \leq M$ 。

单调性 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加 (或单调减少): $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$)。

以下, 函数的定义域用 D 表示。

奇偶性 **奇函数**: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D, f(-x) = -f(x)$; **偶函数**: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D, f(-x) = f(x)$ 。

奇函数的图形关于原点对称; 偶函数的图形关于 y 轴对称。

周期性 $\forall x \in D \Rightarrow x \pm T \in D, f(x+T) = f(x)$ (T 为非零常数)。

在具有这种性质的 T 中, 最小的那个正数 T_0 (如果存在的话) 叫做周期函数 $f(x)$ 的**周期**。

周期函数在 D 内每个长度为 T 的区间 $(a+kT, a+(k+1)T)$ ($k \in Z$) 上, 其图形具有相同的形状。

三、初等函数

下列 5 种函数称为**基本初等函数**。

幂函数 $y=x^\mu$ (μ 为常数)。幂函数的定义域可能因数值 μ 的不同而异, 但不论 μ 为何值, 幂函数 $y=x^\mu$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内总有定义。

指数函数 $y=a^x$ (a 为常数, $a > 0, a \neq 1$)。工程技术中常用的指数函数是 $y=e^x$, 这里 e 是一个无理数, $e=2.71828\cdots$ 。

对数函数 $y = \log_a x$ (a 是常数, $a > 0, a \neq 1$), 它是指数函数 $y = a^x$ 的反函数。特别地, $y = \log_e x \stackrel{\Delta}{=} \ln x$, 叫做**自然对数函数**。

三角函数 共有 6 个: $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x, y = \sec x, y = \csc x$ 。

反三角函数 常用的有: $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$ 。

我们必须熟记以上基本初等函数的性质及其图形。

初等函数 用一个公式来表示的函数, 而且这个公式是由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的, 叫做**初等函数**。

§ 2 函数的极限

一、极限概念

函数的极限是描述函数的变化趋势的, 而函数的变化趋势又与自变量的变化过程密切相关。

自变量 x 任意接近于有限值 x_0 的过程读作 x 趋于 x_0 , 记作 $x \rightarrow x_0$; 自变量 x 的绝对值无限增大的过程读作 x 趋于无穷大, 记作 $x \rightarrow \infty$ 。

若在自变量 x 的某一变化过程中, 对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于常数 A , 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 在这一变化过程中的极限。

极限定义 如果 $\forall \epsilon > 0$ (不论它多么小), 都存在点 a (a 为有限或无穷) 的一个去心邻域 $U(\hat{a})$, 使 $x \in U(\hat{a}) \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时的**极限**, 记作

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow a)$$

当 a 为有限数 x_0 时, x_0 的去心 δ 邻域 $U(\hat{x}_0, \delta) \stackrel{\Delta}{=} \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 即 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$; 当 $a = \infty$ 时, $U(\hat{\infty}) \stackrel{\Delta}{=} \{x | |x| > X\}$ 即 $(-\infty, -X) \cup (X, +\infty)$, 这里 X 为一正数。因此,

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的精确定义是: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使 $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$ 。

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的精确定义是: $\forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 使 $|x| > X \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$ 。

单侧极限 x 从小于 (或大于) 有限值 x_0 的一侧趋于 x_0 的过程记作 $x \rightarrow x_0 - 0$ (或 $x \rightarrow x_0 + 0$), 这时函数 $f(x)$ 的极限 A 称为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的**左 (或右) 极限**, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$), 也可记作 $f(x_0 - 0) = A$ (或 $f(x_0 + 0) = A$)。

$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$ 的精确定义是: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使 $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$ 。

x 取负值而绝对值无限增大的过程记作 $x \rightarrow -\infty$; x 取正值而无限增大的过程记作 $x \rightarrow +\infty$ 。 $x \rightarrow -\infty$ 或 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x)$ 的极限也是单侧极限。 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 的精确定义是: $\forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 使 $x < -X \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$ 。

类似地, 可以给出 $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$ 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 的精确定义。

特别地, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 若 x 只取正整数 n , 则对应的函数值 $f(n) \stackrel{\Delta}{=} y_n$ 的极限 A 就是数列

$\{y_n\}$ 的极限,记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$ 。它的精确定义是: $\forall \epsilon > 0, \exists N (N \text{ 为正整数}), \text{使 } n > N \Rightarrow |y_n - A| < \epsilon$ 。这时我们也说数列 $\{y_n\}$ 收敛于 A ; 若数列没有极限,就说它是发散的。

二、极限的性质和运算法则

定理 1(唯一性) 若数列存在极限,则极限必是唯一的。

定理 2(有界性) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ 存在,则 $\exists \delta > 0$, 使 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内有界。

定理 3(保号性) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么必 $\exists X > 0$, 使 $|x| > X$ 时, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$)。

定理 4 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 则 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$)。

定理 5(保序性) 设当 x 充分大时有 $f(x) \leq g(x)$, 并设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = B$, 则 $A \leq B$ 。

注 1 上面这 5 个定理我们都是对自变量的某一特定的变化过程来说的, 把条件或结论作适当变动后, 它们对自变量的其它变化过程也成立。

注 2 在定理 4 (或定理 5) 中, 若把条件 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq g(x)$) 中的等号去掉, 则结论仍应为 $A > 0$ (或 $A < B$)。例如当 $x > 0$ 时, $\frac{1}{x} > 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ 。

定理 6(极限的四则运算法则) 设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则

1° $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$;

2° $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$;

3° $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \quad (\lim g(x) = B \neq 0)$ 。

推论 1 设 $\lim f(x)$ 存在, c 为常数, 则

$$\lim [cf(x)] = c \lim f(x)$$

推论 2 设 $\lim f(x)$ 存在, $n \in N$, 则

$$\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

三、极限存在的判别法与两个重要极限

极限存在的判别法

定理 7 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$

定理 7' $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$

由定理 7 与定理 7' 可知: 若两个单侧极限中有一个不存在或两个单侧极限都存在但是不相等, 则极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在。

定理 8 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A (a \text{ 为有限或无穷}) \iff \text{对任何收敛于 } a \text{ 的数列 } \{x_n\} (x_n \neq a), \text{ 都有 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 。

由定理 8 可知: 若存在收敛于 a 的数列 $\{x_n\} (x_n \neq a)$, 使数列 $\{f(x_n)\}$ 发散, 或存在两个收敛于 a 的数列 $\{y_n\}, \{z_n\} (y_n, z_n \neq a)$, 使数列 $\{f(y_n)\}$ 与 $\{f(z_n)\}$ 具有不同的极限, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 不存在。

定理 9(夹逼定理) 设数列 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ 、 $\{z_n\}$ 满足条件:

$$1^\circ y_n \leq x_n \leq z_n$$

$$2^\circ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$$

则数列 $\{x_n\}$ 的极限存在,且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 。

定理 10 单调有界数列必有极限。

对于函数极限,也有相应的夹逼定理和单调有界极限存在准则。

两个重要极限

$$1^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \text{ 一般形式:}$$

$$\lim \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1 \quad (\alpha(x) \neq 0, \lim \alpha(x) = 0)$$

$$2^\circ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \text{ 一般形式:}$$

$$\lim [1 + \alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e \quad (\alpha(x) \neq 0, \lim \alpha(x) = 0)$$

四、无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量

若在自变量 x 的某一变化过程中,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于零,即 $\lim f(x) = 0$,则称函数 $f(x)$ 在这一变化过程中为**无穷小量**(简称为**无穷小**)。

把函数极限定义中的常数 A 换为 0 ,即得无穷小量的精确定义。

无穷小量的运算性质

1° 有限个无穷小的和是无穷小;

2° 有界函数与无穷小的乘积是无穷小;

3° 常数与无穷小的乘积是无穷小;

4° 有限个无穷小的乘积是无穷小。

函数极限与无穷小的关系

$$\lim f(x) = A \iff f(x) = A + \alpha(x) \quad (\lim \alpha(x) = 0)$$

2. 无穷大量

如果在自变量 x 的某一变化过程中,对应的函数值 $f(x)$ 的绝对值无限增大,则称函数 $f(x)$ 在这一变化过程中为**无穷大量**(简称为**无穷大**),记作

$$\lim f(x) = \infty$$

注意 上面的记法或称 $f(x)$ 的极限为 ∞ ,这只是为了简便,实际上,无穷大量不趋于任何常数,因此无穷大量没有极限。

把函数极限定义中的 ϵ 换成 M (M 是一个预先给定的无论多么大的正数),并将不等式 $|f(x) - A| < \epsilon$ 换成 $|f(x)| > M$,即得在给定的变化过程中无穷大量的精确定义。例如 $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \infty$ 的定义是: $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使 $x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x)| > M$ 。

把无穷大量定义中的不等式 $|f(x)| > M$ 换成 $f(x) > M$ (或 $f(x) < -M$),就得到正无穷大(或负无穷大)的精确定义。

无穷大与无穷小的关系 在 x 的同一变化过程中,如果 $f(x)$ 是一个无穷小,且 $f(x) \neq 0$,

则 $\frac{1}{f(x)}$ 是一个无穷大;反之,如果 $f(x)$ 是一个无穷大,则 $\frac{1}{f(x)}$ 是一个无穷小。

注意 函数的变化趋势与自变量的变化过程密切相关,因此我们说函数 $f(x)$ 具有极限或为无穷小或无穷大,一定要指明自变量的变化过程。

五、无穷小的比较

设 α 与 β 是同一变化过程中的两个无穷小:

1° 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, 则称 α 是比 β 高阶的无穷小,或称 β 是比 α 低阶的无穷小,记作 $\alpha = o(\beta)$ 。

2° 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = c$ (c 为非零常数), 则称 α 与 β 是同阶无穷小。特别地,若 $c=1$, 则称 α 与 β 是等价无穷小,记作 $\alpha \sim \beta$ 。

常用的等价无穷小有: 设 $\lim \alpha(x) = 0$ ($\alpha(x) \neq 0$), 则 $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$; $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$; $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$; $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$; $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$; $\ln[1 + \alpha(x)] \sim \alpha(x)$; $\sqrt[n]{1 + \alpha(x)} \sim \frac{1}{n} \alpha(x)$;

$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{1}{2} [\alpha(x)]^2$ 。

对于给定的无穷小 β , 若存在无穷小 α , 使 $\beta - \alpha = o(\alpha)$ 或 $\beta = \alpha + o(\alpha)$, 则称 α 是无穷小 β 的主部。

等价无穷小的性质

定理 11 设 $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ 均为无穷小, $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta', u, v$ 为函数, 且 $\lim \frac{\alpha' u}{\beta' v}$ 存在, 则

$$\lim \frac{\alpha u}{\beta v} = \lim \frac{\alpha' u}{\beta' v}$$

定理指出, 在计算某式的极限时, 我们可以将该式的分子或分母中的无穷小因子用与它等价的无穷小来代替。

定理 12 设 α 与 β 是同一变化过程中的两个无穷小, 则

$$\alpha \sim \beta \iff \beta - \alpha = o(\alpha) \text{ 或 } \beta = \alpha + o(\alpha)$$

即两个无穷小等价的充要条件是其中一无穷小是另一无穷小的主部。

由定理 11、12 可知: 若 α, β 是无穷小, 且 $\lim \frac{\alpha}{\beta}$ 存在, 则

$$\lim \frac{\alpha + o(\alpha)}{\beta + o(\beta)} = \lim \frac{\alpha}{\beta}$$

因此, 在求两个无穷小之商的极限时, 这两个无穷小可分别用其主部来代替, 这个结论在求极限时很有用。

§ 3 连续函数及其性质

一、函数的连续性与间断点

连续性定义 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义。若下列条件之一被满足, 则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续:

$$1^\circ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

$$2^\circ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$3^\circ \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

当 $f(x_0-0) = f(x_0)$ 时, 称 $f(x)$ 在点 x_0 **左连续**; 当 $f(x_0+0) = f(x_0)$ 时, 称 $f(x)$ 在点 x_0 **右连续**。显然,

$f(x)$ 在点 x_0 连续 $\iff f(x)$ 在点 x_0 同时左、右连续。

若 $f(x)$ 在区间 I 上每一点都连续, 则称 $f(x)$ **在区间 I 上连续**。若 I 包括端点, 那末函数在右端点连续是指左连续, 在左端点连续是指右连续。

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续, 但在点 x_0 的某一去心邻域内有定义, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的**间断点**。

若在间断点 x_0 处, 两个单侧极限 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$ 都存在, 则称 x_0 为**第一类间断点**; 除第一类间断点之外的一切间断点统称为**第二类间断点**。

当 x_0 为第一类间断点时, 如果 $f(x_0-0) = f(x_0+0)$ (即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在), 我们总可以改变或补充 $f(x)$ 在 x_0 处的定义, 使等式 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 成立, 从而使 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 所以这样的间断点叫做**可去间断点**。若 $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$, 称 x_0 为**跳跃间断点**。

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 称 x_0 为**无穷间断点**; 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 的不存在是由于当 $x \rightarrow x_0$ 时函数值 $f(x)$ 来回振荡所致, 则称 x_0 为**振荡间断点**。这两种间断点都是第二类间断点。

二、连续函数的运算和初等函数的连续性

区间 I 上的连续函数的和、差、积、商(分母不为零)在区间 I 上连续; 连续函数的复合函数在其定义区间内连续; 在区间 I 上单值、单调的连续函数的反函数在对应区间上也是单值、单调的连续函数。

一切初等函数在其定义区间内都是连续的。这里所说的定义区间是指包含在函数的定义域内的区间。因此初等函数的连续区间就是它的定义区间; 在通常情形下, 初等函数的间断点是它的相邻两个定义区间的分界点。

若 x_0 是初等函数 $f(x)$ 的定义区间内的点, 则 $f(x) \in C(x_0)$, 因此 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 从而将求初等函数极限值的问题归结为求函数值的问题。

三、闭区间上连续函数的性质

定理 1(最值定理) 在闭区间上连续的函数必有最大值和最小值。

定理 2(有界性定理) 在闭区间上连续的函数在该区间上必有界。

定理 3(介值定理) $f(x) \in C[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$, μ 是 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一值 $\implies \exists \xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = \mu$

推论(零点定理) $f(x) \in C[a, b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists \xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$

换句话说, 在推论的条件下, 方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内必有根。

II 例题选解

例1 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{\ln(3-x)} + \sqrt{49-x^2} \quad (2) y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$$

求函数的定义域一般分两种情形:

1° 与实际问题的函数,其定义域应根据实际条件许可的范围来确定。

2° 用一个数学公式表示的函数,其定义域是使该式在实数域内有意义的自变量值所组成的集合。

本例属于情形 2°。

解 (1) 要使公式有意义, x 须满足不等式组

$$\begin{cases} 3-x > 0 \\ \ln(3-x) \neq 0 \\ 49-x^2 \geq 0 \end{cases}$$

解得

$$-7 \leq x < 2 \text{ 或 } 2 < x < 3$$

故函数的定义域为 $[-7, 2) \cup (2, 3)$ 。

(2) 解不等式组

$$\begin{cases} 1+x \neq 0 & (1-2) \\ \left| \frac{2x}{1+x} \right| \leq 1 & (1-3) \end{cases}$$

由 (1-2), 不等式 (1-3) 等价于 $|2x| \leq |1+x|$ 即 $4x^2 \leq (1+x)^2$ 或 $3x^2 - 2x - 1 \leq 0$, 解得 $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ 。不等式 (1-2) 的解为 $x \neq -1$, 故不等式组的解为 $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ 。函数的定义域为 $[-\frac{1}{3}, 1]$ 。

例2 (1) 设 $f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}$, 求 $f(x) + f\left(\frac{2}{x}\right)$ 的定义域;

(2) 设 $f(x) = (x-1)(7-x)$, $0 \leq x \leq 8$, 求 $f[f(x)]$ 的定义域。

这是求复合函数定义域的问题。一般地, 复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域应是 x 的这样一个集合 $D: \forall x \in D$, 不仅要使 $u = \varphi(x)$ 有意义, 而且由它所确定的 u 还要使 $f(u)$ 有意义。

解 (1) 先求 $f(x)$ 的定义域 $D_1: \frac{2+x}{2-x} > 0 \iff (2+x)(2-x) > 0 \iff |x| < 2$ 。故 $D_1 = (-2, 2)$ 。

再求 $f\left(\frac{2}{x}\right)$ 的定义域 D_2 :

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{2}{x} \in D_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ \left| \frac{2}{x} \right| < 2 \end{cases} \iff |x| > 1 \quad D_2 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

因此 $f(x) + f\left(\frac{2}{x}\right)$ 的定义域 $D = D_1 \cap D_2 = (-2, -1) \cup (1, 2)$

(2) 求 $f[f(x)]$ 的定义域 D , 须解不等式组