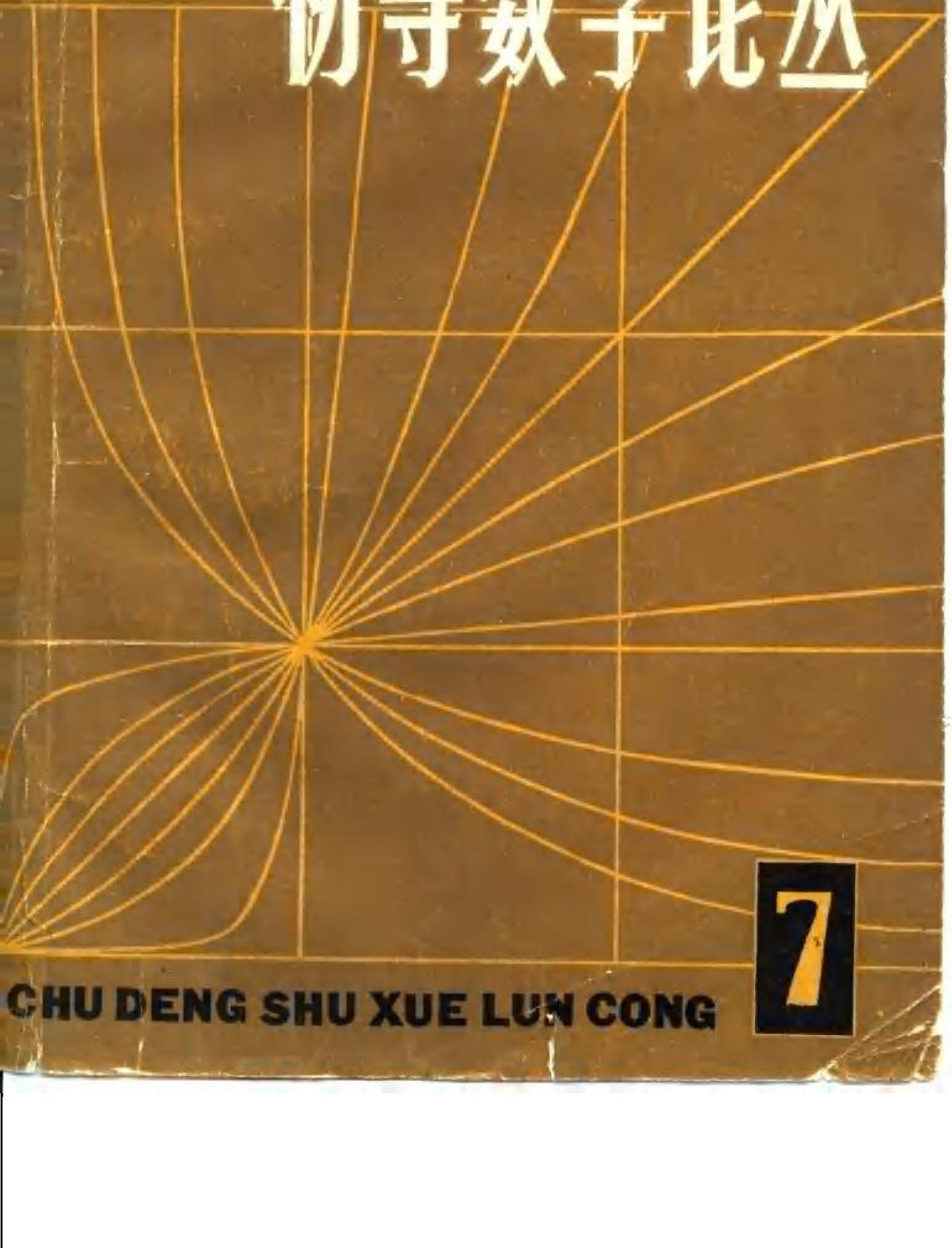
初等数学论丛



CHU DENG SHU XUE LUN CONG

7

初等数学论丛

（第7辑）

上海教育出版社

初等数学论丛

（第7辑）

本社编

上海教育出版社出版

（上海永福路123号）

新华书店上海发行所发行　上海崇明印刷厂印刷

开本787×1092 1/32　印张8.5　字数75,000

1983年12月第1版　1983年12月第1次印刷

印数1—7,400本

统一书号：7150·3031　定价：0.30元

目　录

计算自然数的方幂和的一种方法

中国科学院数学研究所　陈景润

众所周知，对于自然数列的前 n 项的和，有公式

$$1+2+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

那么，对于自然数的二次方幂的和、三次方幂的和，是否也有简单的计算公式呢？公元前二百多年时，希腊的著名科学家阿基米得 (Archimedes) 就已经求得了这两个和分别是

$$1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

$$1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3=(1+2+\cdots\cdots+n)^2,$$

只是他所采用的证明方法比较复杂．进一步，是否有自然数的四次方幂的和的公式？这是古希腊人无能为力的，直到十一世纪时，才由阿拉伯人所得到．

进一步，自然数的五次方幂和，六次方幂的和，更一般地，自然数的 m 次方幂的和 $\sum_{k=1}^{n}k^m=1^m+2^m+3^m+\cdots\cdots+n^m$（这里 m 是自然数），是否也有简单的计算公式呢？

可以想象，当 m 较大时，这个问题是够复杂的．经过许多数学家的努力，已找到了好些各不相同的解决办法，以下将介绍的可算是最初等、最简单的一种方法．

对于 $\sum_{k=1}^{n}k^m$，由于 $n=1$ 时 $\sum_{k=1}^{1}k^m=1$，当 $n=2$ 时 $\sum_{k=1}^{2}k^m=$

$1+2^m$，我们不妨假定 $n\geqslant 3$．另外，由于 $m=1$ 的结论已至为明显，下面还假定 $m\geqslant 2$．

显然，成立下面的等式：

$$(n+1)^{m+1}-1=\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{m+1}-\sum_{k=1}^{n}k^{m+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^{m+1}-k^{m+1}\right].$$

上式括号中的 $(k+1)^{m+1}$ 按牛顿二项式展开，即得

$$\begin{aligned}(n+1)^{m+1}-1&=\sum_{k=1}^{n}(k^{m+1}+C_{m+1}^{1}k^{m}+C_{m+1}^{2}k^{m-1}\\&\quad+\cdots\cdots+C_{m+1}^{m}k+1-k^{m+1})\\&=C_{m+1}^{1}\sum_{k=1}^{n}k^{m}+C_{m+1}^{2}\sum_{k=1}^{n}k^{m-1}\\&\quad+\cdots\cdots+C_{m+1}^{m}\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1,\end{aligned}\qquad(2)$$

上式中，C_i^j 为组合数．

当 $m=2$ 时，(2) 式即为

$$(n+1)^{3}-1=C_{3}^{1}\sum_{k=1}^{n}k^{2}+C_{3}^{2}\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=3\sum_{k=1}^{n}k^{2}+3\sum_{k=1}^{n}k+n.$$

将 (1) 式的结论代入，即得

$$3\sum_{k=1}^{n}k^{2}=(n+1)^{3}-1-n-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=(n+1)\left[(n+1)^{2}-1-\frac{3}{2}n\right]$$
$$=n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

这就得到了自然数的二次方幂的和的公式

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \tag{3}$$

当 $m=3$ 时，(2) 式即为

$$\begin{aligned}(n+1)^4-1&=C_4^1\sum_{k=1}^{n}k^3+C_4^2\sum_{k=1}^{n}k^2+C_4^3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\&=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+n.\end{aligned}$$

将(1)式和(3)式的结论代入，即得

$$\begin{aligned}4\sum_{k=1}^{n}k^3&=(n+1)^4-1-n-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\&\quad-6\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=(n+1)[(n+1)^3-1-2n-n(2n+1)]\\&=(n+1)[(n+1)^3-1-n-n(2n+2)]\\&=(n+1)^2[(n+1)^2-1-2n]\\&=n^2(n+1)^2.\end{aligned}$$

这就得到了自然数的三次方幂的和的公式

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2. \tag{4}$$

当 $m=4$ 时，(2) 式即为

$$\begin{aligned}(n+1)^5-1&=C_5^1\sum_{k=1}^{n}k^4+C_5^2\sum_{k=1}^{n}k^3+C_5^3\sum_{k=1}^{n}k^2\\&\quad+C_5^4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\&=5\sum_{k=1}^{n}k^4+10\sum_{k=1}^{n}k^3+10\sum_{k=1}^{n}k^2\\&\quad+5\sum_{k=1}^{n}k+n.\end{aligned}$$

将 (1) 式、(3) 式和 (4) 式的结论代入，即得

$$5\sum_{k=1}^{n}k^4=(n+1)^5-1-n-5\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$-10\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$-10\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$=(n+1)\Big[(n+1)^4-1-\frac{5}{2}n$$

$$-\frac{5}{3}n(2n+1)-\frac{5}{2}n^2(n+1)\Big]$$

$$=\frac{n(n+1)}{6}[6(n^3+4n^2+6n+4)$$

$$-10(2n+1)-15(n^2+n+1)]$$

$$=\frac{n(n+1)}{6}[6n^3+3n^2+6n^2+3n$$

$$+18n+9-10(2n+1)]$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

这就得到了自然数的四次方幂的和的公式

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1). \qquad (5)$$

当 $m=5$ 时，(2) 式即为

$$(n+1)^6-1=C_6^1\sum_{k=1}^{n}k^5+C_6^2\sum_{k=1}^{n}k^4+C_6^3\sum_{k=1}^{n}k^3$$

$$+C_6^4\sum_{k=1}^{n}k^2+C_6^5\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=6\sum_{k=1}^{n}k^5+15\sum_{k=1}^{n}k^4+20\sum_{k=1}^{n}k^3$$

$$+15\sum_{k=1}^{n}k^2+6\sum_{k=1}^{n}k+n.$$

将 (1) 式、(3) 式、(4) 式和 (5) 式的结论代入，即得

$$6\sum_{k=1}^{n}k^5=(n+1)\Big[(n+1)^5-1-3n-\frac{5}{2}n(2n+1)$$

$$-5n^2(n+1)-\frac{1}{2}n(2n+1)(3n^2+3n-1)\Big]$$

$$=n(n+1)\Big(n^4+5n^3+10n^2+10n+5-3-5n$$

$$-\frac{5}{2}-5n^2-5n-3n^3-\frac{9}{2}n^2-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\Big)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n^4+4n^3+n^2-n)$$

$$=\frac{1}{2}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1).$$

这就得到了自然数的五次方幂的和的公式

$$\sum_{k=1}^{n} k^5=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1). \tag{6}$$

循此，可依次求得

$$\sum_{k=1}^{n} k^6=\frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1), \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^7=\frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2), \tag{8}$$

等等．这就解决了自然数的方幂和的问题．

有了上述公式，奇数的方幂和以及偶数的方幂和也一并得到了解决．例如，对于奇数的二次幂的和，我们有

$$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2=\sum_{k=1}^{2n} k^2-\sum_{k=1}^{n}(2k)^2$$

$$=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(2n+1)(4n+1-2n-2)}{3}$$

$$=\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}.$$

一个排序不等式

中国科学技术大学数学系　史济怀

（一）一个排序问题

一九七八年全国数学竞赛中有这样一道题：有 10 人各拿水桶一只去打水，设水龙头注满第 i 个人的水桶需要 t_i 分钟，假定这些 t_i 各不相同．问只有一个水龙头时，应如何安排这 10 人的次序，使他们花费的总时间最少？这个最少的总时间等于多少？

对于这个问题，根据常识就能回答．我们把水桶由小到大编号，最小的是 1 号，最大的是第 10 号．注满 1 号水桶所需的时间设为 t_1，注满 2 号水桶所需的时间设为 t_2，……．那么，显然有

$$t_1<t_2<\cdots<t_{10}.$$

如果一开始就用最大的水桶去打水，要注满它所需的时间最多，这意味着其他九人都要为他白等 t_{10} 这么多时间；相反，如果一开始就用最小的 1 号桶去打水，打满它所需的时间最少，因而其他九人空等的时间也最少．等他打满后，第二号桶去打，这时空等的只有八个人了；接下去是 3 号，4 号，……，直到第 10 号水桶打满为止．经过这段简单的直观的分析，我们马上可以得到结论：根据桶的大小，按由小到大

的次序去打水，这十人所花费的总时间一定最少.

但要对这一结论作出严格的数学证明，就要借助于数学的分析了.

我们先来看，按上面讲的由小到大的次序去打水，十个人所花费的总时间是多少. 第1号水桶在打水时，10个人都需要等 t_1 分钟，总共是 $10t_1$ 分钟；第2号水桶打水时，9个人都需要等 t_2 分钟，总共是 $9t_2$ 分钟；继续做下去，到第10号水桶打水时，只有他一人在等，需要 t_{10} 分钟. 因此，10只水桶都打满水时，这10人所花费的总时间 T 为

$$T=10t_1+9t_2+\cdots+2t_9+t_{10}. \tag{1}$$

为什么它比其它任一种次序打水所花费的总时间少呢?

设另一种次序是第 i_1 号桶先打，接着是第 i_2 号桶，……，一直到第 i_{10} 号桶. 这里 $(i_1, i_2, \cdots, i_{10})$ 是 $(1, 2, \cdots, 10)$ 的任意一个排列. 设按这种次序打水，10人所花费的总时间为 T'，那么和上面的讨论一样，

$$T'=10t_{i_1}+9t_{i_2}+\cdots+2t_{i_9}+t_{i_{10}}. \tag{2}$$

现在我们的问题归结为，对 $(1, 2, \cdots, 10)$ 的任何一个排列 $(i_1, i_2, \cdots, i_{10})$，必有

$$T'>T, \tag{3}$$

这里 T 和 T' 分别如(1)、(2)式所示.

如何证明(3)式? 让我们暂时撇开打水问题，看一下(1)、(2)两式本身的特点. 由于

$$t_1<t_2<\cdots<t_{10}, \tag{4}$$

$$10>9>\cdots>1, \tag{5}$$

所以，(1)式实际上是一个单调上升数列和一个单调下降数列对应项乘积的和；而(2)式则是把(4)的次序任意打乱，(5)的次序不动，所得的对应项乘积的和. 从直观上看，前者应比后

者小. 下面我们将给出这一事实的证明, 实际上我们证明的要比(3)式的结论更一般些.

(二) 定理和应用

现在我们从数学本身提出问题.

设 $A=\{a_1,\cdots,a_n\}$, $B=\{b_1,\cdots,b_n\}$ 是两个各有 n 个实数的数集. 把 A 中的数按某种方式和 B 中相应的数相乘, 然后相加, 得到一个和数. 由于搭配的方式不同, 得到的和数也不相同. 例如, 设 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$、$B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, 那么

$$a_1b_3+a_2b_2+a_3b_5+a_4b_1+a_5b_4,$$
$$a_2b_3+a_1b_5+a_5b_4+a_3b_1+a_4b_2$$

便是两个不同的和数; 当然还可写出其它许多不同的和数. 现在问, 如何搭配, 才能使和数最大或最小?

由于打水问题的启发, 我们可以猜测以下结论成立: 把 A 中的数按由大到小的次序排好, 把 B 中的数按相反的次序——由小到大排好, 对应的数相乘, 然后相加, 所得的和数一定最小; 如果把 A, B 中的数都按由小到大(或由大到小)的次序排好, 对应的数相乘, 然后相加, 所得的和数一定最大. 这个猜测是正确的, 这就是下面的两个定理.

定理 1 设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$, $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$, $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $12\cdots n$ 的任意两个排列, 那么必有

$$a_{i_1}b_{j_1}+a_{i_2}b_{j_2}+\cdots+a_{i_n}b_{j_n}\geqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n. \qquad (6)$$

定理 2 设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$, $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$, $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $12\cdots n$ 的任意两个排列, 那么必有

$$a_{i_1}b_{j_1}+a_{i_2}b_{j_2}+\cdots+a_{i_n}b_{j_n}\leqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n. \qquad (7)$$

在给出这两个定理的证明之前，先介绍一些它们的应用．

[例 1]　首先回到打水问题．由于

$$10>9>\cdots>1,$$

$$t_1<t_2<\cdots<t_n,$$

根据定理1，便有

$$10t_{i_1}+9t_{i_2}+\cdots+2t_{i_9}+t_{i_{10}}>10t_1+9t_2+\cdots+2t_9+t_{10},$$

即 $T'>T$．这就解决了打水的排序问题．

[例 2]　1978 年国际数学竞赛有这样一个题：设 $a_1, \cdots, a_n$ 为两两不相同的正整数，求证

$$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}>1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

利用定理 1，这个结果变得很简单．

把 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 按由小到大的次序排好：

$$a_{i_1}<a_{i_2}<\cdots<a_{i_n},$$

这里，$i_1i_2\cdots i_n$ 是 $12\cdots n$ 的一个排列．因为 $a_j(j=1, \cdots, n)$ 都是正整数，当然有

$$a_{i_1}\geqslant 1,\ a_{i_2}\geqslant 2,\ \cdots,\ a_{i_n}\geqslant n. \tag{8}$$

现在对下面两个数列

$$a_{i_1}<a_{i_2}<\cdots<a_{i_n},$$

$$1>\frac{1}{2^2}>\cdots>\frac{1}{n^2}$$

应用定理 1，并注意到不等式(8)，即得

$$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}>a_{i_1}+\frac{a_{i_2}}{2^2}+\cdots+\frac{a_{i_n}}{n^2}$$

$$\geqslant 1+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

这就是要证的不等式．　□

[例 3]　设 $a_1, \cdots, a_n$ 是 n 个正数，

$$\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n), \qquad \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

分别称为这 n 个正数的算术平均和几何平均.

这两个平均数之间有一个重要的关系:

$$\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}. \tag{9}$$

由于它的重要性，人们给出了许多不同的有趣的证明 (例如，参见本书第 24 页). 下面我们用定理 1 给出 (9) 的一个新的证明.

容易知道，(9) 等价于下述命题：若 n 个正数 $b_1, \cdots, b_n$ 满足 $b_1\cdots b_n=1$, 则

$$b_1+\cdots+b_n\geqslant n.$$

我们用定理 1 证明这个命题，从而给出了(9)的证明.

任取正数 c_1, 再取 c_2, 使得 $b_1=\frac{c_1}{c_2}$; 再取 c_3, 使得 $b_2=\frac{c_2}{c_3}$, $\cdots$, 取 c_n, 使得 $b_{n-1}=\frac{c_{n-1}}{c_n}$. 因为 $b_1\cdots b_n=1$, 所以

$$b_n=\frac{1}{b_1\cdots b_{n-1}}=\frac{1}{\frac{c_1}{c_2}\,\frac{c_2}{c_3}\cdots\frac{c_{n-1}}{c_n}}=\frac{c_n}{c_1}.$$

于是

$$b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{c_1}{c_2}+\frac{c_2}{c_3}+\cdots+\frac{c_n}{c_1}. \tag{10}$$

把 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 按单调上升的次序重新排列，设

$$c_{i_1}\leqslant c_{i_2}\leqslant\cdots\leqslant c_{i_n}, \tag{11}$$

则显然有

$$\frac{1}{c_{i_1}}\geqslant\frac{1}{c_{i_2}}\geqslant\cdots\geqslant\frac{1}{c_{i_n}}. \tag{12}$$

现在把 $c_1, \cdots, c_n$; $\frac{1}{c_2}, \frac{1}{c_3}, \cdots, \frac{1}{c_n}, \frac{1}{c_1}$ 分别看成(11),

(12)的一种排列，根据定理 1 即得

$$\frac{c_1}{c_2}+\frac{c_2}{c_3}+\cdots+\frac{c_n}{c_1}\geqslant c_{i_1}\cdot\frac{1}{c_{i_1}}+\cdots+c_{i_n}\cdot\frac{1}{c_{i_n}}=n.$$

根据(10)即得

$$b_1+b_2+\cdots+b_n\geqslant n.$$

有了这个命题，再证(9)就很容易了．设

$$G=\sqrt[n]{a_1\cdots a_n},\quad b_i=\frac{a_i}{G}\ (i=1,\ \cdots,n),$$

则 $b_1\cdots b_n=\dfrac{a_1\cdots a_n}{G^n}=1$，于是得 $b_1+\cdots+b_n\geqslant n$，即

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{G}\geqslant n,$$

这就是不等式(9)． □

[例 4] 设 $a_1\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant0$, $b_1\geqslant\cdots\geqslant b_n\geqslant0$, $i_1\cdots i_n$, $j_1\cdots j_n$ 是 $12\cdots n$ 的任意两个排列，证明

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{a_{i_r}b_{j_s}}{r+s}\leqslant\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{a_rb_s}{r+s}.$$

证明 命 $d_r=\sum\limits_{s=1}^{n}\dfrac{b_{j_s}}{r+s}$ (其中 $r=1,\ \cdots,\ n$)，显然 $d_r>d_{r+1}$，即 d_r 是一单调下降的数列，故由定理 2 得

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{a_{i_r}b_{i_s}}{r+s}=\sum_{r=1}^{n}d_ra_{i_r}\leqslant\sum_{r=1}^{n}d_ra_r,$$

因为当 r 固定时，$\dfrac{1}{r+s}$ 对 s 而言是单调下降的，还用定理 2 得

$$d_r=\sum_{s=1}^{n}\frac{b_{j_s}}{r+s}\leqslant\sum_{s=1}^{n}\frac{b_s}{r+s},$$

代入上面的不等式，即得

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{a_{i_r}b_{j_s}}{r+s}\leqslant\sum_{r=1}^{n}d_ra_r\leqslant\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{a_rb_s}{r+s},$$

这就是要证的不等式.

从证明的过程不难看出，实际上我们可以证明更一般的结果：

设 $a_1\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant 0$, $b_1\geqslant\cdots\geqslant b_n\geqslant 0$, $c_2\geqslant\cdots\geqslant c_{2n}\geqslant 0$, $i_1\cdots i_n$, $j_1\cdots j_n$ 是 $12\cdots n$ 的任意两个排列，那么

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}c_{r+s}a_{i_r}b_{j_s}\leqslant\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}c_{r+s}a_rb_s.$$

(三) 定理的证明

先证明定理 1, 定理 2 只是定理 1 的简单的推论.

先证明 $i_1i_2\cdots i_n$ 就是自然顺序 $12\cdots n$ 的情形，这时 (6) 式变成

$$a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n}\geqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n. \tag{13}$$

证明的思想是这样的：在 (13) 式左端的和式中，让 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不动，而让 $b_{j_1}, \cdots, b_{j_n}$ 不断变换位置，最终变成 (13) 式右端的样子，而在每次变换后，和式的值不会增加，这样就得到了不等式 (13). 具体作法如下：首先指出，对于任给的排列 $j_1j_2\cdots j_n$, 我们总可通过两个文字的有限次对换(所谓对换，是指两个文字互换位置，其它文字不动的一种变换)把它变成自然顺序 $12\cdots n$(例如，任给 5 个数字的一个排列 32154, 我们总可通过下列一连串对换把它变成自然顺序 12345: 32154→31254→13254→12354→12345), 而每作这样一次对换，(13) 式左端和式的值不会增加. 例如，若 $j_1>j_2$, 则把 $j_1j_2j_3\cdots j_n$ 换成 $j_2j_1j_3\cdots j_n$ 时，(13) 式左端和式的值不会增加，即

$$\begin{aligned}&a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+a_3b_{j_3}+\cdots+a_nb_{j_n}\\&\quad\geqslant a_1b_{j_2}+a_2b_{j_1}+a_3b_{j_3}+\cdots+a_nb_{j_n}.\end{aligned} \tag{14}$$

由于 (14) 式两端第二项以后都是一样的，因此要证明 (14) 式，只要证明

$$a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}\geqslant a_1b_{j_2}+a_2b_{j_1},$$

事实上，由于 $a_1\geqslant a_2$，$b_{j_1}\geqslant b_{j_2}$，所以

$$\begin{aligned}a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}-a_1b_{j_2}-a_2b_{j_1}&=a_1(b_{j_1}-b_{j_2})-a_2(b_{j_1}-b_{j_2})\\&=(a_1-a_2)(b_{j_1}-b_{j_2})\geqslant 0,\end{aligned}$$

这就证明了(14)成立．由于每次对换，(13)左端和式的值不增加，当把 $j_1\cdots j_n$ 换成自然顺序 $12\cdots n$ 时，(13) 的左端就变成了右端，因而 (13) 成立．

现在证明不等式 (6)．事实上，只要把 $i_1\cdots i_n$ 换成自然顺序 $12\cdots n$，这时相应的 $j_1\cdots j_n$ 变成一个新的排列 $k_1\cdots k_n$，即

$$a_{i_1}b_{j_1}+a_{i_2}b_{j_2}+\cdots+a_{i_n}b_{j_n}=a_1b_{k_1}+a_2b_{k_2}+\cdots+a_nb_{k_n} \tag{15}$$

(例如，$n=5$，$i_1\cdots i_5=32154$，$j_1\cdots j_5=21435$，这时 (15) 为

$$\begin{aligned}&a_3b_2+a_2b_1+a_1b_4+a_5b_3+a_4b_5\\&=a_1b_4+a_2b_1+a_3b_2+a_4b_5+a_5b_3,\end{aligned}$$

即 $k_1\cdots k_5=41253$)．而上面已经证明

$$a_1b_{k_1}+\cdots+a_nb_{k_n}\geqslant a_1b_1+\cdots+a_nb_n,$$

因而

$$a_{i_1}b_{j_1}+\cdots+a_{i_n}b_{j_n}\geqslant a_1b_1+\cdots+a_nb_n.$$

这就是 (6)，定理证毕． □

有了定理1，定理 2 就很容易证明了．根据定理 2 的假定，有

$$-a_1\geqslant -a_2\geqslant\cdots\geqslant -a_n,$$

$$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n.$$

对这两个数列用定理 1，即得

$$(-a_{i_1})b_{j_1}+\cdots+(-a_{i_n})b_{j_n}\geqslant(-a_1)b_1+\cdots+(-a_n)b_n,$$

两端都乘以负号，即得所要证的不等式 (7)． □