图论与工程应用

[美] D·E·约翰逊 J·R·约翰逊著

Graph Theory
With Engineering Applications

David E. Johnson
Johnny R. Johnson
1972

内 容 简 介

图论是研究一组点所代表的事物和联结这些点之间的线所代表的事物之间的互相关系的数学理论。它已被广泛应用于连续和离散系统，集总和分布系统，时变和非时变系统以及时域和频域分析中。本书是学习图论的初步课本，除基本理论外还着重讲述在工程方面的应用。前五章为图论的一般理论，第六章至第八章为图论在系统工程、力学及电网络方面的应用，第九章介绍中等矩阵理论，第十章为电网络应用的扩充-变换法，第十一章为电网络中的状态变量，第十二、十三章为信号流图和流图的应用，第十四章为运输网络、接触网络等其他方面的应用。本书自成体系，书末附有初等矩阵及拉普拉斯变换。具有初等微积分知识即可阅读。每章节附有例题、习题，便于学习。

图论与工程应用

[美] D.E.约翰逊
J.R.约翰逊 著
孙惠泉 李先科 译

*

人民邮电出版社出版
北京东长安街27号
天津新华印刷一厂印刷
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售

*

开本：787×1092 1/32　　1982年2月第一版
印张：15 4/32页数：242　　1982年2月天津第一次印刷
字数：347千字　　印数：1—9,500册
统一书号：15045・总2542-有5228
定价：1.55元

译 者 序

本书是为工程技术人员，特别是电信、电力工程技术人员编写的。内容深入浅出，推理严谨，并有丰富的例题和习题，便于理解、掌握所讲的概念。本书特别重视图论的应用，除了用许多篇幅讲解应用外，在取材和选用术语上也考虑了这一点。本书对图论在网络分析中的应用、对状态变量法及有关的问题，都有较详尽的讨论。

图论起源于1736年欧拉有名的哥尼斯堡七座桥问题的讨论，以后停顿了100多年，到上世纪中叶，由于对电网络、晶体模型和分子结构等的研究，图论又重新引起人们的兴趣，近20多年来，图论的研究更取得了突飞猛进的发展，新的成果大量涌现，这种兴旺景象主要是受了一些新的应用领域的影响，如通信理论、电网络、开关电路、博奕论，以至于生物学和心理学等等。

目前图论已经引起我国广大科技人员的注意。我们相信本书的出版将会对图论知识的普及和应用作出一定的贡献。

本书有许多有趣的习题，它们与所讲内容有密切关系，其中有些还是有关内容的延伸及定理的证明。这些习题一般都不难，请读者尽量多做些，以便巩固有关概念，进一步掌握图论的推论方法。

在本书翻译过程中，北京邮电学院童勤模同志曾给予很大帮助，并详细地审阅了译文，在此谨致以谢意。

原书中个别明显错误之处，译者作了校正，但由于译者水平所限，译文中肯定有不少缺点和错误，希望读者批评指正。

译者

作 者 序

在以往十年里，计算机在工程教育课程中引起了一场革命。可以肯定地说这场革命还处于它的幼年时期。这期间已经看到在工程课程中出现了系统工程、泛函分析、概率与统计、有限状态时序机、状态空间、组合数学以及其它许多新的课题，这全部或部分地是由于计算机的出现而引起的。经典的频域分析法在工程领域中再也不能占统治地位了，而对时域方面的兴趣则有了很大的恢复。同样的，连续系统的研究正不断地让位于离散系统的研究。总之，随着使用计算机可能性的增加，已经迫使工程教育者重新考虑并且从根本上修改他们的课程。而这种进程还远无止境。

图论是组合数学中一个极重要的课题，它在工程中的重要性也正在不断地增加。应用图论可使任何一个由相互联系的元件构成的系统——哪一个不如此呢？——的研究变得容易得多。图论已被应用于连续和离散系统，集总和分布系统，非时变和时变系统，以及时域和频域分析中。因此，我们认为需要有一种图论课本，它既是初步的，又要适应于当前的工程课程。我们希望本书能满足这方面的需要。

本书前五章及第六章的一部分论述图的抽象理论，其发展是以线性矢量空间为基础的。图论在工程系统中的应用在第六章中讨论，而力学及电网络中的应用则分别在第七、八章中介绍。第九章论述中等矩阵论。第十章是电网络应用的扩充，其中考虑了克希霍夫第三及第四定律，由此给出了网络综合的基

础。第十一章叙述应用于电网络的状态变量法。第十二、十三章是关于信号流图及流图应用于一般的工程问题。最后，第十四章收集了如运输网络及接触网络等方面的应用。

本书是自成系统的，并有初等矩阵论及拉普拉斯变换的附录。具备初等微积分知识即可阅读本书，其中有关电网络的几章是例外，在那里初步的电路课程是必需的。理解开关电路所必需的布尔代数放在第十四章中介绍。

D.E.约翰逊

J.R.约翰逊

1971年11月

目　　录

第一章 基本概念

1·1 引 言

正如我们即将看到的那样，用最简单的话来说，图论所研究的是物件之间的相互关系，这些物件以某种特定的方式互相联系着，或互相关联着。在任一个这种研究中，如果可以把这些物件抽象地用一组点来表示，把各物件之间的联系用这些点之间的连线来表示，这时图论几乎总是个很有用的工具。这种表示法对极广泛领域中（如数学、工程、社会科学、经济等）的问题，从简单的谜语到很复杂的工程系统，都是可能的。由于图论的应用范围很广，我们可以不局限在某个特定领域的应用，而进行对它本身很有益的抽象研究。但在这里我们的目的是考虑抽象图的许多性质，同时强调它在电气工程问题中的应用，对这类问题图论几乎可以说是“很合身的”。事实上，克希霍夫1847年的一篇关于图论在电网络中的应用的著名文章，至今仍是近代分析的基础。

图论最早期的著名文章，无疑就是欧拉在1736年发表的“哥尼斯堡的七座桥”，其中解决的问题（及其推广）是：“在普鲁士哥尼斯堡镇里有一个岛名叫克涅波（在图1-1中记为A），布列卡儿河的两条支流（如图）从它两边流过。有七座桥（记为a，b，c，d，e，f和g）把这个岛和三个陆区

* 请阅书末参考书目

B，C和D连接起来。我们问：一个人能否设想一条散步路径，使他能走过每座桥一次且只一次？”我们将在练习中将进一步考虑这问题（参看练习1·2·1）。

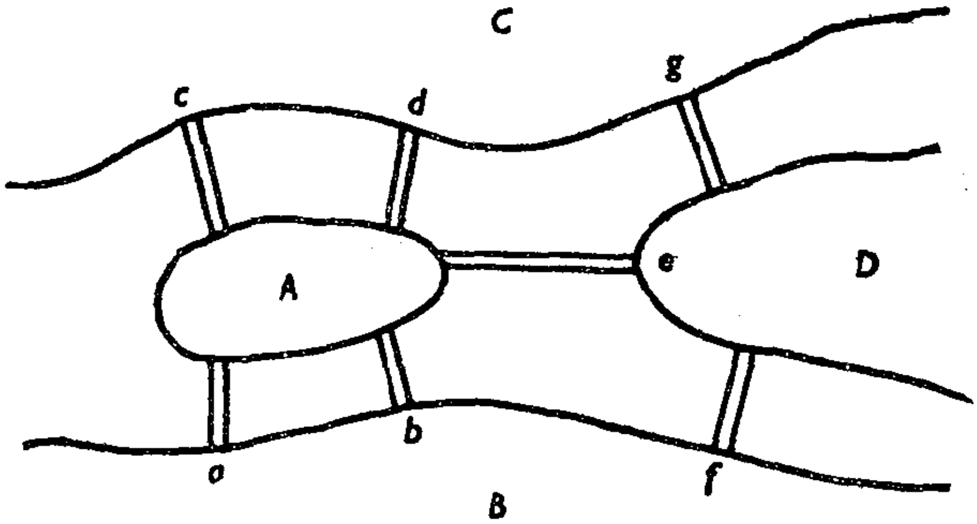

图 1-1　哥尼斯堡的七座桥

图论问题的另一个例子，是要在 n 个房子中的每一个和 n 个公用事业中的每一个之间，彼此都用不互相交叉的导管连接起来。当 $n \geqslant 3$ 时这是不可能的（我们将在第二章中证明）。图1-2是 $n=3$ 时的图（称为**公用事业图**），读者可以亲手移动这些导管试一试。

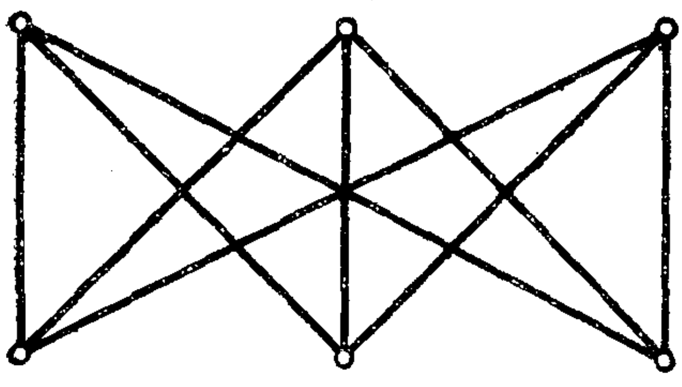

图 1-2　公用事业图

最后一个例子是至今仍未解决的、著名的**四色问题**。曾经有过这样的猜测（至少早在1840年）：要给一个被分成一些地区的国家地图上色，使它的任二相邻地区（它们的边界交于不止有限个点）不会有相同的颜色，只要四种颜色就够了。地图的实际制作者们

已经用几个世纪的实践证实四种颜色是足够的，然而这个猜测的证明至今仍在激励着数学家们。已经证明，五种颜色是足够的（例如参看Liu，251页），而三种颜色显然是不够的，但四色猜测仍然是个猜测而已。如果把这些地区都用点来表示，而它们彼此间的边界都用连接这些点的线来表示，结果就得到类似图1—2的一张图。因此，四色问题是个图论问题。

这些例子及后面练习中所要考虑的其他例子，说明了图论应用的广泛性。现在我们给出线性图的正式定义，并讨论它的性质。

1·2 线性图的概念

为了正式对线性图进行研究，需要建立一些严格的规则和定义。目前流行的术语是很不统一的，而且许多在工程方面的书中还比较标准的术语，又和较抽象的理论书中的那些术语有很大差别。我们打算使用在图论书中看来是最流行的术语和符号，而在工程方面的书中所用的一些名词，只当它们在电路理论中已经扎根几十年的才加以使用。当这些名词出现时将加以指出。

我们的讨论首先从叙述图本身的定义开始。

定义。一个图$G=(V, E)$是指称之为**顶点**或**节点**的物件的一个集合V连同称之为**边**或**元素**的物件的一个集合E，其中E的每条边是V的物件偶。如果V和E是空的，则G是**空图**，记为ϕ。

集合E可看成集合V上的一个**二元关系**。也就是说，如果a

和 b 是 V 的两个成员，则当且仅当在某种明确的定义下存在着 a 到 b 的联系时，（a，b）才是 E 的一个成员。如果“a 到 b 的联系”这句话与“b 到 a 的联系”有着相同的含意，那么边（a，b）与边（b，a）是相同的，这时称这个图为**无向的**。如果（a，b）$\neq$（b，a），则这个图是个**有向图**。上面的说法可用符号表示如下：

定义。若 $a\in V$ 及 $b\in V$，则当且仅当 $a\ R\ b$ 时，才有（a，b）$\in E$。如果 $a\ R\ b$ 等价于 $b\ R\ a$，即（a，b）=（b，a）则 G =（V，E）是个无向图。但若（a，b）$\neq$（b，a），则 G =（V，E）是个有向图。

（符号 $\in$ 表示“属于……的一个成员”，而 R 表示“从……到……的联系”。）

对无向图采用其他诸如 e =（a & b）的符号，可能要比用 e =（a，b）更合适些。但为了避免琐碎，对无向图和有向图我们都采用后一符号，而用上下文加以澄清。

我们需要的另一个定义是**有限图**的定义。当且仅当集合 E 和 V 都是有限的，即 E（或 V）包含有限数目的边（或顶点）。时称图 G =（V，E）是**有限的**。本书将只考虑有限图，当提到一个图时，就默认它为一有限图。

显然，我们可将一个图 G =（V，E）用三维欧几里得空间的一个图来表示，其中将顶点用点来表示，而将联系（a，b）用连接 a 和 b 的连续而不自身相交的线来表示。（n 维欧几里得空间 E^n，是所有 n 个实数的序列（$x_1,x_2,\cdots,x_n$）的空间，其中任何两个序列，例如 x =（$x_1,x_2,\cdots,x_n$）及 y =（$y_1,y_2,\cdots,$

y_n）之间的距离为$D(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}$。

如果G是个无向图，线（a，b）可以表示a到b或b到a的联系。在有向图中，线（a，b）可用一个从a到b的箭头来表示它的方向，线（b，a）上则应给予相反的方向。这些表示法如图1-3所示。我们将采用这个记号，并且把这样得来的图叫做G的几何实现。

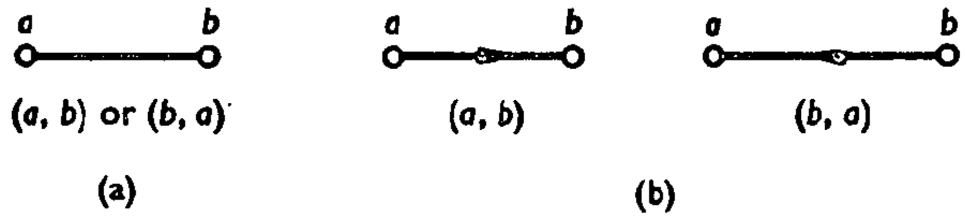

图 1-3 a无向图及（b）有向图中（a，b）和（b，a）的表示法

作为一个例子，设一有向图$G=(V, E)$定义为：

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

及 $$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}, \qquad (1\cdot2\cdot1)$$

其中

$$\begin{aligned} e_1 &= (a,b), & e_4 &= (c,d), \\ e_2 &= (a,c), & e_5 &= (b,a), & (1\cdot2\cdot2) \\ e_3 &= (a,d), & e_6 &= (c,c). \end{aligned}$$

$G=(V, E)$的一个几何实现如图1-4所示，其中边上的数字参照（1·2·2）式中的下标。如果这个图是无向的，除了把每条边的箭头都去掉外，图1-4不变。这时量（a，b）在（1·2·2）式中将出现两次，我们把它解释为a和b之间有两条不相同的边。

虽然图$G=(V, E)$（它的顶点和边可能是高度抽象的实体）和它的**几何实现**之间有着明显的区别，我们将交换使用

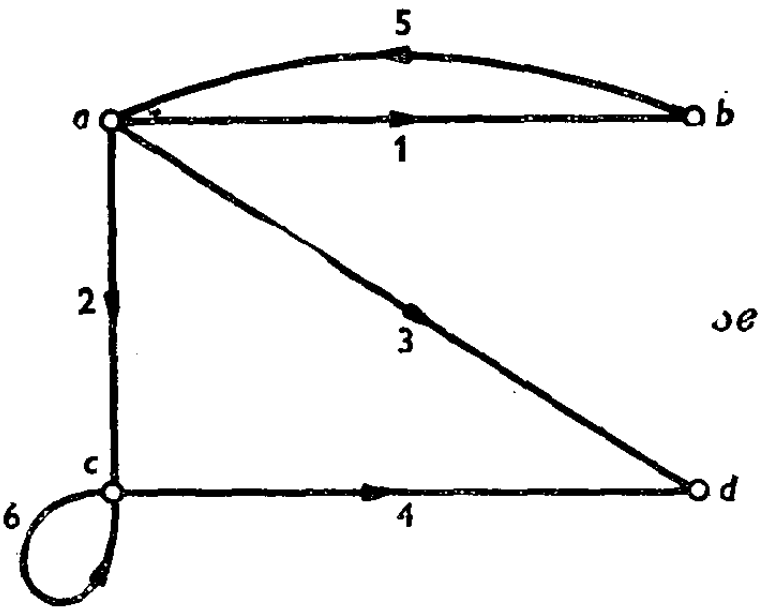

图 1-4 $G=(,E)$ 的几何实现

这两个术语，而且将（例如）（1·2·1）式看作图G的定义，也将图1-4中的图看作图G。这样完全可以满足我们的需要而不会导致混淆。这是因为对任一图$G=(V,E)$，显然总可以在三维空间里画出一个有形的图来与它相对应。反之，从一个图形中搜集到的信息，恰好就是一个特定的$G=(V,E)$以较抽象的定义所给出的信息。从这个观点来考虑，由于一个图是点和线的一个集合，有时就称它为一**线性图**。（但有些作者在很不相同的意义下使用“线性”这个术语，例如参考文献中的Liu，171页)。

如果将图和它的几何实现考虑为可互换的，就可以很好的注意下述一些性质，这些性质是由图的定义及几何实现的构造法而得来的。

1.每一边包含、且只包含两个顶点，这两个顶点是该边的端点。〔但这两个顶点不一定是不相同的，譬如在两个端点重合时的情况。如在（1·2·1）式的例中，边e_6只有一个独特的顶点。〕