高等数学自学丛书

一元函数微分学

庄万编

山东人民出版社

高等数学自学丛书

一元函数微分学

庄 万编

山东人民出版社

一九八一年·济南

高等数学自学丛书

一元函数微分学

庄 万 编

*

山东人民出版社出版
山东省新华书店发行
山东人民印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 10.75印张 224千字
1981年7月第1版 1981年7月第1次印刷
印数：1—9,000

书号 13099·93 定价 0.85 元

内容提要

本书系统阐述一元微分学的基本知识，内容包括导数概念、求导法则、微分、高阶导数与高阶微分、中值定理、洛必大法则、台劳公式、微分学的应用等。

本书适合中等学校数学教师、理工科大学生、工程技术人员阅读及青年自学之用。

出版说明

为了满足广大读者自学高等数学的需要，我们出版了这套高等数学自学丛书，包括《数学分析基础》、《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《无穷级数》、《多项式代数》、《线性代数》、《抽象代数》、《空间解析几何》、《概率论与数理统计》、《布尔代数》等十册。

这套丛书起点较低，系统性较强．次序的编排尽量做到由浅入深，由易到难，注意循序渐进，并适当渗透了一些现代数学的观点．在编写过程中，力求作到内容讲述详细，文字通俗流畅；书中安排了较多的例题和习题，书末附有习题答案或提示．因此，这套丛书适合自学，也可以作为这些课程的教学参考书．

这套丛书由山东师范学院数学系主持编写．此外，还得到山东大学数学系、曲阜师范学院数学系、山东师范学院聊城分院数学系等单位的大力支持和帮助，在此一并致谢．

一九八〇年十二月

目　　录

第一章 导数概念

在十七世纪的时候，由于生产技术发展的实际需要，引起一系列新的数学问题．它们当中比较典型的例子有

第一类：已知物体运动的路程与时间的函数关系求瞬时速度；求曲线的切线；求函数的极大、极小值等．

第二类：已知变速运动的速度与时间的函数关系求路程；求曲线围成的面积；求曲线段的弧长，求曲面所围的体积等．

这些问题的共同特点是所遇到的量都是变量，不能运用以常量为研究对象的初等数学的方法来解决，必需创立新的方法，建立新的理论．这样发展起来的一套研究变量的数学理论称为数学分析．

第一类、第二类问题的研究分别导致为后来的微分学、积分学．数学分析这门课程的内容包括函数与极限的一般理论，微分学，积分学，无穷级数四个部分．其中函数与极限的一般理论是后面三个部分的基础，一元及多元函数的微积分学是数学分析的主体．本书的内容是一元函数的微分学部分．

那么，前面那些问题是用什么方法来解决的呢？第一类问题是怎样导致微分学的呢？微分学包括哪些方面的内容？后面我们就来逐步回答这些问题．

这一章通过典型实例介绍极限法的基本思想和引入微分

学的第一个基本概念——导数；直接根据定义计算了若干个基本初等函数的导数；研究了可导性与连续性的关系。

§1·1 变速运动的瞬时速度

一、问题的提出

速度这个概念我们似乎已经了解，但仔细追究就会发现，这种了解对于精确的自然科学来说是很不够的。比方说，从济南到北京的路程假若是560公里，列车全程运行7个小时，我们就会说：该列车运行的速度是80公里/小时。我们容易看出，这在实际上是把它作为初等数学问题来处理的，而且只有当列车在整个运行过程中速度始终保持不变，即在任何相等的一段时间内所走过的路程都相同的情形下，这个算法才是正确的。

一般来说，在整个运行过程中列车的速度是经常改变的，上面的算法得到的只是列车在整个过程中的平均速度。对于一个普通的旅客来说，他关心的是列车平均每小时走多少公里，需要多少时间能够到达北京。但对于工程技术人员来说还须另有一番考虑，譬如为了保证旅客的安全，列车在通过黄河铁桥时的速度限定每小时不得超过40公里。这个限制的速度是否还是指平均速度呢？当然不是，如果在通过桥梁的过程中有一段时间的速度大大超过40公里/小时，有一段时间的速度小于40公里/小时，但平均起来并不超过40公里/小时，这样仍然可能造成桥梁的破坏。所以，应该在通过桥梁整个过程中的每一个时刻上的速度都不得超过40公里/小时。

就是说，这是一个“瞬时速度”，或者说，“即时速度”的概念。

在精确的科学技术问题中，瞬时速度概念是非常重要的。例如，在其他条件不变的情况下，炮弹的弹道完全取决于炮弹出膛这一时刻的瞬时速度。要使一个抛射体成为人造地球卫星，必须使它进入轨道时的瞬时速度不小于第一宇宙速度7.9公里/秒。如果要计算天体的运行轨道，就更需要考虑在每一时刻上的速度。

这一节我们要讲述两个问题：一是给出瞬时速度的确切定义；二是提供计算速度的方法。

二、变速运动的瞬时速度

为了讨论方便，我们设质点M沿直线运动。用t表示时间（从某一个选定的时刻算起），用s表示质点M从起算时刻起到时刻t为止所走过的路程，那么，路程s显然是时刻t的一个函数：$s=f(t)$

我们就把这个函数称作质点的运动规律。

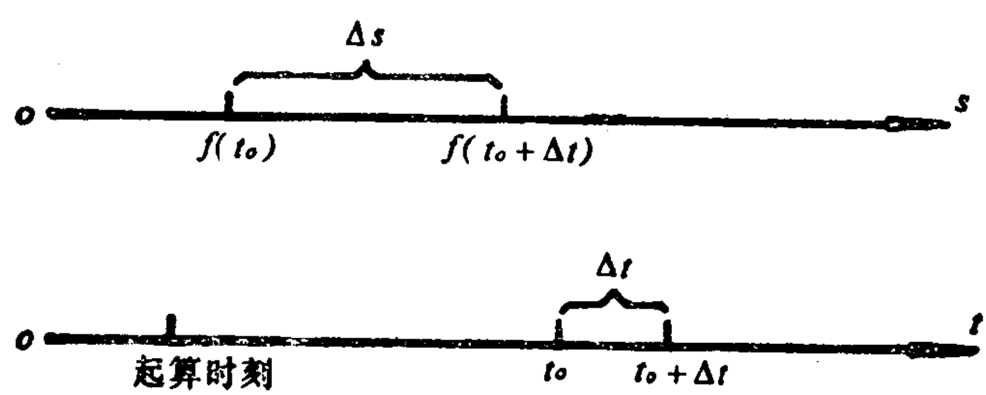

图 1—1

现在假设运动规律为已知，t_0是某一个给定的时刻，试问怎样求在时刻t_0的瞬时速度V.

1. 分析矛盾. 如果是等速运动，则在任取的一段时间内所走过的路程与时间之比是一个定数，这个定数就是质点的速度，即

$$速度=\frac{路程}{时间}$$

但对于变速运动的情形，这个计算公式不再有效，这就是现在所遇到的困难. 也就是说，主要矛盾是变与不变的矛盾.

2. 极限法. 设时间t从时刻t_0变到时刻$t_0+\Delta t$（Δt称为时间t的改变量），则质点M在t_0到$t_0+\Delta t$这一段时间间隔内所走过的路程是

$$\Delta s=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$$

（Δs称为路程s的改变量）于是，比值

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

就是质点M在时间间隔〔t_0，$t_0+\Delta t$〕内的平均速度，记作$\overline{V}$.

如果Δt取得比较大，质点M在t_0到$t_0+\Delta t$这一段时间内的速度可能已经有了较多的变化，而且还可能改变得很剧烈，这时平均速度是不能反映质点在t_0这一时刻上的速度的. 但是如果把Δt取得很小，让质点在这段时间内的速度还来不及有很大的变化，因而可以近似地看作等速运动. 这时的平均速度就可以作为在t_0这一时刻上的速度的近似值.

一般说来，Δt愈小，平均速度愈接近我们所想象的时刻t_0的速度. 而且只要把Δt取得充分小，在时间间隔〔t_0，

$t_0+\Delta t$] 内的平均速度就可以逼近在时刻t_0的速度到要多近有多近。这样，我们就很自然地把质点M在时刻t_0上的速度理解为平均速度当$\Delta t\to 0$时的极限。

于是，我们引入下面的定义：

运动着的质点M在给定时刻t_0的瞬时速度V就是运动规律$s=f(t)$的函数改变量$\Delta s=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$与自变量$t$的改变量$\Delta t$之比当$\Delta t\to 0$时的极限，即

$$V=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \qquad (1)$$

现在，计算这个比式的极限就求得在时刻t_0的瞬时速度。因此，以上运用极限思想分析和解决问题的方法原则上同时完成了第一段提出的两项任务。

我们指出：由于变速运动的质点在不同的给定时刻t上的瞬时速度是不同的，因此瞬时速度V是t的函数，$V=V(t)$；此外，极限（1）并非总是存在的，这决定于$s=f(t)$是怎样的函数和给定的时刻t_0。如果在某一给定时刻t_0极限（1）不存在，我们就认为相应的运动在这一时刻的瞬时速度没有意义；最后，如果质点不是沿着直线运动，而是在直线上作往复运动，这时运动规律通常就不是指的路程与时间的函数关系，而是位置与时间的函数关系，但对于这种情形以上的讨论仍然适用。

三、举例

例 1 设已知自由落体的运动规律为

$$s=f(t)=\frac{1}{2}gt^2 \quad (g=9.8\text{米/秒}^2\text{是常数})$$

试求时间间隔〔1，2〕，$\left[1,\ 1\frac{1}{10}\right]$，$\left[1,\ 1\frac{1}{100}\right]$内的平均速度．

解：（1）$t_0=1$，$\Delta t=2-1=1$，

$$f(t_0)=\frac{1}{2}\times 9.8=4.9,$$

$$f(t_0+\Delta t)=\frac{1}{2}\times 9.8\times 2^2=4\times 4.9,$$

所以在〔1，2〕这段时间内的平均速度为

$$\overline{V}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

$$=\frac{4\times 4.9-4.9}{1}=14.7\text{（米/秒）}$$

（2）$t_0=1$，$\Delta t=1\frac{1}{10}-1=\frac{1}{10}$，

$$f(t_0)=4.9,\quad f(t_0+\Delta t)=4.9\times\left(\frac{11}{10}\right)^2$$

所以在$\left[1,\ 1\frac{1}{10}\right]$这段时间内的平均速度为

$$\overline{V}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{4.9\times\left(\frac{11}{10}\right)^2-4.9}{\frac{1}{10}}=10.29\text{（米/秒）}$$

（3）$t_0=1$，$\Delta t=1\frac{1}{100}-1=\frac{1}{100}$，

$$f(t_0)=4.9,\ f(t_0+\Delta t)=4.9\times\left(\frac{101}{100}\right)^2$$

所以在$\left[1,\ 1\frac{1}{100}\right]$这段时间内的平均速度为

$$\overline{V}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{4.9\times\left(\frac{101}{100}\right)^2-4.9}{\frac{1}{100}}=9.849\text{（米/秒）}$$

例 2　求上例自由落体运动在时刻t的瞬时速度.

解：设t_0是一给定时刻，在〔$t_0, t_0+\Delta t$〕这段时间内路程的改变量为

$$\Delta s=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)=\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0{}^2$$

$$=gt_0\cdot\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2$$

在这段时间内的平均速度为

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{gt_0\cdot\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t}=gt_0+\frac{1}{2}g\Delta t$$

令$\Delta t\to 0$，取极限即得在时刻t_0的瞬时速度为

$$V=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(gt_0+\frac{1}{2}g\Delta t)=gt_0$$

以上讨论对于t_0取下落过程中任一时刻都是有效的，所以我们实际上已经求出了整个运动过程的每一时刻t的瞬时速度$V(t)=gt$。特别地，在第一秒末的速度为$V(1)=9.8$（米/秒），读者可以比较例 1 中计算出的平均速度。

习　题　1·1

1．变速直线运动的平均速度$\overline{V}=\dfrac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$，当$\Delta t<0$时有没有意义？当$\Delta t$很小时，平均速度$\overline{V}$是否就等

于瞬时速度$V(t)$？

2．一质点作直线运动，它所经过的路程与时间的关系是$s=3t^2+1$，　设$\Delta t=1$秒，0.1秒，0.001秒，求从$t=2$秒到$t=(2+\Delta t)$秒，这段时间内的平均速度及$t=2$秒时的瞬时速度．

3．将一物体垂直上抛，设其运动规律$s=30t-\frac{1}{2}gt^2$（其中$g=9.8$米/秒^2）．

（1）求从$t=2$秒到$t=3$秒这段时间内的平均速度．

（2）求$t=2$秒和$t=4$秒时的瞬时速度，并说明该物体是上升还是下降？

（3）经过多少时间物体达到最高点？

§1·2　非均匀杆的线密度

一、问题的提出

在物理上，形状接近于直线段，其截面积相对于其长度来说小得多的物体叫做杆．如果一个杆的质量分布是均匀的，即杆上任何长度相等的两小段所具有的质量都相等，则这个杆称为均匀杆，否则，称为非均匀杆．

对于均匀杆，从中任意截取一小段，它所具有的质量与它的长度之比都得到同一个定数ρ，这个数ρ就叫做该杆的线密度．这里所以称为线密度是因为我们所讨论的密度是对于质量沿着直线型的物体分布而言的．对于非均匀杆，则我们所面临的情况和变速运动的情况完全相似，也就是说，我们需要解决两个问题：一是给出非均匀杆在一个给定点的局部

线密度的确切定义；二是提供计算局部线密度的方法。

二、平均线密度与局部线密度

取杆的一端作原点O，把杆置于Ox轴上，则分布在〔O，x〕段上的质量m是随x而变化的函数（质量分布函数）：

$$m = f(x)$$

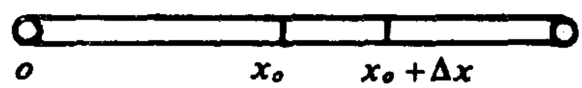

图 1—2

设x_0是一个定点，我们考察从x_0到$x_0+\Delta x$这一小段杆。显然，这一小段杆的质量是

$$\Delta s = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

于是，比值

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

就表示杆在x_0到$x_0+\Delta x$这一小段的平均线密度。

和变速运动的情况类似，当Δx取得很小时，可以近似地把从x_0到$x_0+\Delta x$这一小段内质量的分布看作是均匀的，而且用这一小段的平均线密度作为在点x_0的局部线密度的近似值。由于质量分布的不均匀性，不论Δx取得怎样小，平均线密度都不能作为在点x_0的局部线密度的精确值。但是，一般说来，只要Δx取得充分小，平均线密度就可以逼近我们所想象的局部线密度到任意接近的程度。这样一来，就很自然地把杆在x_0点的局部线密度理解为平均线密度当$\Delta x \to 0$时的极限。于是，我们引入下面的定义：

非均匀杆在给定点x_0的局部线密度ρ就是质量分布函数