科學圖書大庫

數目理論入門

譯者 王昌鋭

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

數目理論入門

譯者 王 昌 銳

徐氏基金會出版

美國徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人　徐銘信　科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人　曾迺碩　科學圖書編譯委員會編譯委員

中華民國五十九年八月一日初版

數目理論入門

定價　新台幣二十五元　港幣四元
改訂為基價 1.30 元

譯者　王昌銳　台灣省立高雄工業專科學校教授

內政部內版臺業字第1347號登記證

出版者 財團法人臺北市徐氏基金會出版部 臺北郵政信箱第3261號 電話519784號
發行人 財團法人臺北市徐氏基金會出版部 林碧鑾 郵政劃撥帳戶第15795號
印刷者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段151號 電話979739號

我們的一個目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識的傳播，是提高工業生產，改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。科學宗旨，固在充實人類生活的幸福也。

近三十年來，科學發展速率急增，其成就超越既往之累積，昔之認爲絕難若幻想者，今多已成事實。際茲太空時代，人類一再親履月球，這偉大的綜合貢獻，出諸各種科學建樹與科學家精誠合作，誠令人有無限興奮！

時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就人才，促進科學研究與發展，允爲社會、國家的急要責任，培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如生物、化學、物理、數學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。科學研究與教育的學者，志在將研究成果貢獻於世與啓導後學。旨趣崇高，立德立言，也是立功，至足欽佩。

科學本是互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的意外收穫。

我國國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年之間，所可苛求者。因此，從各種文字的科學圖書中，精選最新的基本或實用科學名著，譯成中文，依類順目，及時出版，分別充作大專課本、參考書，中學補充讀物，就業青年進修工具，合之則成宏大科學文庫，悉以精美形式，低廉價格，普遍供應，實深具積極意義。

本基金會爲促進科學發展，過去八年，曾資助大學理工科畢業學生，前往國外深造，贈送一部份學校科學儀器設備，同時選譯出版世界著名科學技術圖書，供給在校學生及社會大衆閱讀，今後當本初衷，繼續邁進，謹祈：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者；

主動地精選最新、最佳外文科學技術名著，從事翻譯，以便青年閱讀，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世，助益學者。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。掬誠奉陳，願學人們，惠然贊助，共襄盛舉，是禱。

徐氏基金會敬啓

新數學文庫

本文庫係由當代數學專家卅餘人所編撰，全世界均有譯本，乃數學權威之寶典。其目的在確立中等學校學生及社會大眾之某些頗饒興味，而易領悟的重要數學觀念。本文庫內容，多不含於中學數學教科書中，且難易懸殊，有的部份，需要特別研究。

學習數學的最好方法，爲多做習題。各書所附習題，有些頗爲艱深，需要愼密思考。讀者應養成手持紙筆，從事閱讀之習慣，自能得心應手，趣味盎然。

本文庫共二十册陸續出版，以供讀者研習。除第十七册係由葉哲志先生承譯外，其餘各册均由王昌銳教授承譯。（定價每册港幣4元，新台幣25元）

1. 有理數及無理數 (Numbers: Rational and Irrational)
2. 微積分研究 (What is Calculus About ?)
3. 不等式論 (An Introduction to Inequalities)
4. 幾何不等式 (Geometric Inequalities)
5. 高中數學測驗（第一册）(The MAA Contest Problem Book 1
6. 大數論 (The Lore of Large Numbers)
7. 無窮數之妙用 (Uses of Infinity)
8. 幾何移轉 (Geometric Transformations)
9. 連分數 (Continued Fractions)
10. 圖形及用途 (Graphs and their Uses)
11. 匈牙利數學問題詳解（第一册）(Hungarian Problem Book 1)
12. 匈牙利數學問題詳解（第二册）(Hungarian Problem Book 11)
13. 數學史話 (Episodes, from the early history of mathematics)
14. 群與圖 (Groups and their Graphs)
15. 特別數學 (Mathematics of Choice, or How to count Without Counting)
16. 由畢達哥拉司至愛因斯坦 (From Pythagoras to Einstein)
17. 高中數學測驗（第二册）(The MAA Contest Problem Book 11
18. 拓撲學基本概念 (First Concepts of Topology)
19. 幾何研究 (Geometry Revisited)
20. 數目理論入門 (Invitation to Number Theory)

譯　序

數目理論，爲古今數學家研究數學之良好工具，爲數學之一主要部門。其研究對象，爲用於計數，用作數學主要內容之正整自然數，故亦稱爲整數論，是一種研究數目關係之學門，亦爲研究數目性質之學問。

本書主要目的，在介紹數目性質，使讀者資以入門，從而探討某些數目關係。數學上奇奇怪怪的現象，由於現代人士之不斷研究，逐年均有新猷，數目理論亦然。所以涉獵本書，便將瞭解數目理論中，常用之某些特殊數學概念及方法，以便進行高深數學之研究。

著者奧爾博士（Dr. Oystein Ore），1899 年出生於挪威奧斯陸（Oslo），1922 年畢業奧斯陸大學以後，續於德國戈廷琴（Gottingen）大學，從事數學研究。1924 年於奧斯陸接受博士學位，1927 年應邀赴美，任雅禮大學教授，其著作除本書之外，尚有“數目理論及其歷史”，“圖形及其用途”，“圖形理論”，“四色問題”等多種，舉世推重。1968 年8月13日，逝世於奧斯陸，壽七十。

本書頗適我國大中學校師生參考研究，以充實數目理論造詣，促進數學研究效果。故應徐氏基金會之約，予以迻譯，以就正於國人。書中譯名，力求通俗普遍，重要名詞術語，且留繆原名，以便讀者參照，而資貫通。

譯稿多勞吾妻蔣君英女士協助整理，致得早觀其成，深爲感謝，特誌勿忘。

中華民國 59 年 6月·20 日
湘潭留田王昌銳序於左營自强齋

致　讀　者

本書爲數學專家所撰一系列書籍之一，其目的在對中學生及社會大衆，確立某些易於領會而頗有趣之重要數學觀念。新數學文庫（New Mathematical Library）之大部內容，包含中學課程所不常容納之題材，而且難易相殊，即使同一書內，某些部份，即比其他部份，需要較高程度之專注。由是，讀者需相當之學識技能，方能瞭解大部份此等書籍，且須作明智之努力。

如讀者一直僅於教室中接觸數學，則應熟記於心，一本數學書，不能快速閱讀，亦不應乍覽之餘，即期望瞭解全書各個部份，而應該很自然的越過複雜部份，稍後再回來讀；因書中後續之敍述，常會澄清一種理論也。反之，包含完全熟稔之題材，即可快速讀去。

“學”數學之最佳途徑，爲“做”數學。各書所附習題，有些需要較高深之探討思考，奉勸讀者，養成手持紙筆，從事閱讀之習慣，於此方式，數學對之，將變爲意義倍增。

對著者及編者而言，此爲新的嚐試，彼等願對協助本文庫各書籌印之許多中學師生，表示由衷感謝。編者頗有興趣於諸書之反應意見，希望讀者書面寄交：N.Y.10012.紐約馬莎街251號，庫南特數學科學會，紐約大學，新數學文庫編輯委員會。

目　錄

第一章　引　言

1·1　沿革

數目理論，為數學之一部門，係研討常稱為正整數（positive integers）之自然數（Natural numbers），

1，2，3，…者。

考古學及歷史顯示，人類很早，即開始計數。先學習數目相加，許久以後，又學習數目之相乘及相減。數目相除，係應平均分配蘋菓之收獲量及漁獲量之需要而生。此等關於數目之作業，稱為計算（calculations），該"計算"一字，源於拉丁（Latin）文之"calculus"，意即小石子；羅馬人使用圓石子於其計算板上，表示數目。

一當人們知道如何從事些許計算之後，計算遂成為許多人，磨練心靈思考之一種好玩的遊戲。經過許多世紀，多方面興趣之數目經驗，乃累積成為今日現代數學中，名為數目理論之一種嚴格的結構。某些部份，仍包含數目之簡單遊戲，但其他部份，則屬於數學中最艱深錯綜之章篇。

1·2　數目之學

某些最早期之數目思想痕跡，當能於有關數目之迷信中追尋，而可於許多人中發現之。有些幸運的數目，為人所喜愛，而不幸運者，則視如災難之眼。吾人有許多關於典型希臘人之"數學"（numerology）資料，即彼等對各種數目符號意義之思想及迷信。例如，大於一之奇數，表示一男性的觀念，而偶數表示女性觀念；故數目 5，為第一男性與女性數目之和；象徵結婚或聯合。

任何人之欲進一步瀏覽數目之學例證者，可於圖書館閱讀卜乃托（Plato）全書第八册。而如此之數目學，於數學觀念方面，並無多大意義，因數學只包含數目之運算與其性質，而不問其吉凶禍福也。而如以後所見，於數目理論中，某些著名問題，仍有源於希臘數目之學者，佔據數學家頭腦。

關於數目迷信，現已不覺其有何超然之感覺。吾人咸知女主人，均不樂於餐桌上，有 13 個客人。許多旅社，少有房間號碼及樓層，冠以 13。而對該數目，何以不吉利，又不知其所以然。有許多合理解釋，但許多人都不置理；例如，吾人記得，“最後的晚餐”，有 13 個客人，當然，第 13 個爲猶大（Judas）。許多東西，均以“打”計，而 13 却給予“十三個”之奇項，或許更爲實在。

於聖經中，特別於舊約中，數目 7 擔任特別職位；於古日爾曼人口頭，3 與 9 常予重複；而安徒生（Hindus）人，於其神話中，却偏愛着 10。

1·3 畢達哥拉斯問題

茲提示畢達哥拉斯（Pythagorean)問題，以作早期數目理論範例。一如吾人所知，於直角三角形中，諸邊長度，滿足畢達哥拉斯關係

$$z^2 = x^2 + y^2, \tag{1.3.1}$$

其中 z 爲斜邊（hypotenuse）之長度。此使人可能於一直角三角形中，當其他兩邊之長度爲已知時，計算其餘一邊之長度。偶或，以希臘哲學家畢達哥拉斯之名，名此定理，似有未當；因於其時代以前約 2,000 年，巴比倫人即已知此定理。

有時，(1.3.1）中所有諸邊長度，均爲整數，最簡單之情況

$$x = 3, \quad y = 4, \quad z = 5, \tag{1.3.2}$$

已於巴比倫（Babylonian)人表中發現，而可解釋如下：假定有一繩索，於其上以結或記號，分爲相等之 12 個部份；則當於場中三柱上將繩索張開時，乃得邊爲 3，4 及第三邊爲長 5，以作直角相對邊之一個三角形（圖 1.3.1）。於數學史中，常讀到此爲埃及測量人員（或繩索量計者），於尼羅(Nile)

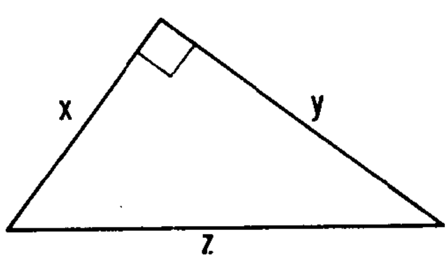

圖 1.3.1

河泛濫以後，丈量土地，用於繪畫直角三角形之方法。然而，此同樣爲科學史上，許多神秘故事之一；暫時，並無證據支持此論。

有許多畢達哥拉斯方程式(1.3.1)整解之其他情況，例如：

$$x=5,\quad y=12,\quad z=13,$$
$$x=7,\quad y=24,\quad z=25,$$
$$x=8,\quad y=15,\quad z=17.$$

吾人稍後將證明，如何能求得所有如是之解。希臘人已知如何決定之，或許巴比倫人亦知如何作此。

當兩整數 x 及 y 爲已知時，常能求得一滿足(1.3.1)之對應値 z，但 z 可同樣爲無理數。當需要所有三數爲整數時，其可能性受嚴重限制。希臘亞力山大利亞(Alexandria)之數學家德奧芳托司(Diophantos)(年代未定，約在200A.D.)，曾撰寫算術(Arithmetica)一書，討論如此之一類問題。自此之後，凡求方程式整數或有理數解之問題，自稱爲德奧芳狄問題，而德奧芳狄分析，爲今日數目理論之一重要部份。

習題集合 1・3

1. 試求畢達哥拉斯方程式之其他整解。

2. 試求斜邊較兩腿之大者，多一單位之其他解答。

1・4 圖示數目

於數目理論中，常遭遇有若

$$3^2=9,\quad 7^2=49,\quad 10^2=100$$

之平方數，及如

$$2^3=8,\quad 3^3=27,\quad 5^3=125$$

之立方數。此種數式之幾何形態，爲吾人得自希臘數學思想之許多遺產之一。希臘人喜歡思索數目，包括整數，以爲幾何量。結果，一乘積 $c=a\cdot b$，乃認係邊爲 a 與 b 之矩形，其面積爲 c。人們亦能認爲 $a\cdot b$，係矩形陣中點

之數目，該陣 a 點在一邊上，而 b 點在他邊上，例如 $20=4\cdot5$，爲圖 1.4.1 之矩形陣列中，點之數目。

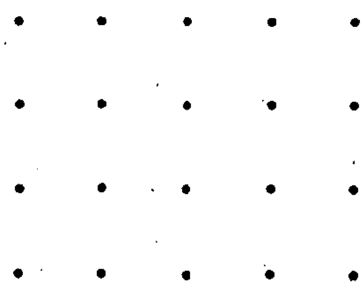

圖 1.4.1

任何整數之爲兩整數乘積者，可稱爲“矩形數”（rectangular number）。當矩形兩邊，有同樣長度時，該數乃爲一平方數。某些數目，除於平凡方式中，一纍沿單一列中諸點而外，不能表示爲一矩形數目；例如 5 能僅取一邊爲 1 他邊爲 5 之情況，表示爲一矩形數（圖 1.4.2）。如此之數目，希臘人稱爲質數（Prime humbers）。一單點通常將不考慮爲一數，單位 1 爲建立各正常數目之磚材。“由是 1 非，且不爲質數”。

圖 1.4.2

取代矩形及方形，吾人可考慮諸點能於其他幾何圖中，正規標定。於圖 1.4.3 中，已連續顯示三角形數目（triangular numbers）。

通常，第 n 三角形數目，由公式

$$T_n=\frac{1}{2}n(n+1), \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{1.4.1}$$

提供。此等數目，具有各種性質，例如，兩連續三角形數目之和，爲一平方數：

$$1+3=4, \quad 3+6=9, \quad 6+10=16, \cdots. \tag{1.4.2}$$

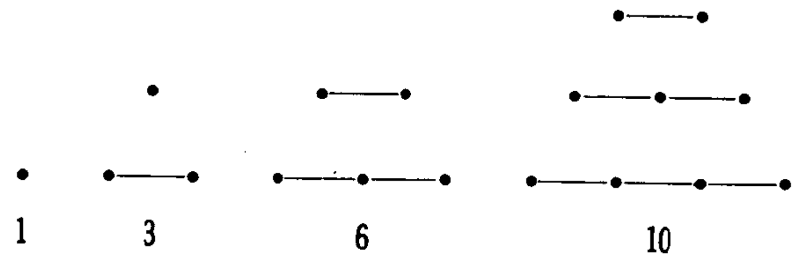

圖 1.4.3

三角形（或稱塔形）及方形數目，已推廣爲高次多角形數目。茲顯示五角形數目，經由圖 1.4.4 以定義之。

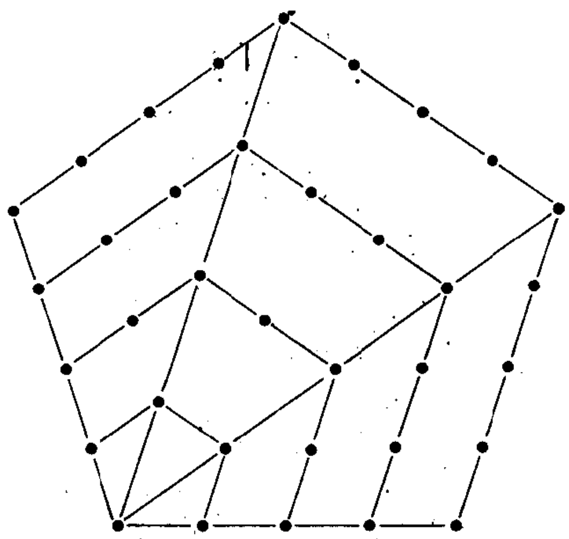

圖 1.4.4

首先少數五角形數目，可讀出爲

(1.4.3)　　$1, 5, 12, 22, 35.$

遂能顯示第 n 個五角形數目爲 p_n，提供如

(1.4.4)　　$p_n=\frac{1}{2}(3n^2-n).$

六角形數目，及通常之 k 角形數目，由一 k 邊之正 k 角形表示，而可依樣求得。吾人將不浪費太多時間以討論之。圖示數目，特別是三角形數目，於文藝復興（Renaissance）末期，希臘數目理論，已流入西歐之後，於數目研究中，已很普遍；彼等仍偶或出現於數目理論之文件中。

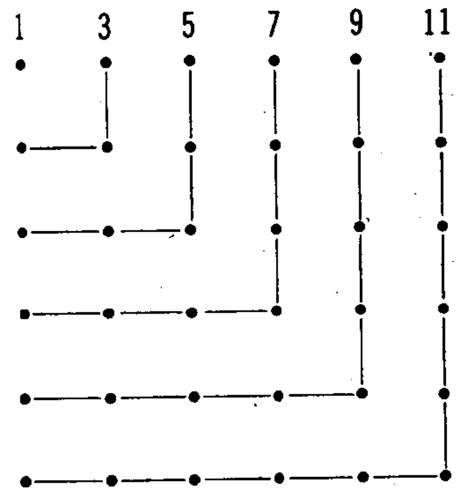

圖 1.4.5

幾種簡單數目關係，能由如是之一幾何分析化出，茲且僅指出一種事實。此爲早已發現者，即如奇數之和，達某一點後，其結果常爲一平方；例如

$1+3=4$，　$1+3+5=9$，　$1+3+5+7=16$，… 等等.

欲證明如是之一關係，僅須看一看方形網眼圖便知，該圖繪於圖 1.4.5 中。

習題集合 1·4

1. 用歸納法證明一般公式（1.4.1）之對三角形數者。

2. 證明對五角數目之公式。

3. 證明對 k 角形數之一般數式爲

$$\frac{1}{2}k(n^2-n)-n^2+2n.$$

1·5 魔術式的方形

如曾玩過填數遊戲板，應能想到其上之九個方格之曾試圖放置圓片者，係由 1 至 9 編號，而安排成以下形態：

2	9	4
7	5	3
6	1	8

圖 1.5.1

此處數目在各列中，在各行中，在各對角線中，相加起來之總數，同爲 15。

通常，一魔術式方形（magic square），係由 1 至 n^2 之整數，安排於一方形中；以致於各列，行，及對角線中之數字，提供相同之和 s，稱爲魔和。於 $4^2=16$ 數目之魔方，可取圖 1.5.2，此處之魔和爲 34。

1	8	15	10
12	13	6	3
14	11	4	5
7	2	9	16

圖 1.5.2

對各 n，僅有一魔和 s，而其易於得知其應爲何：於各行中數目之和爲 s；因有 n 行，所有魔方中數目之和爲 ns，但由 1 至 n^2 所有數目之和爲

$$1+2+\cdots+n^2=\frac{1}{2}(n^2+1)n^2,$$

一如吾人於算術級術中，所見數目和之數式，因

$$ns=\frac{1}{2}(n^2+1)n^2,$$

隨而

(1.5.1) $$s=\frac{1}{2}n(n^2+1);$$

故如 n 爲已知，s 乃已決定；魔方形能對所有大於 2 之 n 作之；但讀者能容易驗證，無可於 $n=2$ 行之者。

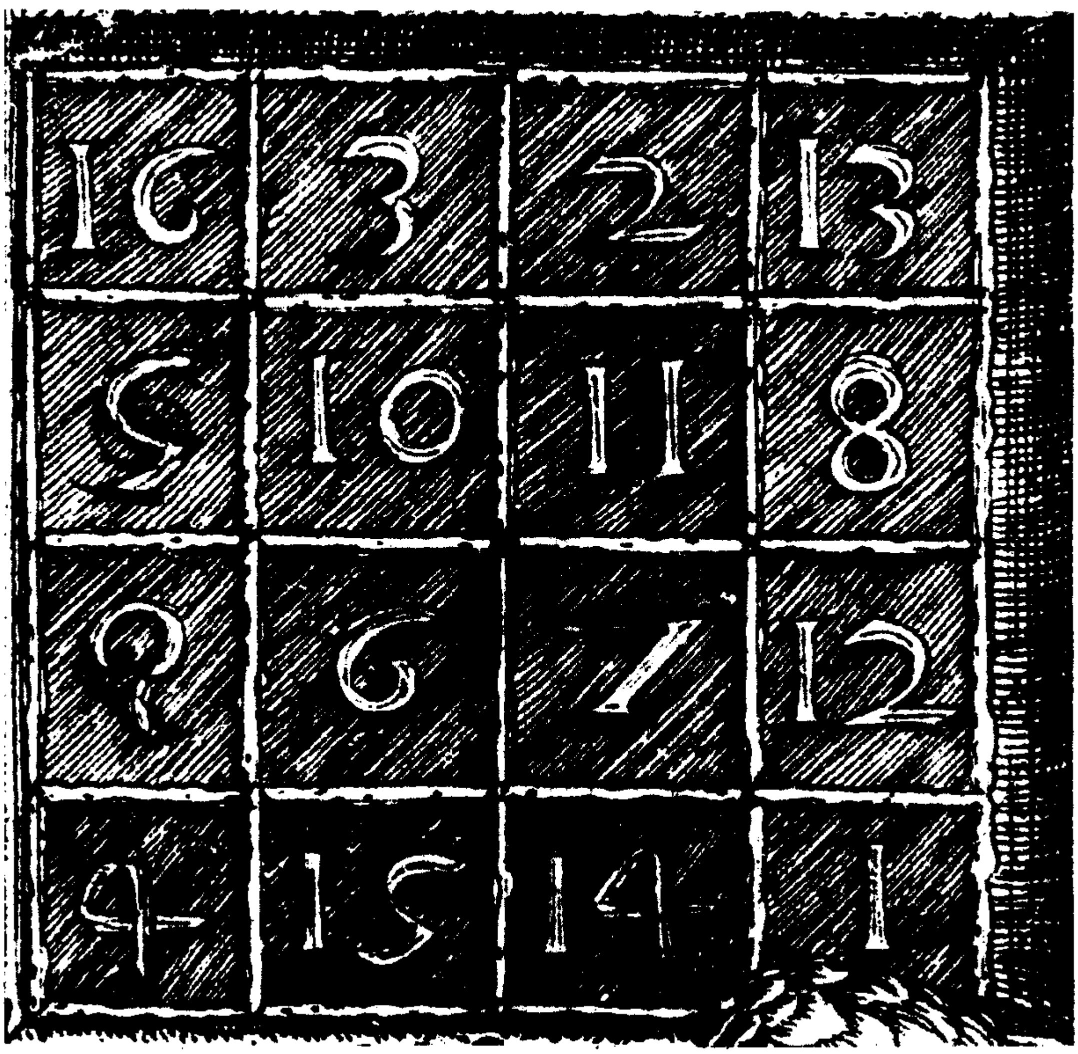

圖 1.5.3