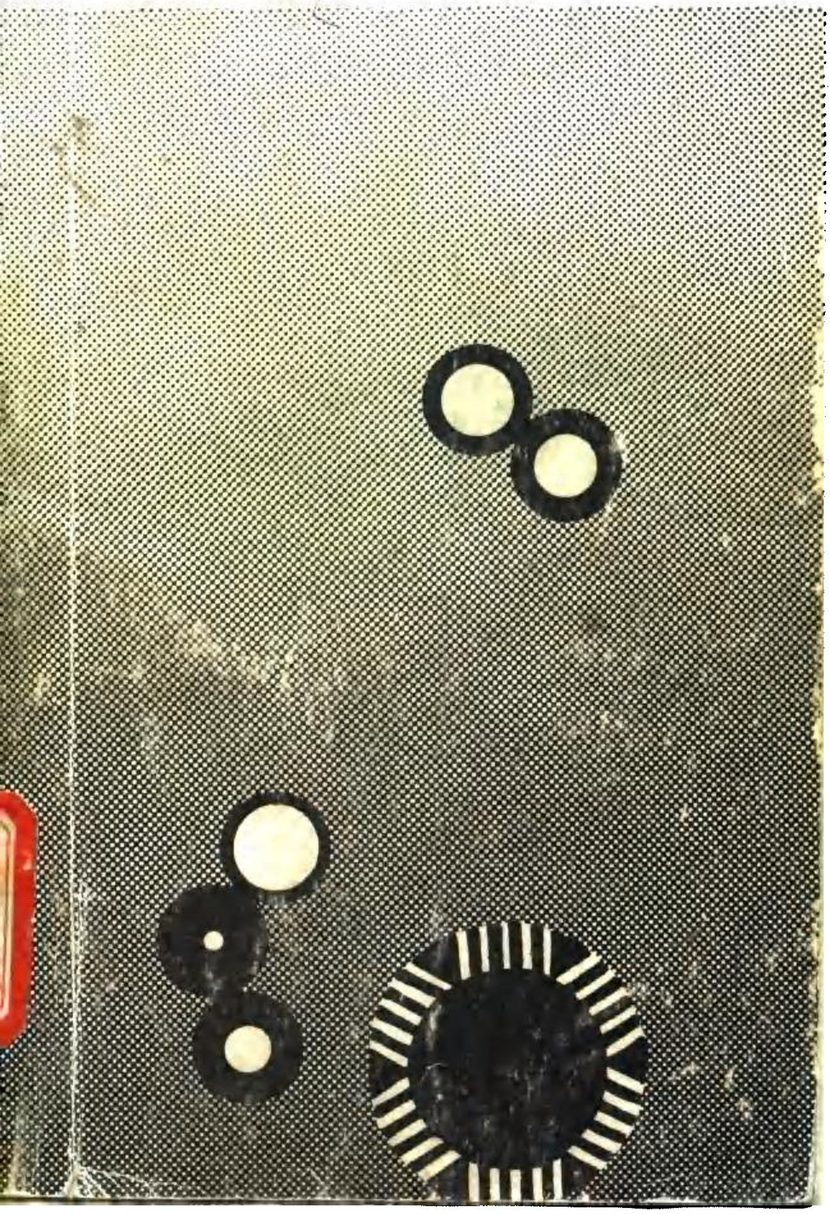
形象·灵感·审美
与数学创造



形象·灵感·审美
与数学创造

郑隆炘 编著
湖北教育出版社

鄂新登字02号

形象、灵感、审美与数学创造

郑隆炘

•

湖北教育出版社出版、发行
（430022·武汉市解放大道新育村63号）
新华书店湖北发行所经销
通山县印刷厂印刷
787×930毫米 32开本 8.5印张 2插页 163 000字
1990年8月第1版 1992年4月第2次印刷
印数：1 001—2 500
ISBN 7—5351—0507—6/O·16
定价：2.90元

内 容 提 要

本书运用数学史的事例，以及初、高等数学的实例，系统地探索数学中的形象思维、灵感思维、审美能力的意义、类型、特点，以及在数学创造活动中的作用；研究数学创造性思维与创造精神；讨论在数学教育改革中如何培养学生的创造性思维能力。

本书立意新颖，史料翔实，论述简明，语言生动，例证典型，深入浅出，具有一定特色。可供大中学教师、大学与高中学生、科研工作者、教学研究人员参考，同时可作为师院、师专、教育学院开设有关课程的教材。

序　言

这本书提出了一个重要问题："数学是怎样创造出来的？"关于数学思维的逻辑方面的研究已经成了一门科学，但是它没有回答上面的问题。用我们通常的话来说："这个定理是怎样想出来的？""这个证明是怎样想出来的？"因为在证明一个定理之前先要知道它；在完成证明之前先要心中有数，即对证明思路大体上先了然于心。

也许这个问题不是一个科学研究的对象，至少在当前还不可能成为一门学问。但是确有一些第一流的数学家写过自己的经验——写得好的应该称为"体验"更恰当。实际上每一个学习数学的人也都一定有自己的想法——可惜绝大多数是不自觉的，至多是朦胧的；因为哪怕是解一个简单的数学题，也是一种小小的创造。就此而写成的书，最为人们所知的大概是G.Polya的几本书，按时间顺序是：《怎样解题》、《数学与猜想》（二册），以及《数学的发现》（二册）。

这些书在教学上是很有用处的。

至于数学与美更是一个“说不清”的问题。爱好数学的人们总会觉得数学是美的。或者因为数学是美的而爱数学，或者因为爱数学而认为数学是美的。总之是不足为外人道，对数学圈子以外的人是怎么也说不清的。但是讨论一下这个问题确实也是有好处的：它可以吸引更多的人到数学中来，也可以提高学数学的人的格调。

由于这些原因，我认为作者写出了这本书是值得感谢的。我知道作者有志于此已有多年，而他的努力是认真严肃的，因此也会引起若干共鸣和反应。这本书的用处首先还是对于教学。只有在创造的过程中才能学会创造。创造性地去教数学或学数学，与被动地、刻板地去教和学是完全不同的。也希望这本书能引起人们对数学提出问题的兴趣，有更多的人来提出自己的看法，把问题的研究深入一步。

但是要预防一种误解，以为念了这本书或者更多的几本书就会“创造”数学，成了数学家。这是绝不可能的。只有付出了艰辛的劳动才能谈得上创造、灵感或美等等。有人说，数学不是看懂的而是做懂的。你想要知道数学是怎么一回

事，唯一的办法是拿起纸和笔实实在在地去读几本书，做几个题目。只有真正动起手来了，才谈得上创造。从这个意义上讲，数学的创造也是不足为外人道的。不但是数学，而且任何一件认真的事都是没有点石成金的诀窍的。

齐民友

1989.10.29.

目　录

第一章 引　　言

研究科学最宝贵的精神之一，是创造的精神，是独立开辟荒原的精神，科学之所以得有今日，多半是得力于这样的精神，在"山穷水尽疑无路"的时候，卓越的科学家往往另辟蹊径，创造出"柳暗花明又一村"的境界。

——华罗庚

数学创造，这是一个使成千上万的青年朋友与从事数学教育、科学研究的人们渴望了解的课题。在数学创造活动中，形象思维、灵感思维、审美能力等因素所起的关键作用，又尤为人们所关注。本书运用数学史和数学本身的实例，探讨数学中的形象思维、灵感思维、审美能力的意义、类型、特点，及其在数学创造活动中的地位与作用，并研究数学创造性思维与创造精神。作者希望这些内容对学数学、教数学、研究数学的朋友们都有所裨益。

§1 从两个数学例子谈起

我们先研究两个数学例子。

一、猴子分苹果

1979年，美籍华裔物理学家李政道(1926～　)访问中国科技大学时，曾给少年班的同学出了这样的一道题："海滩上有一堆苹果，这是5只猴子的财产，它们要平均分配。第一只猴子来了，它把苹果分成5堆，每堆一样多，还剩1个，扔到海里；自己拿5堆中的1堆离去。第二只猴子来了，它又把剩下的苹果平均分成5堆，又多了1个，它又扔掉；拿1堆离去。以后每只猴子来了，都是如此行事。问原来至少有多少苹果？最后至少剩下多少苹果？"这是一道构思巧妙的数学题。如果用列方程的方法去解很困难。由问题的提出人——物理学家狄拉克（P. A. M. Dirac,1902～1984）给出的方法用到齐次方程组与迭代函数等一些高等数学的知识。其实，如果打破习惯性思维，多方位、多侧面、多视角地去进行思维，用算术方法就可以解决此题。不局限于用高等数学方法，而退到最简单的算术方法，从求解思路上看是非常规的，但又是有创见的。

下面先简单介绍一下这种算术方法：

设原有苹果数为N，因为第一只猴子来时，分成一样多的5堆多1个，所以我们加4个"理想"苹果之后，每一等分应为$a=\frac{1}{5}(N+4)$个，第一只猴子拿走$a-1$个。

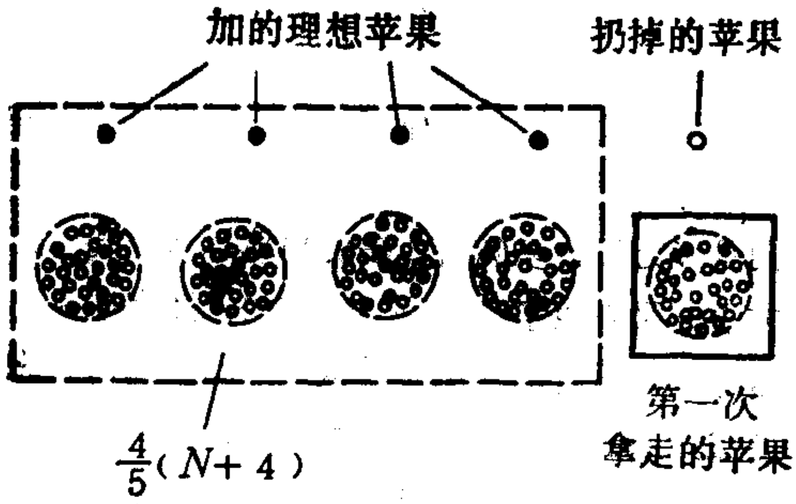


图 1.1

剩下的苹果（包括4个理想苹果）有$\frac{4}{5}(N+4)$个。当然，剩下的实际苹果数应为$\frac{4}{5}(N+4)-4$。我们注意，因为$\frac{4}{5}(N+4)-4$对第二只猴子来说，是可分成一样的5堆多1个的，因此，我们再加4个理想苹果之后，苹果数是5的倍数，即$\frac{4}{5}(N+4)$是5的倍数。第二只猴子拿走$\frac{4}{5^2}(N+4)-1$个，剩下的苹果（包括4个"理想"苹果，以下同）数是$\left(\frac{4}{5}\right)^2(N+4)$。这样继续下去，第五只猴子拿走一份以后，最后剩下的苹果数为$\left(\frac{4}{5}\right)^5(N+4)$。因为这是个整数，所以$N+4$应能被$5^5$整除。故

$N+4$的最小值是$5^5=3125$，即原来N至少有3121个苹果，最后剩下的苹果至少有$4^5-4=1020$个。

现在我们来看看，这种算术解法用到哪些思维方法。首先，在考虑使用哪一种思路方法时，我们不局限于一种，而是多方位、多侧面、多视角地思考，既考虑了列方程的方法，又考虑了高等数学的方法，还考虑到了算术方法。这种突破原有的知识圈，从一点向四面八方想开去的思维方法，实际上是使用的发散思维。其次，我们在用算术方法思考时，曾形象地进行了分堆，其中特别加进4个“理想”苹果，这种靠头脑中再创想象与理想形象进行的思维，就是后面章节我们要讨论的形象思维。第三，整个解题过程，我们是按严格的推理方式，一步接一步、一环套一环地进行的，既用到归纳推理（比如归纳为第5只猴子拿走一堆后剩下的苹果数为$\left(\frac{4}{5}\right)^5(N+4)$），又用到演绎推理，比如推导出$N$至少为3121，剩下苹果数至少为1020。同时，还用到分析与综合、抽象与概括等。这种推理方式就是逻辑思维。上面我们只粗浅地分析了一下，就可以看出算术方法就涉及这么多种思维方法。数学中的思维大多都是多种思维方法极复杂的综合与统一。

二、哈密顿发现四元数

数学史上的重大发现中，有一些是很有趣的。英国数学家哈密顿（W. Hamilton,1805～1865）在19世纪发现四元数就是其中的一例。复数$a+bi$发现以后，哈密顿

于1837年引进实数有序对 (a,b) 来定义它。他这样定义复数的四则运算：

$$(a,\ b)\pm(c,\ d)=(a\pm c,\ b\pm d)$$

$$(a,\ b)\cdot(c,\ d)=(ac-bd,\ ad+bc)$$

$$\frac{(a,\ b)}{(c,\ d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

（c, d不同时为零）

哈密顿定义的复数运算满足交换律、结合律、分配律及其他性质，同时把笼罩在$\sqrt{-1}$上最后一点神秘阴影清除了，因为

$$i=(0,\ 1)$$

按哈密顿定义的乘法规则，

$$\begin{aligned} i^2 &= (0,\ 1)\cdot(0,\ 1)\\ &= (0\times 0-1\times 1,\ 0\times 1+1\times 0)\\ &= (-1,\ 0)=-1 \end{aligned}$$

这样，复数理论的逻辑基础终于在实数基础上完满地建立起来了。这样建立的复数可以叫做二元数或二维数。于是自然就会进一步问：是否存在三维数，以至多维数呢？1837年以后，许多人都试图建立三维数（a, b, c）的理论，但都失败了。问题在于新数要象复数那样进行加、减、乘、除运算；加减法容易推广，乘除法却很困难。哈密顿长期为这个问题所困扰。究竟应该怎么推广二元数（a, b）？他一直在冥思苦索，不放弃对这一课题的研究。1843年10月16日黄昏，哈密顿同妻子一起去都柏林参加一个会议。当步行到勃洛翰桥时，他突然想到：放弃将

(a, b) 推广到 (a, b, c) 的形式的想法，而推广到 $(a, b, c, d)=a+bi+cj+dk$ 的形式如何呢？其中 i，j，k 是虚数单位 i 的推广，并且规定

$$i^2=j^2=k^2=-1$$

$$ij=k,\ jk=i,\ ki=j$$

$$ij=-ji,\ jk=-kj,\ ki=-ik$$

$$ijk=-1$$

这里，牺牲了乘法交换律（因为规定 $ij=-ji, jk=-kj$，$ki=-ik$）。哈密顿十分兴奋，当场记录了他大脑里涌现出的思想的火花。回家之后立即整理。不久后，关于四元数的科学报告就发表了。就是说，经过漫长而艰苦的15年的研究，四元数诞生了。哈密顿后来回忆自己发现四元数的经过时说："明天是四元数的第15个生日。1843年10月16日，当我和妻子步行去都柏林途中，来到勃洛翰桥的时候，它们就来到了人间，或者说出生了，发育成熟了。这就是说，此时此地我感到思想的电路接通了，而从中落下的火花就是 i，j，k 之间的基本方程（恰恰就是我此后使用它们的那个样子）。我当场抽出笔记本，它还在，就将这些做了记录。同一时刻，我感到也许值得花上未来的至少10年（也许15年）的劳动。但当时已完全可以说，这是因我感觉到一个问题就在那一刻已经解决了，智力该缓口气了，它已经纠缠住我至少十五年了。"①哈密顿这段真

① M. 克莱因著，北京大学数学系数学史翻译组译：《古今数学思想》（第三册），上海科学技术出版社，1980年版，第177～178页。

实的回忆，使我们认识到数学家们长期持续的创造性劳动中出现的“突然领悟”或“突然发现”的这种最佳心理状态，不是一般的逻辑思维活动，而是严密逻辑推理与思维的升华，是一种非逻辑的高层次创造活动，科学家们把它叫做灵感思维活动。哈密顿在发现四元数的过程中，数学中对称、和谐等的美感也起了重要作用。从复数（二元数）中的$1=(1,0)$，$i=(0,1)$“平行”猜想出

$$1=(1,0,0,0),\qquad i=(0,1,0,0)$$
$$j=(0,0,1,0),\qquad k=(0,0,0,1)$$

这是追求和谐与完美。四元数的运算牺牲了乘法交换律。哈密顿规定了i，j，k两两相乘时，如果交换位置时，应改变符号：$ij=k=-ji$，$jk=i=-kj$，$ki=j=-ik$。这又是一个轮换对称的形式。为了阐述得更清楚一些，我们将i，j，k围成一个圈，用顺时针方向箭头连结（图 1.2），

图 1.2

规定第一位置乘以第二位置等于第三位置，方向为顺时针时取正号，逆时针时取负号。轮换对称的形式立即被形象地显现。当然，哈密顿的头脑中当时涌现的是否就是这种火花还要进一步研究。但从图1.2看出，一种对称与和谐的美，在发现四元数的过程中起了重要作用。哈密顿以独特的想象、机敏的灵感、生动的美感与较强的审美能力，创造了四元数理论，为数学宝库增添了宝贵的财富。

这两个例子说明，数学中的思维方法远远不仅是严密的逻辑思维，还存在形象思维、灵感思维等非逻辑思维，

以及人的数学美感、审美能力等。在学数学、教数学、研究数学的活动中，它们都起着非常重要的作用。在数学创造活动中，它们甚至起着关键的作用。

§2 数学创造的奥秘

我们在数学杂志、数学文献、数学科学研究报告上看到许多数学创造的成果，经常得到启发与鼓舞。常常不禁要问：这些成果是怎样"想"出来的呢？数学家、数学工作者是如何进行创造活动的？数学创造究竟有什么奥秘？这个问题，对学数学、教数学、研究数学的人们，都是十分感兴趣的。

一、这个问题复杂但又可逐渐认识

数学创造的奥秘问题，的确复杂。首先，数学创造活动过程中，需要涉及许许多多思维方法，而且它们之间立体交叉，呈极复杂的网状形式。对学数学、教数学、研究数学的人都是如此。上一节我们讲述的猴子分苹果与哈密顿发现四元数的例中，就涉及了发散思维与集中思维、逻辑思维与非逻辑思维、数学美感与审美能力等问题。它们究竟如何构成数学创造性思维，以及各自的作用，往往隐蔽在所得的数学推理与成果之中，不是一下子就看得清楚的。其次，数学史千百年来留下了这样的习惯，发表的论文、报告，都是成果型的，几乎通篇都是以严格的证明与推理为基础的概念、定理、法则、公式。而数学家如何创造出这些东西来的，一般不予介绍。这种情况使得了解和研究数学创