高等师范专科学校通用教材

数学分析

下册

中南五省（区）师专《数学分析》教材编写组

广西师范大学出版社

高等师范专科学校通用教材

数学分析

下册

中南五省（区）师专《数学分析》教材编写组

广西师范大学出版社

数 学 分 析
下册
中南五省（区）师专《数学分析》教材编写组
☆
广西师范大学出版社出版发行
（广西桂林市育才路3号）
核工业中南310印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/32 印张 11.25 字数 243千字
1989年2月第1版 1989年2月第1次印刷
印数：00001—10000
ISBN7—5633—0370—7/G·335
定价：2.90元

目　录

第十章　数项级数

§ 1　数项级数的收敛性及其性质……………………………………(1)

一　数项级数的有关概念(1)

二　级数收敛的充要条件(5)

三　收敛级数的性质(7)

练　习 10 · 1(10)

§ 2　正项级数……………………………………………………………(11)

一　正项级数收敛性的一般判别法(11)

二　达朗贝尔判别法与柯西判别法(15)

练　习 10 · 2 (19)

§ 3　一般项级数……………………………………………………………(20)

一　绝对收敛级数(20)

二　交错级数(21)

三　条件收敛级数(24)

练　习 10 · 3(25)

习题十 (26)

第十一章　函数项级数

§ 1　函数项级数的一致收敛性………………………………………(28)

一　函数项级数的概念(28)

二　问题的提出(30)

三　一致收敛概念(31)

练　习 11 · 1(33)

§ 2　函数项级数一致收敛的判别法……………………………(34)
练　习11 · 2(40)
§ 3　一致收敛级数的性质……………………………………(41)
练　习11 · 3(47)
习题十一(48)

第十二章　幂级数

§ 1　幂级数………………………………………………………(50)
一　幂级数的收敛域(50)
二　幂级数的性质(55)
三　幂级数的运算(61)
练　习12 · 1(62)
§ 2　函数的幂级数展开……………………………………………(62)
一　泰勒级数(62)
二　初等函数的幂级数展开式(66)
练　习12 · 2(70)
§ 3　幂级数的简单应用……………………………………………(71)
一　近似计算(71)
二　利用幂级数求数项级数的和(76)
练　习12 · 3(77)
习题十二(78)

第十三章　傅里叶级数

§ 1　傅里叶级数的概念……………………………………………(79)
一　三角函数系的正交性(79)
二　傅里叶系数(80)

三　傅里叶级数的概念（83）

练　习13·1（84）

§2　傅里叶级数的收敛性……………………………………（85）

练　习13·2（88）

§3　函数的傅里叶级数展开……………………………………（89）

一　函数的傅里叶级数展开（89）

二　奇函数、偶函数的傅里叶级数（92）

三　余弦级数、正弦级数（93）

四　以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数（94）

练　习13·3（97）

第十四章　广义积分

§1　无穷积分……………………………………………………（99）

一　无穷积分的概念（99）

二　无穷积分的性质（102）

三　无穷积分与数项级数的关系（103）

四　无穷积分的收敛判别法（104）

练　习14·1（110）

§2　无界函数的积分……………………………………………（111）

一　无界函数积分的概念（111）

二　两种广义积分的关系（114）

三　瑕积分的收敛判别法（116）

练　习14·2（119）

习题十四（119）

第十五章　多元函数及其极限与连续

§1　多元函数概念……（121）
一　平面点集（121）
二　二元函数（126）
三　n维空间与n元函数（128）
练　习15·1（129）
§2　二元函数的极限……（130）
一　二元函数的极限（130）
二　累次极限（136）
练　习15·2（138）
§3　二元函数的连续性……（140）
一　二元函数连续概念（140）
二　二元连续函数的性质（142）
练　习15·3（145）
习题十五（146）

第十六章　多元函数微分学

§1　偏导数与全微分……（148）
一　偏导数（149）
二　全微分（152）
练　习16·1（162）
§2　复合函数微分法……（164）
一　复合函数的求导法则（164）
二　复合函数的全微分（168）
练　习16·2（172）

§ 3　空间曲线的切线与曲面的切平面……………………………（173）

一　空间曲线的切线与法平面（173）

二　曲面的切平面与法线（176）

练　习16・3（181）

§ 4　高阶偏导数与高阶全微分……………………………………（182）

一　高阶偏导数（182）

二　高阶全微分（187）

练　习16・4（189）

§ 5　泰勒公式与极值问题……………………………………………（190）

一　泰勒公式（190）

二　极值问题（194）

练　习16・5（201）

§ 6　隐函数与条件极值…………………………………………………（202）

一　隐函数定理（202）

二　条件极值（207）

练　习16・6（212）

习题十六（213）

第十七章　重积分

§ 1　二重积分概念及性质……………………………………………（215）

一　二重积分的概念（215）

二　二重积分的性质（219）

练　习17・1（221）

§ 2　二重积分的计算…………………………………………………（222）

一　化二重积分为累次积分（223）

二　二重积分的极坐标变换（233）

三　曲面的面积（237）
练　习17・2（240）
§3　三重积分……………………………………………………（242）
一　三重积分概念（242）
二　三重积分的计算（244）
三　三重积分的换元法（248）
练　习17・3（254
习题十七（256）

第十八章　曲线积分和曲面积分

§1　曲线积分……………………………………………………（258）
一　第一型曲线积分（258）
二　第二型曲线积分（264）
练　习18・1（271）
§2　格林公式……………………………………………………（272）
一　沿平面闭曲线的曲线积分（272）
二　格林公式（273）
三　曲线积分与路径无关条件（279）
练　习18・2（286）
§3　曲面积分……………………………………………………（287）
一　第一型曲面积分（287）
二　第二型曲面积分（289）
练　习18・3（298）
§4　奥高公式与斯托克斯公式………………………………（298）
一　奥高公式（298）
二　斯托克斯公式（301）

练　习18 · 4（306）

习题十八（307）

第十九章　含参变量的积分

§ 1　含参变量的定积分……………………………………………（307）

练　习19 · 1（316）

§ 2　含参变量的广义积分…………………………………………（316）

一　含参变量无穷积分的一致收敛性（317）

二　含参变量的无穷积分的分析性质（320）

练　习19 · 2（325）

三　含参变量的无界函数的积分（326）

§ 3　欧拉积分………………………………………………………（327）

一　Γ 函数及其性质（327）

二　B 函数及其性质（328）

练　习19 · 3（332）

习题十九（332）

第二十章　实数理论

§ 1　实数系的基本概念……………………………………………（335）

一　实数的定义（335）

二　实数的大小比较（336）

三　实数的四则运算（339）

§ 2　实数的基本性质………………………………………………（341）

一　实数系是阿基米德有序体（341）

二　实数系的稠密性（343）

三　实数系的完备性和连续性（343）

习题二十（347）

第十章 数项级数

无穷级数是研究函数的一个重要工具。无论在抽象理论中，还是在应用学科中，无穷级数都起着重要的作用。本章介绍数项级数的有关知识，它是学习函数项级数的基础。

§1 数项级数的收敛性及其性质

一 数项级数的有关概念

设有数列$\{u_n\}$，即

$$u_1, \quad u_2, \quad \cdots, \quad u_n, \quad \cdots \tag{1}$$

将数列(1)的项依次用加号连接起来，所得到的表达式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{2}$$

称为**数项级数**，简称**级数**. 表达式(2)常记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

其中u_n称为级数(2)的通项。级数(2)的前n项和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

称为级数(2)的**前n项的部分和**，简称**部分和**.

于是，级数(2)对应着一个部分和数列$\{S_n\}$，即

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

....

我们知道，有限个数相加的结果称为和，它是一个确定的数，即有限个数相加总是有意义的，并且这种加法满足交换律与结合律．无穷级数(2)从形式上看是无限多个数“相加”，这种“相加”的意义是什么？是否也有“和”？这种加法是否也满足上述运算定律？这些都是有待解决的新问题．我们不难设想，若无穷级数(2)的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限时，则此极限值就可作为这无穷多个数相加的“和”。

定义 若级数(2)的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，设

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad (S\text{ 为确定的有限数})$$

则称级数(2)收敛，极限值 S 称为级数(2)的和，记作

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

若级数(2)的部分和数列 $\{S_n\}$ 发散，则称级数(2)发散，这时级数(2)没有和．

例 1 讨论几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的敛散性．

解 因为

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1-r}$$

(1) 若 $|r| < 1$，有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a - ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

因此，几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 收敛，其和是 $\frac{a}{1-r}$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

(2) 若 $|r|>1$，有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a-ar^n}{1-r}=\infty$$

因此几何级数发散.

(3) 若 $|r|=1$，则

当 $r=1$时，几何级数是

$$a+a+\cdots+a+\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na=\infty \quad (a\neq 0)$$

当 $r=-1$时，几何级数是

$$a-a+a-a+\cdots$$

$$S_n=\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}a$$

显然，部分和数列 $\{S_n\}$ 发散.

这就是说，若 $|r|=1$，几何级数发散 .

综上所述，当 $|r|<1$时，几何级数收敛；当 $|r|\geqslant 1$时，几何级数发散.

利用几何级数的求和公式，可将循环小数化为分数. 举两个例子说明如下 .

$$0.\dot{6}=\frac{6}{10}+\frac{6}{10^2}+\frac{6}{10^3}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{10^n}$$

$$=\frac{\frac{6}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{2}{3}$$

$$0.84\dot{3}\dot{6}=\frac{84}{10^2}+\left(\frac{36}{10^4}+\frac{36}{10^6}+\frac{36}{10^8}+\cdots\right)$$

$$=\frac{84}{10^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{36}{10^{2(n+1)}}$$

$$=\frac{84}{10^2}+\frac{\frac{36}{10^4}}{1-\frac{1}{10^2}}$$

$$=\frac{84}{10^2}+\frac{36}{10^2(10^2-1)}$$

$$=\frac{8436-84}{9900}=\frac{232}{275}$$

读者可自行总结出把循环小数化为分数的一般规律。

例 2　证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$收敛，并求其和。

解　因为

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$收敛，其和为1。

例 3　证明调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的。

证　因为调和级数每一项都是正数，所以它的部分和数

列$\{S_n\}$是严格增加的。现讨论数列$\{S_n\}$的子列$\{S_{2^m}\}$即

$$S_2,\ S_4,\ S_8,\ \cdots,\ S_{2^m},\ \cdots$$

由于

$$S_{2^m}=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{2^1\text{ 项}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{2^2\text{ 项}}+\cdots$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^{m-1}+2^{m-1}}\right)}_{2^{m-1}\text{ 项}}$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^m}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right)$$

$$=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{m\text{ 项}}$$

$$=1+\frac{m}{2}$$

$$\lim_{m\to\infty}S_{2^m}\geqslant\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{m}{2}\right)=+\infty$$

故子列$\{S_{2^m}\}$发散，从而数列$\{S_n\}$也发散。根据定义可知调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散。

二 级数收敛的充要条件

因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的收敛性是由它的部分和数列$\{S_n\}$来确定的，所以级数(2)也可作为数列$\{S_n\}$的另一种表现形式。反之，对任一数列$\{S_n\}$，若令

$$u_1=S_1\ ,\quad u_n=S_n-S_{n-1}\ (n=2,3,\cdots)$$

则无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S_1+(S_2-S_1)+\cdots+(S_n-S_{n-1})+\cdots$$

与数列$\{S_n\}$有相同的敛散性，且当数列$\{S_n\}$收敛时，它的极限值就是级数(2)的和。因此由数列的某些结果，可以证明下列关于级数的一些定理。

定理 1（级数的柯西收敛准则） 级数(2)收敛的充要条件是：对任给$\varepsilon>0$，总存在某一自然数N，使得当$n>m>N$时，都有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_n|<\varepsilon \tag{3}$$

这个定理可以改述如下：

定理 1′ 级数(2)收敛的充要条件是：对任给$\varepsilon>0$，总存在某一自然数N，使当$n>N$时，对一切自然数p，都有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon \tag{4}$$

若级数(2)收敛，由定理1,对任一正数ε，在(3)式中取$m=n-1$，就有$|u_n|<\varepsilon$，从而有下面的结论。

推论（级数收敛的必要条件） 级数(2)收敛的必要条件是：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$。

通项趋于零仅是级数收敛的必要条件,而不是充分条件。例如,调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$,虽然通项$\dfrac{1}{n}$趋于零，但它却是发散的。

与推论等价的命题是：如果$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$,则级数(2)发散。

我们常用这个结论来判定级数发散。例如级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}$

因$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$，所以此级数发散。

例 4 应用柯西收敛准则证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$的收敛性。

证 因为对一切自然数p，都有

$$
\begin{aligned}
&|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|\\
&=\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\right|\\
&<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\\
&=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)\\
&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

所以对任给$\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当$n>N$时，对一切自然数$p$，都有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$$

于是，由定理1′可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛。

三 收敛级数的性质

定理 2 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛，且其和分别为$S$与$T$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$也收敛，且其和为$S\pm T$。即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n$$

证 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$的前$n$项部分和分别是$S_n$、$T_n$与$A_n$，显然有