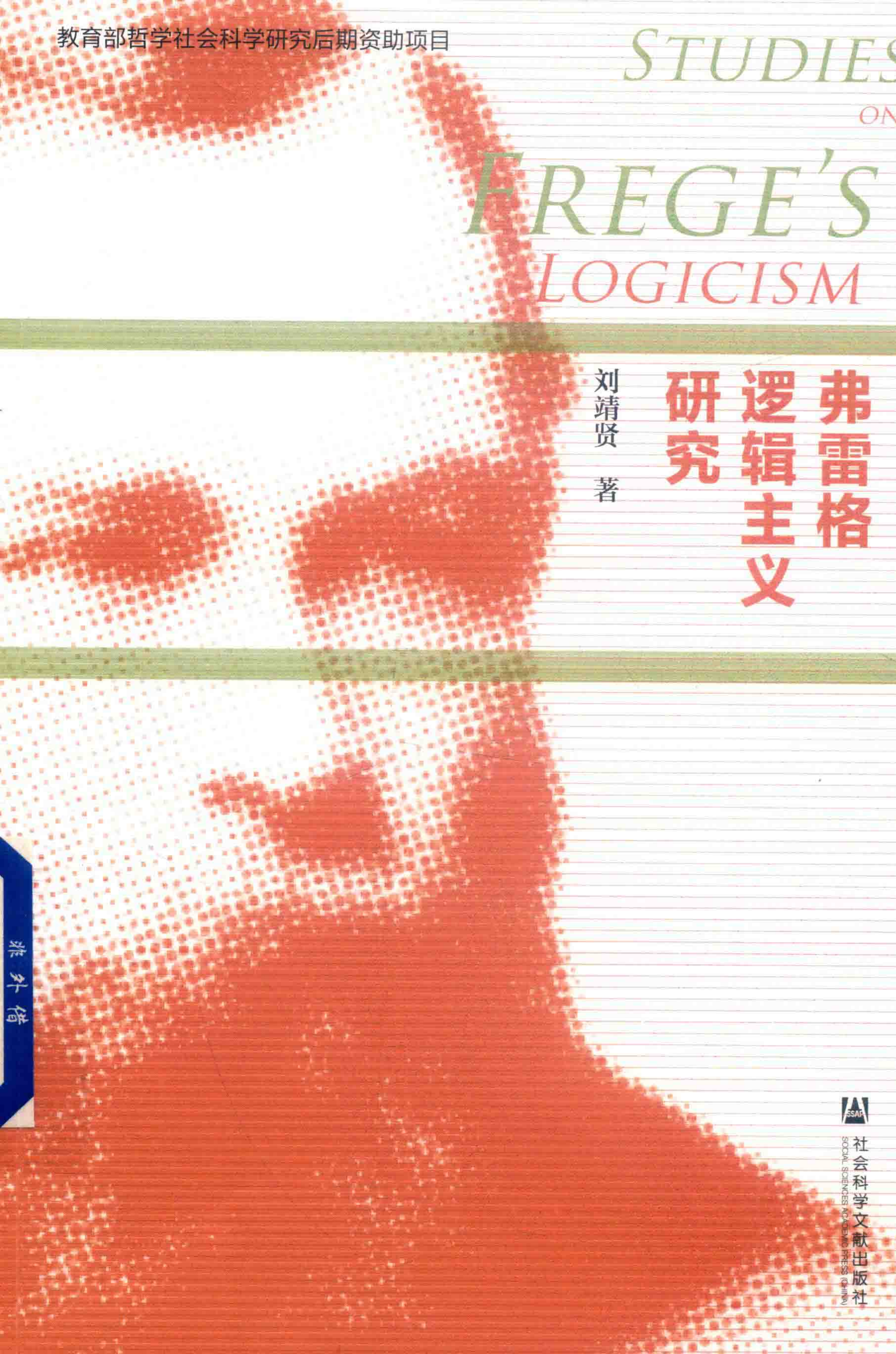
教育部哲学社会科学研究后期资助项目



STUDIES ON FREGE'S LOGICISM

弗雷格逻辑主义研究

刘靖贤 著

SSAP
社会科学文献出版社
SOCIAL SCIENCES ACADEMIC PRESS (CHINA)

教育部哲学社会科学研究后期资助项目

弗雷格逻辑主义研究

STUDIES ON FREGE'S LOGICISM

刘靖贤　著

社会科学文献出版社
SOCIAL SCIENCES ACADEMIC PRESS (CHINA)

图书在版编目(CIP)数据

弗雷格逻辑主义研究 / 刘靖贤著. -- 北京：社会科学文献出版社，2020. 3

ISBN 978 - 7 - 5201 - 5973 - 9

Ⅰ. ①弗… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①弗雷格（Frege, Gottlob 1848 - 1925）- 逻辑哲学 - 研究 Ⅳ. ①B81 - 05

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2020）第 012085 号

弗雷格逻辑主义研究

著　　者 / 刘靖贤

出 版 人 / 谢寿光
责任编辑 / 刘同辉
文稿编辑 / 单远举

出　　版 / 社会科学文献出版社（010）59367238
地址：北京市北三环中路甲 29 号院华龙大厦　邮编：100029
网址：www. ssap. com. cn
发　　行 / 市场营销中心（010）59367081　59367083
印　　装 / 三河市尚艺印装有限公司

规　　格 / 开　本：787mm × 1092mm　1/16
印　张：14. 25　字　数：217 千字
版　　次 / 2020 年 3 月第 1 版　2020 年 3 月第 1 次印刷
书　　号 / ISBN 978 - 7 - 5201 - 5973 - 9
定　　价 / 89. 00 元

本书如有印装质量问题，请与读者服务中心（010 - 59367028）联系

教育部哲学社会科学研究后期资助项目
“弗雷格逻辑主义研究”(14JHQ006)

弗雷格著作缩写

CN	*Conceptual Notation and Related Articles*, ed. and trans. with a biog. and introd. by T. W. Bynum, Oxford: Oxford University Press.
Gl	*Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau: W. Koebner. *The Foundations of Arithmetic*, J. L. Austin (trans.), Oxford: Blackwell.
Gg Ⅰ	*Grundgesetze der Arithmetik*, begriffsschriftlich abgeleitet, Jena: H. Pohle, Vol. Ⅰ. *The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System*, ed. and trans. with an introd. by Montgomery Furth, Los Angeles: University of California Press.
Gg Ⅱ	*Grundgesetze der Arithmetik*, begriffsschriftlich abgeleitet, Jena: H. Pohle, Vol. Ⅱ.
PW	*Posthumous Writings*, trans. by P. Long and R. White, Oxford: Blackwell.
PMC	*Philosophical and Mathematical Correspondence*, B. McGuinness (ed.), H. Kaal (trans.), Oxford: Blackwell.
CP	*Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*, B. McGuinness (ed.), M. Black et al. (trans.), Oxford: Blackwell.

目　录

弗雷格著作缩写 …… I

导　言 …… 001

第一章　从逻辑到算术 …… 011

第一节　逻辑 …… 011

第二节　算术 …… 019

第二章　《概念文字》中的形式证明 …… 025

第一节　定理 98（§§ 23－28） …… 025

第二节　定理 133（§§ 29－31） …… 028

第三章　《算术基础》中的形式证明 …… 033

第一节　等数关系（§§ 70－73） …… 033

第二节　零、后继关系和祖先关系（§§ 74－81） …… 036

第三节　在自然数序列中不存在最大数（§§ 82－83） …… 039

第四章　《算术基本规律》中的形式证明 …… 043

第一节　符号（第一卷 §§ 1－25） …… 044

第二节　公理和规则（第一卷 §§ 47－48） …… 046

第三节　主要定义（第一卷 §§ 34－46） …… 049

第四节　主要定理（第一卷 §§ 54－179 和第二卷 §§ 1－54） …… 052

第五节　罗素悖论（第二卷后记） …… 055

第五章　改变抽象原则 …… 058
第一节　修正的第五公理 …… 058
第二节　休谟原则 …… 062
第三节　新公理 …… 065

第六章　区分抽象原则 …… 069
第一节　保守性 …… 069
第二节　稳定性 …… 074
第三节　强保守性 …… 078
第四节　良莠不齐问题的哲学意义 …… 083

第七章　限制经典逻辑 …… 088
第一节　二阶直谓逻辑 …… 088
第二节　二阶正逻辑 …… 097
第三节　二阶分层概括 …… 104

第八章　修正经典逻辑 …… 111
第一节　二阶多值逻辑 …… 111
第二节　二阶模态逻辑 …… 118

第九章　凯撒与数 …… 125
第一节　数的定义 …… 125
第二节　莱特和赫克的解决方案 …… 128
第三节　新的解决方案 …… 131
第四节　凯撒问题的扩展 …… 135

第十章　凯撒与外延 …… 149
第一节　公理和定义 …… 149
第二节　从公理和定义的角度看凯撒问题 …… 153
第三节　概念的来源与同一 …… 158
第四节　自然语言的误导 …… 164

第十一章 真值问题 …… 168
第一节 弗雷格的概念文字有没有语义学 …… 168
第二节 塔斯基的真定义是不是语义学 …… 172
第三节 对当代多元真理论的批判 …… 176
第四节 分层真理论 …… 182

第十二章 涵义问题 …… 188
第一节 克里普克之前的争论 …… 188
第二节 克里普克的解决方案 …… 192
第三节 语法涵义、认知涵义和逻辑涵义 …… 199
第四节 不存在涵义无穷分层问题 …… 205

参考文献 …… 210

致 谢 …… 219

导 言

弗雷格是数理逻辑的创始人和分析哲学的奠基人，然而他的大部分工作都致力于研究一种被称为逻辑主义的数学哲学。这种哲学把算术还原为逻辑，也就是说，用逻辑符号定义算术符号，从逻辑公理推出算术公理，从而通过逻辑的分析性和先天性来保证算术的分析性和先天性，把算术建立在可靠的基础上。

为了执行其逻辑主义方案，弗雷格在《概念文字》中设计了一种不同于亚里士多德逻辑和布尔逻辑的新逻辑系统，这个系统实质上是二阶逻辑，它不仅包括一阶量化，也包括二阶量化，还隐含地使用了与概括公理等价的代入规则。概括公理是说，任意可表达公式都可以断定概念的存在：

$$\exists X\ \forall x(Xx \leftrightarrow \phi(x)) \quad \text{其中 } X \text{ 不在} \phi(x) \text{ 中自由出现}$$

后来，弗雷格又在《算术基础》中分析了数的概念，给出了数的定义（包括隐定义和显定义），并且以非形式化的方式说明如何在概念文字中从数的定义推出数的规律。《算术基本规律》是弗雷格逻辑主义的最终成果，他给出了一个严格的形式系统，这个系统实质上是由二阶逻辑和第五公理构成的理论。弗雷格在这个系统中推导出了关于自然数的规律。第五公理是说，两个概念的外延相同当且仅当这两个概念等价：

$$\varepsilon F = \varepsilon G \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$$

其中，ε是外延算子。然而，正当弗雷格从关于自然数的规律转向关于实数的规律时，罗素在弗雷格的系统中发现了悖论。罗素悖论根源于概括公

理和第五公理的不一致性。

长久以来，人们一直认为，罗素悖论彻底瓦解了弗雷格的逻辑主义。然而，20世纪80年代，人们发现在弗雷格那里隐藏着一个重要结论：从休谟原则可以推导出算术的规律。休谟原则是说，两个概念的数相同当且仅当存在这两个概念之间的一一对应：

$$\#F = \#G \leftrightarrow F \approx G$$

其中，#是数算子，≈是 F 和 G 之间的等数关系。休谟原则和第五公理都被称为抽象原则，它们具有如下共同形式：

$$\S F = \S G \leftrightarrow \Sigma(F, G)$$

其中，§是抽象算子，$\Sigma(F, G)$ 是 F 和 G 之间的等价关系。后来的研究结果表明，休谟原则与二阶逻辑是一致的，并且从二者可以推出皮亚诺算术公理。这一结果被称为弗雷格定理，它引发了新弗雷格主义（也被称为新逻辑主义或新抽象主义）的兴起。人们把由休谟原则和二阶逻辑构成的理论称为弗雷格算术。新弗雷格主义认为，如果弗雷格用休谟原则取代第五公理，就可以实现其逻辑主义方案。然而，弗雷格的目标是为算术奠定认识论基础，从逻辑规律推出算术规律，从而用逻辑的认识论地位保证算术的认识论地位，即通过逻辑的分析性和先天性保证算术的分析性和先天性。即使成功地把算术公理还原为二阶逻辑和休谟原则，仍然需要说明二阶逻辑和休谟原则的认识论地位。也就是说，二阶逻辑是不是纯粹逻辑，休谟原则是否具有分析性和先天性仍然有待进一步论证。与此相关，既然弗雷格本人已经证明了弗雷格定理，那么他本人为什么不放弃第五公理转而诉诸休谟原则呢？

新弗雷格主义围绕休谟原则展开了许多争论，这些争论主要分为两类：一类与凯撒问题（Caesar Problem）相关，另一类与良莠不齐反驳（Bad Company Objection）相关。凯撒问题是说，如何确定任意对象（例如，凯撒）是不是一个数。如果对象 a 形如#F，则根据休谟原则可以确定 a 是否与某个概念的数相同；否则，不能确定 a 是否与某个概念的数相同。良莠不

齐反驳是说，如何把可接受的抽象原则与不可接受的抽象原则区别开来。休谟原则与二阶逻辑是一致的，所以它是合理的抽象原则。但是，第五公理与二阶逻辑是不一致的，所以它不是合理的抽象原则。

从弗雷格的逻辑主义到新弗雷格主义或新逻辑主义的发展过程表明，弗雷格的思想并没有过时，他的工作在当代哲学和逻辑研究中仍然具有举足轻重的意义。本书将对弗雷格的逻辑主义进行系统性研究，以当代新弗雷格主义及其相关争论为出发点，还原弗雷格本人的逻辑主义思想。除第一章（从逻辑到算术）作为预备性的知识介绍外，全书可以概括地划分为三个部分。第一部分是历史性工作，主要围绕弗雷格的三本著作展开，用现代逻辑符号重构出弗雷格本人的公理、规则、定义和定理。这部分内容包括第二章（《概念文字》中的形式证明）、第三章（《算术基础》中的形式证明）和第四章（《算术基本规律》中的形式证明）。第二部分是技术性工作，主要围绕罗素悖论展开，分别针对第五公理和概括公理给出避免罗素悖论的方案。这部分内容包括第五章（改变抽象原则）、第六章（区分抽象原则）、第七章（限制经典逻辑）和第八章（修正经典逻辑）。第三部分是哲学性工作，主要围绕凯撒问题展开，分别讨论数、外延、真值以及涵义在弗雷格逻辑和哲学中的重要作用。这部分内容包括第九章（凯撒与数）、第十章（凯撒与外延）、第十一章（真值问题）和第十二章（涵义问题）。

下面简述各章内容。

第一章（从逻辑到算术）介绍与二阶逻辑和二阶算术相关的背景知识。第一节介绍二阶逻辑的语言、演绎系统、语义和元理论。对一阶逻辑进行扩张可以得到自由变元逻辑、标准二阶逻辑和分支二阶逻辑。二阶逻辑的语义包括标准语义和非标准语义（亨金语义和一阶多类语义）。第二节介绍一阶算术与二阶算术的分层，包括 Robinson 算术、Nelson - Wilkie 算术、Kalmar 算术、Gentzen 算术、Grzegorczyk 算术、Parsons 算术、Ackermann 算术、一阶算术、直谓算术、非直谓算术、二阶算术等。

第二章（《概念文字》中的形式证明）用现代逻辑的符号重构出弗雷格在《概念文字》中的主要结论及其证明过程。《概念文字》第三部分的主要

内容是证明命题98和命题133。命题98是说，如果在f序列中y在x之后，并且在f序列中z在y之后，则在f序列中z在x之后。可以不严格地把命题98表述为：

$$x < y \rightarrow (y < z \rightarrow x < z)$$

命题133是说，如果步骤f是多对一的，并且m和y在f序列中在x之后，则y属于以m为起点的f序列，或者y在f序列中在m之前。可以不严格地把命题133表述为：

$$x < m \rightarrow (x < y \rightarrow y < m \vee m \leqslant y)$$

弗雷格的目的是，在纯粹逻辑的基础上证明这两个通常看来必须依赖于直观才能证明的命题。

第三章（《算术基础》中的形式证明）用现代逻辑的符号重构出弗雷格在《算术基础》中的主要结论及其证明过程。《算术基础》第四章第三部分（§§70－83）的主要内容是证明任何一个自然数后面都跟随另一个自然数。首先，弗雷格定义了等数关系（一一关联）、后继关系（在数序列中紧跟着）、强祖先关系（在数序列中后于或先于）和弱祖先关系（属于以某个数为起点或终点的序列）。然后，根据这些定义，弗雷格证明了皮亚诺算术中的后继公理，即任何数都在数序列中被另一个数紧跟着。也就是说，在数序列中不存在最大数。这个证明过程实质上是把属于“在数序列中先于n”这个概念的数看作在数序列中紧跟着n的数。

第四章（《算术基本规律》中的形式证明）用现代逻辑的符号重构出弗雷格在《算术基本规律》中的公理、规则、定义和定理。《算术基本规律》包括六条公理，分别是关于否定、蕴涵、量词、等词、值域（外延）和定冠词的公理；也包括一系列推理规则，如子部分互换规则、假言易位规则、子部分合并规则、从罗马字母到德文字母的转换规则、第一推理规则、第二推理规则、第三推理规则、罗马字母的代入规则、德文字母改写规则、希腊元音字母改写规则等；还包括一系列定义，如应用算子、双值域的多对一性、双值域的多对一关联性、双值域的逆、数算子、0、1、后继关系的双值

域、强祖先关系的双值域、弱祖先关系的双值域、无穷数、序对等。在《算术基本规律》第二部分“自然数规律的证明”中，弗雷格一共证明了484个关于自然数的定理，主要有休谟原则、后继关系的双值域的多对一性、后继关系的逆的双值域的多对一性、关于0的规律、关于1的规律、关于有穷数的规律、关于计数的规律、关于无穷数的规律等。

既然罗素悖论的根源是概括公理与第五公理的冲突，或者是二阶逻辑与抽象原则的冲突，那么避免罗素悖论的方案大致可以划分为两类：一类是让抽象原则顺从于二阶逻辑，通过弱化抽象原则来避免悖论；另一类是让二阶逻辑顺从于抽象原则，通过弱化二阶逻辑来避免悖论。本书第五章和第六章考虑前一类方案，第七章和第八章考虑后一类方案。

第五章（改变抽象原则）主要评述三种通过改变抽象原则来避免罗素悖论的方案。第一种方案是弗雷格本人提出的，他建议把第五公理修改为：

$$\varepsilon F = \varepsilon G \leftrightarrow \forall x(x \neq \varepsilon F \wedge x \neq \varepsilon G \rightarrow (Fx \leftrightarrow Gx))$$

这个方案是弗雷格在遭遇罗素悖论后提出的补充方案，但后来的研究表明，这个方案并不能避免罗素悖论。第二种方案是用休谟原则替代第五公理。休谟原则是弗雷格本人提出的，但他并没有用休谟原则替代第五公理，莱特在弗雷格的《算术基础》中重新发现了休谟原则，由此提出了所谓新弗雷格主义。第三种方案是布勒斯提出的，他建议把第五公理修改为新公理：

$$^{*}F = {}^{*}G \leftrightarrow (\mathrm{Small}(F) \vee \mathrm{Small}(G) \rightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx))$$

布勒斯证明新公理与二阶逻辑是一致的。

第六章（区分抽象原则）主要评述良莠不齐问题。第五公理、休谟原则和新公理都是抽象原则，既然有些抽象原则与二阶逻辑一致，有些抽象原则与二阶逻辑不一致，那么是否存在一个标准，能够把好的抽象原则与坏的抽象原则区别开来，这就是所谓良莠不齐问题。新弗雷格主义者提出了一系列区分抽象原则的标准，如一致性、保守性、稳定性等。虽然这些标准极大地深化了我们对抽象原则的理解，但是这些标准都面临着已知的或潜在的反例的挑战，都没能最终解决良莠不齐问题。笔者认为，弗雷格逻辑主义的实

质是从第五公理（概括或外延的规律）推出休谟原则（数的规律），用休谟原则取代第五公理的做法违背了弗雷格的基本精神，所以笔者从改变抽象原则的方案转向限制二阶逻辑的方案。

第七章（限制经典逻辑）主要讨论三种通过限制二阶逻辑的概括公理来避免罗素悖论的方案。第一种方案是直谓概括公理，这是由新弗雷格主义者提出的。笔者的工作是揭示出直谓概括公理的局限性，即从直谓概括公理与公理版本的第五公理不能推出休谟原则。第二种方案是正概括公理，这是笔者在司寇伦等人工作的基础上提出的。虽然目前看来正概括公理还不足以实现弗雷格的逻辑主义方案，但笔者认为，在突破某些技术性瓶颈之后，这个方案的未来前景是光明的。第三种方案是分层概括公理，这是笔者在蒯因等人工作的基础上提出的。虽然与前两种方案相比这个方案可以推出更多的数学内容，但是由于一阶分层概括的一致性问题尚未解决，二阶分层的一致性仍然是一个开放问题。

第八章（修正经典逻辑）主要讨论在非经典逻辑的背景下如何避免罗素悖论。在弗雷格的逻辑系统中，他使用了三个逻辑常项，即否定、蕴涵和全称量词。通过改变这三个逻辑常项的意义，我们可以从经典逻辑得到非经典逻辑。例如，把二值否定修正为三值否定，由此得到多值逻辑；把实质蕴涵修正为严格蕴涵，由此得到模态逻辑；把有存在预设的量化修正为无存在预设的量化，由此得到自由逻辑。为了避免罗素悖论，本章给出了两种非经典逻辑方案，一种是基于三值原则的弗协调逻辑方案，另一种是基于严格蕴涵的模态逻辑方案。虽然这两种方案都可以避免罗素悖论，但是由于非经典逻辑的有限推理能力，这些非经典逻辑方案都不足以推出有实质内容的数学理论。

为数学奠定基础是弗雷格的哲学理想，在他执行逻辑主义方案的过程中还伴随着早期对心理主义的批判以及晚年的第三域思想。虽然晚年的弗雷格认识到其逻辑主义的失败，但他仍然坚信数学和逻辑的客观性。他所设定的第三域不仅包括真值和外延，也包括数和涵义。他认为，这些东西虽然不存在于物理世界，但仍然具有客观性。本书第九章至第十二章分别讨论数、外

延、真值和涵义。

第九章（凯撒与数）主要讨论与数相关的凯撒问题。弗雷格放弃了用休谟原则取代凯撒问题，其根本原因是休谟原则不能解决凯撒问题。凯撒问题是说，休谟原则不能确定任意一个对象是不是一个数。本章详细考察了弗雷格在给出数的定义时如何提出凯撒问题，在此基础上评述了各种解决凯撒问题的方案，包括莱特的方案、赫克的方案、林奈博的方案、乌兹奎亚纳的方案和库克的方案，也包括笔者的解决方案。但笔者认为，如果从弗雷格的角度看，这些解决方案都不能令人满意，这似乎使得凯撒问题成为不可解的谜题。然而，无论如何，从当代哲学的视角看，凯撒问题深化了我们对形而上学、认识论和语义学的理解，在笔者看来，甚至当代分析哲学许多热点问题都在某种程度上体现了凯撒问题。

第十章（凯撒与外延）主要讨论与外延相关的凯撒问题。新弗雷格主义者认为，虽然休谟原则不能解决凯撒问题，但是第五公理也不能解决凯撒问题。也就是说，第五公理不能确定任意一个对象是不是一个外延。针对这个责难，笔者详细考察了弗雷格关于公理和定义的论述，在此基础上论证了如下观点：根据弗雷格的公理观和定义观，他把第五公理看作公理，作为公理的第五公理并不面临凯撒问题的挑战，但是休谟原则无论作为公理还是作为定义都不能回避凯撒问题的挑战。笔者认为，第五公理并不是关于外延的公理，而是关于概念的公理。为此，笔者详细考察了弗雷格的概念观，特别是他关于概念来源以及概念同一性标准的看法。

第十一章（真值问题）主要讨论弗雷格的真理论。“真”是一个语义概念，但弗雷格本人并没有在严格意义上发展出塔斯基所建立的形式语义学。在当代真理论关于紧缩论与膨胀论之间的争论中，许多学者把弗雷格和塔斯基看作紧缩论的先驱。但笔者认为这是一种误解。实际上，从弗雷格的相关论述本身并不能得出紧缩论，从塔斯基的真定义本身也不能得出紧缩论。与此同时，在对当代多元真理论进行批判考察的基础上，笔者认为，以多元真理论为代表的膨胀论并不是真正的实质真理论，它们面临着与凯撒问题类似的混合问题的挑战。虽然弗雷格本人并没有亲自看到塔斯基的真定义，但笔

者认为，弗雷格或许对这个定义采取有限度的认可态度。最后，从弗雷格的视角出发，在融合塔斯基真理论的基础上，笔者提出了一种新的真理论，即分层真理论。

第十二章（涵义问题）主要讨论弗雷格的涵义理论。弗雷格认为，名称既有指称也有涵义。由此他被看作语言哲学中描述理论的先驱。但是描述理论遭到以克里普克为代表的指称理论的激烈批评，指称理论认为名称只有指称，没有涵义。在数学哲学中，弗雷格通过概念的分层以及外延的迭代来说明可数无穷多个数的存在。与此类似，在语言哲学中，在间接引语中所发生的指称转移现象也导致涵义的迭代，这在文献中被称为涵义无穷分层问题。本章首先简要回顾卡尔纳普、戴维森、达米特、卡普兰、丘奇以及伯奇关于涵义无穷分层问题的观点，在此基础上详细考察了克里普克对这个问题的解决方案。笔者的观点是，克里普克的方案是对弗雷格的误解，实际上，在弗雷格那里根本不存在涵义无穷分层问题。笔者从弗雷格本人关于涵义的论述出发，利用演绎定理，给出了一种消解涵义无穷分层问题的方案。

从整体上看，除了预备性的知识介绍（第一章）以及历史性的铺垫工作（第二章至第四章）外，本书主要由两大部分构成：逻辑部分（第五章至第八章）和哲学部分（第九章至第十二章）。从表面上看来，本书的逻辑部分所面对的核心问题是，如何在避免悖论的前提下找到一种解决方案从而实现弗雷格的逻辑主义。本书不仅回顾了已有的解决方案（例如，休谟原则和直谓逻辑），而且给出了一些新的方案（例如，正逻辑和分层概括）。然而，这些方案都不能完美地实现弗雷格的逻辑主义：要么这些方案的一致性是尚未解决的开放性问题，要么这些方案本身不能推导出足够多的算术内容。罗素悖论的解决并不是一个简单的问题，它是困扰整个 20 世纪数学哲学的难题。虽然从纯粹一致性角度考虑，人们可以提出许多解决罗素悖论的方案，但是也付出了沉重的代价，要么其所修改的非逻辑公理具有特设性，要么其所修改的逻辑系统变得非常弱，以至于偏离了通常意义上的数学推理。实际上，本书所提出的各种各样的解决罗素悖论的方案并不是为了实现逻辑主义，而是为了指明，罗素悖论的解决依赖于固定点定理（又称为不

动点定理）。换言之，构造罗素悖论的对角线定理与消解罗素悖论的固定点定理是一个问题的两个方面。也就是说，人们多大程度上能够完美地消解罗素悖论取决于人们在多大程度上理解和运用固定点定理。

例如，罗素悖论所依赖的对角线结构来源于康托定理。康托定理是说，一个集合 A 的基数与其幂集 $\wp(A)$ 的基数是不相等的，或者说，不存在 $\wp(A)$ 和 A 之间的一一对应，即 $\wp(A) \neq A$。而罗素悖论的消解取决于是否能够绕开这种对角线结构。如果把 $\wp(A)$ 限制为它的真子集 $\wp'(A)$，则有可能找到 $\wp'(A)$ 和 A 之间的一一对应，即 $\wp'(A) \approx A$。固定点定理恰好断言，满足什么样条件的函数存在固定点，即 $f(x) = x$。如果把 $\wp'$ 看作函数 f，把等数（$\approx$）看作相等（$=$），那么罗素悖论的消解实质上是寻找固定点，也就是说，$\wp'(A) \approx A$ 与 $f(x) = x$ 具有相同的形式。本书所给出的二阶正逻辑方案以及二阶多值逻辑方案都依赖于完备度量空间上的巴拿赫固定点定理。

本书的哲学部分是以凯撒问题为核心而展开的。从表面上看来，凯撒问题是说，如何区分（作为日常对象或具体对象的）凯撒与（作为数学对象或抽象对象的）数，这是弗雷格在《算术基础》一书中针对休谟原则而提出的。然而，凯撒问题并不仅仅与数有关，还与任何弗雷格式的通过抽象主义方式把数学还原为逻辑的方案有关。弗雷格为数学奠定基础的做法实际上是建立一种数学本体论，与此同时，通过数学公理来实现这种数学本体论的认识论通达。也就是说，通过数学公理给出通达数学对象的同一性标准，换言之，数作为数学对象究竟是不是凯撒。因此，弗雷格需要以凯撒这样的具体对象为参照系，来考察数学对象与具体对象的同一和差异。弗雷格在执行逻辑主义的还原方案时，又试图通过逻辑的本体论为数学本体论奠定基础，与此同时，通过逻辑公理来实现这种逻辑本体论的认识论通达。也就是说，通过逻辑公理给出通达逻辑对象的同一性标准，换言之，外延作为逻辑对象究竟是不是凯撒。因此，弗雷格仍然需要以凯撒这样的具体对象为参照系，来考察逻辑对象与具体对象的同一和差异。弗雷格不仅把数学对象还原为逻辑对象，而且把逻辑对象还原为概念，也就是说，数（作为数学对象）是