工科研究生用书

庄楚强　吴亚森　编

应用数理统计基础

华南理工大学出版社

工科研究生用书

应用数理统计基础

庄楚强　吴亚森　编

华南理工大学出版社

内 容 简 介

本书是在华南理工大学硕士研究生公共课程《数理统计的理论与方法》讲义基础上，经多年使用后进一步修改、补充而编成出版。全书共六章，主要内容有：概率论的复习与补充，数理统计的基本概念与抽样分布，参数估计，假设检验，回归分析，方差分析与正交试验。书中有较多例题，各章配有习题，书末附有答案。

本书可作为高等工科院校非数学专业的硕士研究生的数理统计课教材，也可作为本科生为了拓宽和加深概率论与数理统计课所学内容的参考书，还可作为科技人员自学用书。

[粤] 新登字 12 号

工科研究生用书

应用数理统计基础

庄楚强　吴亚森　编

责任编辑　林炳清

华南理工大学出版社出版发行

(广州 五山)

广东省新华书店经销

达华电子有限公司电脑激光排版

广州利达印刷厂印装

开本 850 × 1168　1/32　印张 18.5　字数 474 千

1992 年 11 月第 1 版　　1992 年 11 月第 1 次印刷

印数　1 — 1000

ISBN 7 — 5623 — 0337 — 1/O · 31(课)

定价：5.60 元

出 版 说 明

研究生教材建设是研究生教育的基础工程，是提高研究生教学质量的重要环节。自1978年恢复招收研究生以来，我校先后编写了多种供研究生使用的教材和教学参考书，有的已正式出版，但更多的是采用讲义形式逐年印发。为满足研究生教育事业发展的需要，我校决定出版"工科研究生用书"系列教材。

"工科研究生用书"以公共课和部分学术专著为主，专业学位课程将根据学科设置和国内相同学科的需求情况有计划地分批出版。

我们希望，本系列教材能从研究生的教学需要出发，根据各门课程在教学过程中的地位和作用，既包含本门课程的基本内容，又反映我校工科研究生的特点，并在该学科领域内求新、求深、求精，使学生掌握必须的基础理论和专门知识。学位课教材还要包含学科前沿和交叉学科的丰富内容，反映国内外最新研究成果，学术思想活跃，适应目前科学技术发展的形势。学术专著则应充分反映作者的研究成果和学术水平，阐述自己的学术见解，对实现研究生的培养目标，提高教育质量起重大作用。

"工科研究生用书"的内容结构和阐述方法，力求条理清楚，论证严谨，具有科学性、系统性和先进性。

由于我校研究生教材建设起步较晚，限于我们的水平和经验，本系列教材难免有错误和不足之处，恳请读者指正，我们将非常感谢。

华南理工大学研究生处

1992年3月

前　言

数理统计是应用数学中最重要、最活跃的学科之一，它的应用越来越广泛深入，在国民经济和科学技术中的地位越来越显得重要。因此，作为科学和工程技术人员，特别是工科硕士研究生，应该具备数理统计的基本知识。本书是根据工科硕士研究生的特点，结合我校十多年来对该门课程的教学实践编写而成的。本书可作为工科硕士研究生应用数理统计课程的教材，也可作为工科院校大学生学习数理统计课程的教学参考书，还可作为科学、工程技术人员的自学读物。

本书着重介绍各种基础的、常用的数理统计方法，特别注意讲明各种方法的背景、应用条件及数学结论的实际含义，给出必要的数学推导，力求解释清楚，便于自学。各种方法都举出应用实例，并详细解答。每章后附有一定数量的练习题，书末给出了答案。

本书§3.4、§5.4两节由吴亚森执笔，其余由庄楚强执笔。书稿虽经多次修改，但限于编者的水平，仍会有缺点和错误，敬请专家和读者批评指正。

本书的出版，得到华南理工大学研究生处、应用数学系的大力支持和鼓励，以及华南理工大学出版社的通力协作。贺德化教授审阅了部分手稿，并提出了宝贵意见。在此一并表示谢意。

编　者

1991.9.9

目　　录

第一章　概率论复习与补充

概率论是数理统计的理论基础，为了使它们能更好地衔接起来，本章扼要地复习概率论的基本概念、定理与公式，并补充了特征函数等工程数学中不讲授的内容.

§1.1　概率空间

一、基本空间与事件域

设 E 是一个随机试验，E 的每一个不能再分或无需再分的可能结果称为试验 E 的基本事件. 试验 E 的全体基本事件所组成的集合称为基本空间，用 Ω 表示.

事件是基本空间 Ω 的一个子集，但并不是 Ω 的任意一个子集都是事件.

定义 1　设 Ω 是基本空间，$\mathscr{F}$ 是由 Ω 的一些子集为元素所组成的集合，如果满足下列条件：

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$；

(2) 若 $A \in \mathscr{F}$，则 $\overline{A} \in \mathscr{F}$；

(3) 若 $A_n \in \mathscr{F}, n = 1,2,\cdots$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$，则称 $\mathscr{F}$ 为事件域，$\mathscr{F}$ 中的元素称为事件，Ω 称为必然事件.

二、概率的定义与性质

定义 2　设 Ω 是随机试验的基本空间，A 为随机事件，$P(A)$ 为

定义在事件域 $\mathscr{F}$ 上的实函数，若 $P(A)$ 满足：

(1) 对任一事件 A，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) $P(\Omega) = 1$；

(3) 可列可加性　对两两互斥的可列多个事件 $A_1, A_2, \cdots (A_iA_j = \varnothing, i \neq j$ 称 A_i、A_j 互斥)，有

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称函数 $P(A)$ 为事件 A 的概率. $\Omega, \mathscr{F}, P$ 三者作为一个有序整体称为概率空间，记作 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

概率的性质：

(1) 不可能事件 $\varnothing$ 的概率为零，即 $P(\varnothing) = 0$；

(2) 有限可加性. 对两两互斥的有限多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(3) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$；

(4) 若 $A \subset B$，则有

$$P(A) \leqslant P(B)$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A);$$

(5) 加法公式

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

三、条件概率与事件的独立性

1. 条件概率

定义 3　设 A, B 是两个随机事件，且 $P(B) > 0$，则称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率

关于条件概率有三个重要公式：

(1) 概率的乘法公式

若 $P(B)>0$,则 $P(AB)=P(B)P(A|B)$.

(2) 全概率公式

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,且 $\sum_{i=1}^{n}A_i=\Omega, P(A_i)>0, i=1,2,\cdots,n$,则对任一事件 B 有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

注意,把 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 换为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 或者把 $\sum_{i=1}^{n}A_i=\Omega$ 换为 $B\subseteq\sum_{i=1}^{n}A_i$(或 $B\subseteq\sum_{i=1}^{\infty}A_i$),全概率公式仍然成立.

(3) Bayes 公式

在全概率公式的条件下,若 $P(B)>0$,则

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}\quad i=1,2,\cdots n.$$

全概率公式中的注意,对 Bayes 公式也适用.

2. 事件的独立性

定义 4 对两个事件 A,B,若有

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称 A,B 相互独立(简称独立).

定义 5 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件,若对任意的 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 和任意一组 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

成立,则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 独立.

对事件序列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,若它们之中的任意有限个事件独立,则称事件序列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 独立.

事件独立性的性质:

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 独立，则

(1) $A'_1,A'_2,\cdots,A'_n$ 独立，其中 $A'_k=A_k$ 或 $\overline{A}_k$；

(2) 将事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 分成 k 组（不重不漏）；设 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 分别由第 1,2,…,k 组内的 A_i 经过并、积、差、求余等运算所得，则 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 独立.

§1.2 随机变量及其分布

一、一维随机变量的分布

定义 1 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一个概率空间，而 $\xi=\xi(\omega)(\omega\in\Omega)$ 是定义在基本空间 Ω 上的单值实函数，若对任一实数 x，基本事件 ω 的集合 $\{\omega:\xi(\omega)<x\}$ 都是一随机事件，即 $\{\omega:\xi(\omega)<x\}\in\mathscr{F}$，则称 $\xi=\xi(\omega)$ 为一个随机变量或随机变数.

随机变量常用 $\xi,\eta,\zeta,\cdots$ 等希腊字母表示.

1. 分布函数及其性质

定义 2 随机变量 ξ 取值小于 x 的概率称为 ξ 的分布函数，记为 $F(x)$ 即

$$F(x)=P\{\xi<x\}$$

其中 $\{\xi<x\}$ 是 $\{\omega:\xi(\omega)<x\}$ 的简写.

由定义 2 易得

$0\leqslant F(x)\leqslant 1$，其中 $-\infty<x<+\infty$；

$P\{x_1\leqslant\xi<x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$，其中 $-\infty<x_1\leqslant x_2<+\infty$.

分布函数具有如下三条基本性质：

(1) 单调不减：若 $x_1<x_2$ 则 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$；

(2) 记 $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$. 那么

$$F(-\infty)=0,\qquad F(+\infty)=1;$$

(3) 左连续 对于 $-\infty<x_0<+\infty$，有

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$$

这三条性质不但是分布函数的必要条件，还可以证明，它们一起构成函数 $F(x)$ 成为某一随机变量的分布函数的充分条件.

2. 离散型随机变量及其分布列

若随机变量的所有可能取的值是有限多个或可列无限多个，则称这种随机变量为离散型随机变量. 离散型随机变量的概率分布规律通常用分布列表示.

设离散型随机变量 ξ 的所有可能取的值为 $x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots$，$\xi$ 取各个 x_i 相应的概率为 p_i，即

$$P\{\xi = x_i\} = p_i, \quad i = 1, 2, \cdots$$

或列成表

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

$P\{\xi = x_i\} = p_i$ 或它的表称为离散型随机变量 ξ 的分布列、分布律、概率函数. 由概率的定义，可知分布列（概率函数）有性质：

(1) $p_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots$;

(2) $\sum\limits_{i=1} p_i = 1$

离散型随机变量的分布函数 $F(x)$ 可用 p_i 表示为

$$F(x) = P\{\xi < x\} = \sum_{x_i < x} P\{\xi = x_i\}$$

3. 连续型随机变量及其分布密度

定义 3 若随机变量 ξ 的分布函数 $F(x)$ 能够表示为某个非负可积函数 $p(x)$ 在区间 $(-\infty, x)$ 上的积分，即

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$$

则 ξ 称之为连续型随机变量，称 $p(x)$ 为 ξ 的分布密度（简称密度）或概率函数.

密度 $p(x)$（概率函数）具有性质：

（1）$p(x) \geqslant 0$;

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1$;

（3）对于 x 轴上的任意区间 S，有

$$P\{\xi \in S\} = \int_S p(x)\,\mathrm{d}x;$$

（4）对于 $p(x)$ 的连续点 x，有

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x \leqslant \xi < x + \Delta x\}}{\Delta x}$$

从而也有（$\Delta x > 0$ 且 Δx 很小）

$$p\{x \leqslant \xi < x + \Delta x\} \approx p(x)\Delta x$$

注意，为了方便我们引入了一个对离散型或连续型两种情况通用的概念——概率函数 $p(x)$：若 ξ 是离散型，则 $p(x)$ 就是 ξ 的分布列；若 ξ 是连续型，则 $p(x)$ 就是 ξ 的分布密度.

4. 一些常用的概率分布

离散型：

（1）二项分布 $B(n,p)$，$0 < p < 1$，概率函数为

$$p(x) = P\{\xi = x\} = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0,1,2,\cdots,n;$$

（2）0—1 分布 $B(1,p)$，$0 < p < 1$，概率函数为

$$p(x) = P\{\xi = x\} = p^x (1-p)^{1-x} \quad x = 0,1;$$

（3）Poisson 分布 $P(\lambda)$，$\lambda > 0$，概率函数为

$$p(x) = P\{\xi = x\} = \frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad x = 0,1,2,\cdots;$$

连续型：

（4）均匀分布 $R_{[a,b]}$，$a < b$，概率函数为

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{其它}; \end{cases}$$

（5）指数分布 $E(\lambda)$，$\lambda > 0$，概率函数为