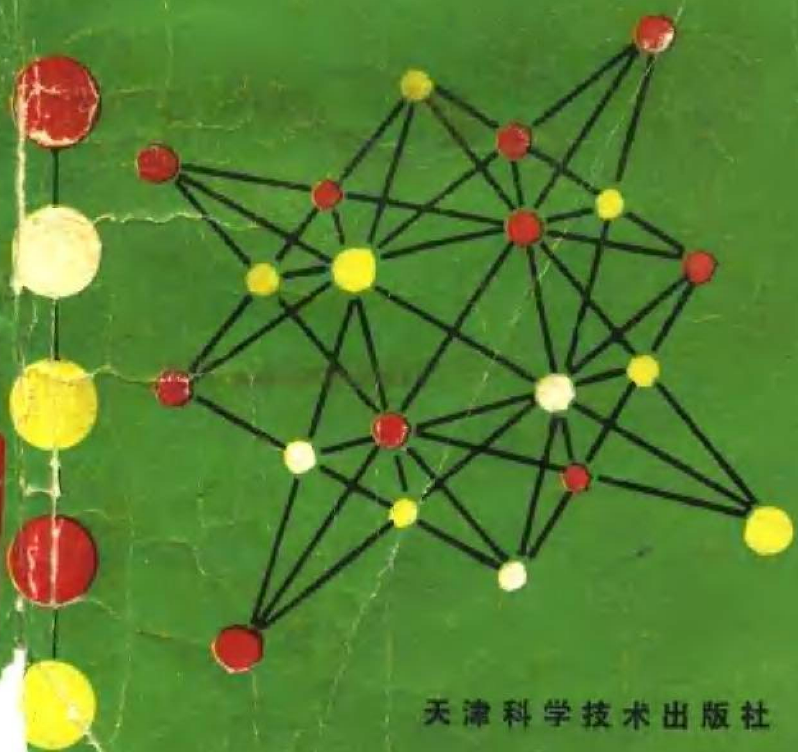
JINRI SHUXUE ZHONGDE QUWEIWENTI

今日数学中的趣味问题

吴振奎　俞晓群　编



天津科学技术出版社

今日数学中的趣味问题

吴振奎　俞晓群

天津科学技术出版社

小　　序

数学——科学的王后、智慧的摇篮、“上帝用来书写宇宙的文字”（伽俐略语）。正如华罗庚教授说的：“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，地球之变，生物之谜，——无不可用数学去描述。”

数学中有着多少迷人的幽境？惑人的奥秘？古往今来，多少学者、才子为之倾心，为之拜倒，为之献身。

为了探索某一奥密，为了揭示某一规律，成千上万人耗费着几十年、几百年，甚至上千年的光阴——然而他们在所不惜。

如果说海王星的存在是由计算而发现的有些夸张，那么爱因斯坦运用数学工具创立“相对论”而指出了寻找新能源的方向——原子核裂变，确实是近代科学史上的奇迹。

当今，被称为“信息的时代”、“知识爆炸的时代”，数学对当今的科学产生着无与伦比的影响，数学的自身也在这激流的时代中发生日新月异的变化。

许多古老的难题被攻破；许多颖巧的方法被发现；许多深邃的奥妙被揭示；许多崭新的课题被提出；许多细微的分支被创立……

尽管一个人（甚至是数学工作者）不[illegible]能精通全部数学，但上述种种动向人们需要了解——至少应该粗知。这正是本书编写的宗旨。

诚然，书中列举的内容只是浩瀚数海之点滴，只是无垠数境之些微，然而目的是让读者能透过这些去窥大海之一斑，领略数学奇境之爪鳞。

现代数学的原野上到处百花盛开，即使走马看花，也会让人觉得眼花缭乱，也会使人感到万紫嫣红。

当真如此？倘若您不信，就请您慢慢浏览、细细品嚼，或许能尝到一些滋味。

目　录

一、数 字 篇

二、图　形　篇

三、知 识 篇

四、问 题 篇

一、数 字 篇

素数的个数与其证明

所谓素数（又称质数），就是只能被1和自身整除的整数。例如，2，3，5，7，11，……

远在古希腊时期，数学先师欧几里得就证明了素数是无限多的。他的证法十分巧妙。即假设素数是有限多个，全部写出它们：

p_1，p_2，…，p_n，

再设

$q = p_1$、p_2，…，p_{n+1}，

已证任何一个p_i（$i=1$，2，…，n）都不能整除q，导出矛盾，所以，素数是无限多的。

欧几里得的这一证法已成为当今证明“素数无限性”的经典方法广为流传。其实这个问题的证明还有许多巧妙的方法。但鲜为人知。现简略介绍几种方法如下：

1．根据定理“任意两个形如2^m-1与2^n-1（m、n互素）的数互素”，即它们没有相同的素因数。而这类数字（称为梅森数）是无限多的，所以它们互异的素因数也是无限多的，因此可知素数是无限多的。

2．根据定理“任意两个形如$2^{2^m}+1$与$2^{2^n}+1$（$m\neq n$，

称为费尔马数）的数互素”，同上例亦可证素数是无限多的。

3．可以证明，不超过$2^{2}+1$的素数至少有$n+1$个。因此，由这类数字是无限多的，可知素数也是无限多的。

人们虽然证明了素数是无限多的，但是仍然乐于找出一些较大的素数。这项工作也是在欧儿里得时代开始的。关于这一点请见后文。

不大于x的素（质）数的个数

给了自然x，试问小于或等于它的质数有多少个（下文我们用$\pi(x)$表示这个数）？直到十八世纪前，人们仍无从得知（这儿是指大的自然数x而言，对于某些自然数人们已有了质数表）。

1780年，法国数学家勒让德利用爱拉斯托色筛法和估算，给出$\pi(x)$的一个近似表达式：

$$f(x)=\frac{x}{\ln x-1.08366}$$

尔后，1792年高斯又对其作了修改。但它们与实际有较大差距。

1850年，俄国数学家切贝雪夫（Чебышев）给出了$\pi(x)$的另一个表达式：

$$\mathrm{Li}(x)=\frac{x}{\ln x},$$

同时他证明了：当$x>4\times10^{5}$时

$$\frac{1}{3}<\frac{\pi(x)\ln x}{x}<\frac{10}{3}.$$

这是一个令人鼓舞的结果。后面的表清楚地表明Li(x)的精确性：

$\pi(x)$与Li(x)比较表

x	$\pi(x)$	$Li(x)$	$Li(x)-\pi(x)$
10	4	6	2
10^2	25	29	4
10^3	168	178	10
10^4	1229	1246	17
10^5	9592	9630	38
10^6	78498	78628	130
2×10^6	148933	149055	122
3×10^6	216816	216971	155
4×10^6	283146	283352	206
5×10^6	348513	348638	125
6×10^6	412849	413077	228
7×10^6	476648	476827	179
8×10^6	539777	540000	223
9×10^6	602489	602676	187
…	664579	664918	339
10^7	……	……	…

从表上人们看到：Li (x) 似乎总比π (x) 大，但事实上却並不如此。

1914年立特伍德证明：存在充分大的N，使$\pi(N)>$ Li(N)；同时还有$N'>N$使$\pi(N')<$Li(N')。

尔后卡尔德指出：这种N要大于10^{700}。

英国数学家修克斯证明：

$N \approx 10^{10^{10^{34}}}$。

这就是说：偏差Li（x）$-\pi$（x）是摆动的，这便消除了Li（x）对π（x）估计偏高的误会。

1859年，黎曼试图证明：

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} = 1$$

但其过程不完整，可是其中却包含了证明这一式子的必要思想与方法。

1896年，阿达玛（Hodamard）等人给出了这个结论的完整证明。

麦森质数小谈

质数、合数的研究自古以来就为人们所偏爱，这也正是《数论》这门学科至今不衰的缘由。

质数是无穷多的，这一点早为古希腊学者欧几里得发现并证得。然而人们一直试图寻找表示质数的解析式。

2^p-1，当p是合数时它是合数，反过来当p是质数时，它却不一定是质数。

1644年，法国一个名叫麦森的人宣称：2^p-1当$p=2$、3、5、7、13、17、19、31、61、127、257时，都是质数，这一发现曾轰动当时的数学界，据说连欧拉也极感兴趣。其实麦森本人只验算了前面的7个，后面4个虽未经验算（它的计算量很大），但人们对之仍不怀疑。

1903年在纽约的一次科学报告会上，数学家科尔做了一次不讲话的报告，他在黑板上先算出$2^{67}-1$，接着又算出

193707721×761838257287，两个结果相同。他一声不响地回到了座位上，会场上却响起了热烈的掌声（据说这是该会场第一次）。他否定了$2^{67}-1$是质数这个两百年来为人们所坚信的概念。

短短的几分钟，花去了数学家三年的全部星期天。

无独有偶，波兰数学大师斯坦豪斯在其《数学一瞥》中有一句挑战性的话：七十八位的数$2^{257}-1=231,584,\ldots$ 474，632，390，847，141，970，017，375，815，706，539，969，331，281，128，078，915，168，015，826，259，279，871是合数。可以证明它有因子，但其因子还不知道。

这个结论是拉赫曼（D·H·Lehmer)在1922年～1923年间花了近七百个小时才证出来的〔当然$2^{101}-1$是个31位数，知道它有两个质因子（其中一个至少有11位），但人们却不知道它。又如$2^{2^{1945}}+1$，人们知道了它的一个最小的质因子$p=5\times2^{1947}+1$（它有587位），但人们仍不知它的其他因子是什么〕。

电子计算机问世（1946年）之后，情况有些改变，对于某些单调、重复而繁琐的计算，可让机器去完成。1952年，人们在SWAC电子计算机上仅花了48秒机上时间，便找到$2^{257}-1$的一个因子。

（这儿插一句：1984年美国数学家在桑迪亚国立实验室的一台克雷计算机上花了32个小时解决了一个存在三世纪之久的麦森质数表中最后一个麦森合数$2^{251}-1$*的因式分解问题，它有67位，它的三个因子是：178230287214063289511、

---

* 此美国报刊报道的数据，有误，该数应为$2^{251}-1$除27271151之外的余因子。

61676882198695257501367和1207039317824989303969681)

它的证明应用了我们后面将要提到的"抽屉原理"。这又一次否定了麦森的另一个质数(其实在小于257的质数中，$p=61$、89和107时，2^p-1也是质数)。

电子计算机的出现，给人们验算和寻找麦森型质数带来了方便。

1914年到本世纪50年代几十年间，人们仅把麦森质数的纪录推到$p=127$(它有39位)，而五十年代后仅九个月，数字纪录便不断被刷新：$p=521$、607、1279、2203、2281、3217、4253、4423、9689、9941、11213。

1971年3月4日晚上，美国电视台中断了正常节目播放，而发表布鲁思特·托克曼用电子计算机找到$p=19937$时，2^p-1是质数。

1979年，美国一位中学生诺尔在计算机上发现$p=23209$时，2^p-1是质数(它有6987位)。同年，美国人斯洛温斯基找到更大的麦森型质数，$p=44497$时即$2^{44497}-1$(它有3395位)。

1983年1月，这位美国人在CRAY-1型计算机上发现$p=89243$(它有25962位)时，2^p-1是质数，这也是迄今为止，人们发现的最大质数。

顺便讲一句：麦森质数及费尔马质数尾数，我们是可以算出来的，这只须注意到下面的2^n方幂尾数表：

2^n的尾数

n	1	2	3	4	5	6	7	8	…
2^n的尾数	2	4	8	6	2	4	8	6	…

它们以4为周期循环。这样麦森质数的尾数只能用1、3、7、（它不能是5，以5结尾的数为合数，除5以外）；而费尔马数$F_n=2^{2^n}+1$的尾数是：

$F_0=3$；　　　$F_1=5$；

$n\geqslant 2$时，F_n的尾数是7。这只须注意到：

$2^{2^n}=2^{2^{n-2}\cdot 2^2}=2^{4\cdot 2^{n-2}}=(2^4)^{2^{n-2}}=16^{2^{n-2}}$.

而以6结尾的任何整数的正整数次方幂，仍是以6结尾。

又若2^p-1是麦森质数，则$2^{p-1}(2^p-1)$是完全数（由威尔逊定理）。

现今最大的素数

“素数是无穷多的”。这是古希腊数学家欧几里德给出的结论。但是，古往今来，许多数学家都对寻找世界上已知的最大素数有极大的兴趣。当你回顾漫长的“数学历程”时，会发现许多妙趣横生的记载。

让我们从1772年谈起吧。当时，瑞士大数学家欧拉在双目失明的情况下证出$2^{31}-1=2147483647$是一个素数。它具有10位数字，堪称当时世界上已知的最大素数。这是寻找“最大素数”的先声。为了避免赘述，我们就从欧拉开始，列一个寻找“最大素数”的年表吧（见下页表）：

从这个表中，除了欣赏那些大得惊人的素数之外，你可能发现了一个怪现象：怎样都是形如2^p-1的素数？是的，这种数被数学家们称为“梅森素数”，这是为纪念17世纪法国数学家马林·梅森的贡献而命名的。远在1644年梅森就推测$2^{31}-1$和$2^{127}-1$是素数（还有几个是错的），但他没有给出证明。其中的$2^{127}-1$直至二百多年后才被证明。

发现年代	“最大素数”	位　数
1722	$2^{31}-1$	10
1883	$2^{61}-1$	19
1912	$2^{89}-1$	27
1914	$2^{107}-1$	33
1917	$2^{127}-1$	39
1952	$2^{2281}-1$	687
1957	$2^{3217}-1$	969
1959	$2^{4423}-1$	1332
1962	$2^{11213}-1$	3376
1971	$2^{19937}-1$	6002
1978	$2^{21701}-1$	6533
1979.2	$2^{23209}-1$	6987
1979.4	$2^{44497}-1$	13395
1983	$2^{86243}-1$	25962
1983	$2^{132049}-1$	39751
1985	$2^{216091}-1$	65050

它是电子计算机诞生之前的最大素数。到目前为止，人们才找到30个梅森素数，并且按年代它终始名列素数之首，多年来谁也未能打破这种局面。

近几年来，随着数字的增大，每一个“最大素数”的产生都艰辛无比，但仍然存在着激烈的竞争。例如，在1979年2月23日，当美国数学家斯洛温斯基宣布他找到了$2^{23209}-1$