

高等学校试用教材

高等数学

(物理专业用)

第二册

四川大学数学系高等数学教研组编

人民教育出版社

内 容 提 要

本书是按照理科教材《高等数学》（物理专业）编写大纲编写的。主要内容有空间解析几何和矢量；多元函数微分学；重积分，曲线积分，曲面积分；矢量分析初步；无穷级数，反常积分等。可供综合大学和师范学院物理类专业作为试用教材。

高 等 数 学

（物理专业用）

第 二 册

四川大学数学系高等数学教研组编

*

人 民 教 育 出 版 社 出 版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

1978年8月第1版 1979年2月第2次印刷

书号 13012·094 定价 0.82 元

目 录

第六章 空间解析几何和矢量	1
第一节 空间直角坐标	1
§ 6.1.1 空间点的直角坐标	1
§ 6.1.2 两点间的距离	2
第二节 矢量代数	3
§ 6.2.1 矢量运算	4
§ 6.2.2 两矢量的数量积	13
§ 6.2.3 两矢量的矢量积	16
§ 6.2.4 矢量的混合积	20
习题	22
第三节 空间中的平面和直线	25
§ 6.3.1 平面	25
§ 6.3.2 空间直线	34
习题	39
第四节 二次曲面	41
§ 6.4.1 常见的二次曲面	42
§ 6.4.2 坐标轴的变换	54
习题	58
第七章 多元函数微分学	60
第一节 多元函数的基本概念	60
§ 7.1.1 二元函数的定义域	60
§ 7.1.2 二元函数的极限和连续	63
§ 7.1.3 偏导数	67
§ 7.1.4 全微分	71
§ 7.1.5 复合函数微分法	77
§ 7.1.6 隐函数的微分法	83
习题	90
第二节 偏导数的应用	94
§ 7.2.1 几何应用	94

§ 7.2.2	方向导数, 梯度	100
§ 7.2.3	二元函数的泰勒展式	106
§ 7.2.4	二元函数的极值	109
	习题	121
第八章	重积分	124
第一节	二重积分	124
§ 8.1.1	二重积分的概念	124
§ 8.1.2	二重积分的计算	130
	习题	149
第二节	三重积分	151
§ 8.2.1	三重积分的概念	151
§ 8.2.2	三重积分的计算	153
	习题	162
第三节	重积分的应用	163
§ 8.3.1	几何应用——曲面面积	163
§ 8.3.2	重积分在静力学中的应用	166
	习题	171
第九章	曲线积分, 曲面积分, 矢量分析初步	173
第一节	曲线积分	173
§ 9.1.1	第一型曲线积分——对弧长的曲线积分	173
§ 9.1.2	功, 第二型曲线积分——对坐标的曲线积分	176
§ 9.1.3	格林公式, 平面曲线积分与路径无关的条件	184
	习题	194
第二节	曲面积分	197
§ 9.2.1	第一型曲面积分——对面积的曲面积分	197
§ 9.2.2	流量, 第二型曲面积分——对坐标的曲面积分	199
§ 9.2.3	高斯公式, 斯托克斯公式, 空间曲线积分与路径无关的条件	206
	习题	214
第三节	矢量分析初步	216
§ 9.3.1	矢量函数的微商	216
§ 9.3.2	数量场与矢量场	220
	习题	231
第十章	无穷级数	232

第一节 常数项级数	232
§ 10.1.1 无穷级数的概念及基本性质	232
§ 10.1.2 正项级数	242
§ 10.1.3 任意项级数	249
习题	257
第二节 幂级数	260
§ 10.2.1 一致收敛级数及其基本性质	260
§ 10.2.2 幂级数的基本性质	269
§ 10.2.3 函数的幂级数展开式	279
§ 10.2.4 幂级数的应用举例	291
习题	293
第三节 付氏级数	295
§ 10.3.1 以 2π 为周期的函数的展开	296
§ 10.3.2 付氏级数的收敛性	302
§ 10.3.3 奇、偶函数的展开	306
§ 10.3.4 任意区间上的函数展开	309
§ 10.3.5 将函数展为正弦级数和余弦级数	313
§ 10.3.6 付氏级数的复数形式	317
§ 10.3.7 平均平方误差	320
习题	325
第十一章 反常积分和含参变量积分	327
第一节 反常积分	327
§ 11.1.1 无穷限反常积分	327
§ 11.1.2 无界函数的反常积分	335
§ 11.1.3 Γ -函数与 B -函数(尤拉积分)	339
习题	345
第二节 含参变量的积分	346
§ 11.2.1 含参变量的积分	346
§ 11.2.2 含参变量的反常积分	352
习题	354

第六章 空间解析几何和矢量

第一节 空间直角坐标

§ 6.1.1 空间点的直角坐标

为了确定空间中一点的位置，需要建立空间的点与数组之间的联系。

过空间一个定点 O ，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，且一般有相同的量度单位，这三条轴分别叫做 x 轴（横轴）， y 轴（纵轴）， z 轴（竖轴），统称坐标轴。它们的正方向符合右手法则，即如果将右手的拇指和食指分别指着 x 轴和 y 轴的正方向，则中指所指的方向即为 z 轴的正方向。这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系，点 O 叫做坐标原点。

任意两条坐标轴可以确定一个平面，如 x 轴和 y 轴确定 xOy 面，依此类推， y 轴和 z 轴确定 yOz 面， z 轴和 x 轴确定 zOx 面，这三个面统称为坐标面。三个坐标面把空间分为八个部份。每一部份称为一个卦限。把含三个坐标轴正向的那个卦限称为第一卦限，在 xOy 平面的上部如图 6.1 所示，依次得 I, II, III, IV 四个卦限。在 xOy 平面下部与第 I 卦限相对的为 V 卦限，依次得 VI, VII, VIII 几个卦限（图 6.1）。

取定了空间直角坐标系后，就可以建立起空间的点与数组之间的对应关系。

设 M 为空间中的一点，过 M 点作三个平面分别垂直三条坐标轴，它们与 x 轴， y 轴， z 轴的交点依次为 P, Q, R （图 6.2）。设

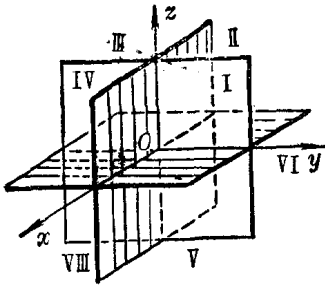


图 6.1

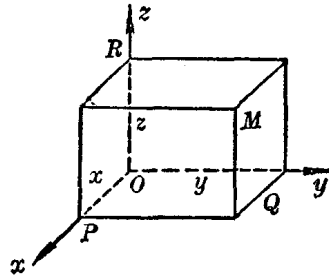


图 6.2

P, Q, R 三点在三个轴上的坐标依次为 x, y, z , 这样, 空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x, y, z) , 数组 (x, y, z) 称为点 M 的直角坐标, 并依次称为点 M 的横坐标, 纵坐标, 竖坐标, 记为 $M(x, y, z)$.

反过来, 给定了数组 (x, y, z) , 我们依次在 x 轴, y 轴, z 轴上取与 x, y, z 相应的点 P, Q, R , 然后过点 P, Q, R 各作平面分别垂直于 x 轴, y 轴, z 轴, 这三个平面的交点 M , 就是以数组 (x, y, z) 为坐标的点.

§ 6.1.2 两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点, 我们可用两点的坐标来表达它们间的距离 d .

过 M_1, M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面, 这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体 (图 6.3). 根据勾股定理可以证明长方体的对角线的长度的平方, 等于它的三条棱的长

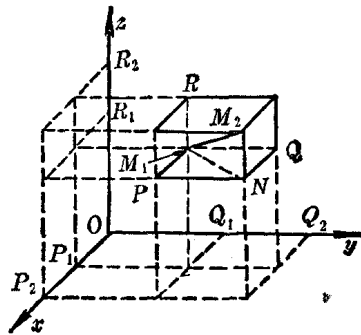


图 6.3

度的平方和,即

$$\begin{aligned}d^2 &= |M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2\end{aligned}$$

$$\text{由于 } |M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|$$

$$|M_1Q| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|$$

$$|M_1R| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|$$

$$\text{所以 } d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

特殊地,点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

这就是空间中两点的距离公式.

第二节 矢量代数

在研究力学、物理学以及其它应用科学时所遇到的量,可以分为两类. 一类完全由数值决定,例如质量、温度、时间、面积、体积、密度等,这一类量叫做数量. 另一类量,只知数值大小还不够,还需说明它们的方向,例如力、速度、加速度等,这一类量叫做**矢量**(**向量**).

我们可以把任何矢量用具有一定长度和一定方向的线段来表示,这线段的长度表示所论矢量的数值,线段的方向表示所论矢量的方向,因此,从几何上看,矢量就是在空间中有一定长度和一定方向的线段.

如果两矢量满足下面两个条件:(1)长度相等且平行(即在同一直线上或在彼此平行的直线上),(2)两矢量的指向相同,就说这两矢量是相等的. 于是一矢量平行移动后仍与原矢量相等.

必须注意矢量的起点和终点,若对调它们的位置,就得到与原来矢量有相反方向的另一矢量. 起点可放在空间任一点,但

最好选择某点 O 作起点，把所有矢量都看作是从这点出发。若矢量起点为 O ，终点为 M ，则记为 \overrightarrow{OM} 。若起点为 A ，终点为 B ，则记为 \overrightarrow{AB} 。

矢量的长度叫做矢量的模。矢量 \overrightarrow{AB} 的模用 $|\overrightarrow{AB}|$ 来表示。直角坐标系中，如以坐标原点 O 为起点，向已知点 M 引矢量 \overrightarrow{OM} ，这矢量称为点 M 对于点 O 的矢径。

§ 6.2.1 矢量运算

1. 矢量加法

根据力学中关于力，速度及加速度的合成法则，我们定义两矢量的和如下。

不在同一直线上的两矢量 \overrightarrow{OA} 与 \overrightarrow{OB} 的和是指以这两矢量为两边所做的平行四边形的对角线矢量 \overrightarrow{OC} (图 6.4)，记作

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

如果两矢量 \overrightarrow{OA} 与 \overrightarrow{OB} 在同一直线上，我们定义它们的和是这样一个矢量：当 \overrightarrow{OA} 和 \overrightarrow{OB} 的指向相同时，则和矢量的方向与原来两矢量的方向相同，长度等于两矢量长度的和；当 \overrightarrow{OA} 与 \overrightarrow{OB} 的指向相反时，则和矢量的方向与较长的矢量方向相同，而长度等于两矢量长度的差。

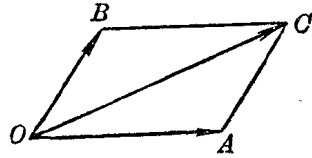


图 6.4

长度为零的这个特殊矢量，叫做零矢量，记作 $\mathbf{0}$ ，其方向可看作任意的。长度相等而方向相反(平行但指向相反)的两个矢量的和，就是零矢量。

对于矢量，加法交换律显然成立，即

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$$

在(图 6.4)中可见 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$ 。于是得矢量加法的三角形法则：在第一矢量 \overrightarrow{OA} 的终点 A 引第二矢量 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$ ，封闭这折线 OAC

的矢量 \vec{OC} 就是 \vec{OA} 与 \vec{OB} 的和, 它的起点合于第一矢量的起点, 终点合于第二矢量的终点.

若要求三个矢量* A, B, C 的和, 可先求 A 及 B 的和 $A+B$, 再与 C 相加即得 $A+B+C$, 由(图 6.5)可见, 若以 A 与 $B+C$ 相加, 会得同一结果, 因之, 我们得公式

$$(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C$$

即加法的结合律成立.

我们注意到矢量 $A+B+C$ 就是封闭这折线 $OABC$ 的矢量 \vec{OC} , 同时由于加法的交换律和结合律, 可得到下面一般法则:

以任何次序相继作矢量 A_1, A_2, \dots, A_n , 并以前一矢量的终点作为次一矢量的起点, 再由第一矢量的起点至最后一矢量的终点所得折线的封闭矢量即为矢量 A_1, A_2, \dots, A_n 的和.

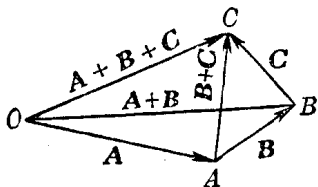


图 6.5

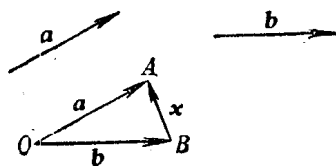


图 6.6

2. 矢量的减法

矢量的减法定义为加法的逆运算, 若 $\vec{OB} + \vec{BA} = \vec{OA}$, 则矢量 \vec{BA} 就定义为矢量 \vec{OA} 与矢量 \vec{OB} 的差:

$$\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$$

矢量差的作图法如(图 6.6)

取 O 点为起点, 作向量 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, 则向量 \vec{BA} 满足表达式 $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$, 它就是差向量 $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$.

* 我们约定, 用单个字母表示矢量时, 这个字母排成黑体.

3. 矢量与数量的乘法

(1) 设已知矢量 A 和实数 m , 则它们的乘积 mA 仍是一个矢量, 这矢量的模等于矢量 A 的模与数量 $|m|$ 的乘积, 并且平行于矢量 A , 如 $m > 0$, 则它的指向与矢量 A 的相同; 如 $m < 0$, 则它的指向与矢量 A 的相反; 如 $m = 0$, 它就成为零矢量.

(2) 特别当 $m = -1$ 时,

$$mA = (-1)A, \text{ 记为 } -A$$

$-A$ 的模与 A 的模相等而方向相反.

若 A_1 与 A_2 平行, 则 $A_2 = \lambda A_1$ (λ 为一数量). 反之若 $A_2 = \lambda A_1$, 则 A_1 与 A_2 平行.

读者可以用作图法证明

$$A - B = A + (-B)$$

(3) 矢量与数量的乘积有下列性质: 设 A, B 为任意矢量, λ, μ 为任意实数

1) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (分配律)

2) $\lambda(\mu A) = \mu(\lambda A) = (\lambda\mu)A$ (结合律)

3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

证 1) 当 $A = 0$ 时等式显然成立. 当 $A \neq 0$ 且 $\lambda, \mu > 0$ 时, 等式两边的矢量都是将 A 放大 $\lambda + \mu$ 倍, 所以显然相等, 其它情形根据 $\lambda, \mu, \lambda + \mu$ 的正负由定义同样可证明.

2) 等式两边的矢量是同向的, 例如 $\lambda < 0$ 而 $\mu > 0$ 时, 两边的矢量都与 A 反向, 从而它们是同向的, 至于长度, 由定义

$$|\lambda(\mu A)| = |\lambda| |\mu A| = |\lambda| |\mu| |A| = |\lambda\mu| |A| = |(\lambda\mu)A|$$

即等式两边的矢量等长, 故 2) 的等式成立. 其它情况可类似证明.

3) $\lambda(A + B)$ 就是将矢量和的三角形伸长(或缩短) λ 倍(图 6.7).

(4) 长度为一个单位长的矢量叫做单位矢量.

用 A° 表示与 A 同方向的单位
 矢量, 则有

$$A = |A|A^\circ$$

或 $A^\circ = \frac{A}{|A|}$ (A 不为零矢量).

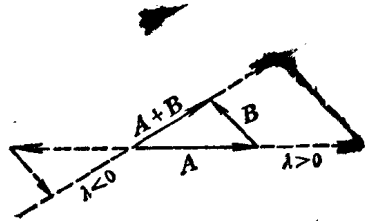


图 6.7

4. 矢量的投影

(1) 空间二轴的夹角

设空间两轴 l_1 和 l_2 相交于点 S , 在两轴决定的平面上, 把其中一轴绕点 S 旋转, 使它的正向与另一轴的正向重合时所需要旋转的角度, 就称为是这两轴间的夹角, 记为 $(\widehat{l_1, l_2})$ 或 $(\widehat{l_2, l_1})$. 在空间从一轴至另一轴的旋转方向是与观察者在两轴规定的平面的哪一侧有关. 一般规定二轴间的角限定在 0 与 π 之间, 且不区分轴的顺序.

如二轴 l'_1, l'_2 不相交, 则可自空间的任何一点 S 引二轴 l_1, l_2 , 使顺次与 l'_1, l'_2 平行, 且有相同指向, l_1, l_2 的夹角就定义为 l'_1, l'_2 间的夹角.

空间的轴 l 与矢量 A 间的夹角, 我们用轴 l 与另一同矢量 A 的正方向一致的轴 l' 间的角来定义.

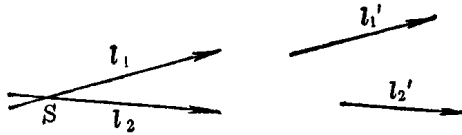


图 6.8

同样二矢量 A, B 间的角用二轴 l, l' 间的角来定义, 这二轴的正方向分别与 A, B 的正方向一致, 矢量 A, B 间的角记作 $(\widehat{A, B})$ 或 $(\widehat{B, A})$.

(2) 空间点与矢量在轴上的投影

1) 设已知空间一点 A , 通过 A 点引轴 l 的垂直平面 α , 则平

面 α 与轴 l 的交点 A' 叫做点 A 在轴 l 上的投影(图 6.9).

2) 若设已知矢量 \vec{AB} 的起点 A 和终点 B 在轴 l 上的投影分别为点 A' 和 B' (图 6.10), 则轴 l 上的有向线段 $\overline{A'B'}$ 的值(记为 $A'B'$)叫作矢量 \vec{AB} 在轴 l 上的投影, 记作

$$\text{Prj}_l \vec{AB} = A'B'$$

轴 l 叫做投影轴

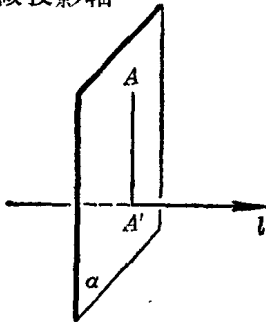


图 6.9

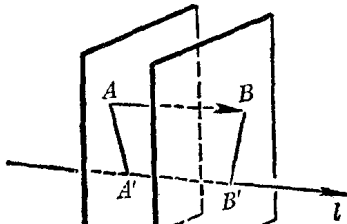


图 6.10

定理 矢量 \vec{AB} 在任何轴 l 上的投影等于矢量的模乘以轴与矢量间的角 φ 的余弦.

$$\text{Prj}_l \vec{AB} = |\vec{AB}| \cos \varphi$$

证 通过矢量 \vec{AB} 的起点 A 引轴 l' 使与轴 l 平行, 且有相同正方向, 则轴 l 和矢量 \vec{AB} 间的角 φ 等于轴 l' 和 \vec{AB} 间的角, 且有

$$\text{Prj}_l \vec{AB} = \text{Prj}_{l'} \vec{AB}$$

由图 6.11

$$\text{Prj}_{l'} \vec{AB} = AB'' = |\vec{AB}| \cos \varphi$$

所以 $\text{Prj}_l \vec{AB} = |\vec{AB}| \cos \varphi$

当 φ 为锐角时, 投影为正;

当 φ 为钝角时, 投影为负;

当 φ 成直角时, 投影为 0.

容易看出, 相等的矢量, 在同一轴上的投影相等.

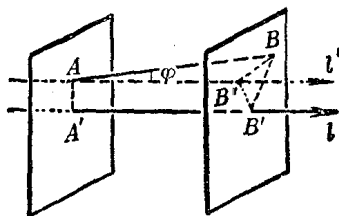


图 6.11

5. 矢量的分解与矢量的坐标

设矢量 \vec{OM} 的起点 O 是直角坐标系的原点，而终点 M 的坐标 $OA=x, AP=y, PM=z$ (图 6.12).

今考察折线 $OAPM$ 和它的封闭线

OM ，由矢量加法的一般法则得：

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PM}$$

而

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

所以

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AP} + \vec{PM}$$

因

$$\vec{AP} = \vec{OB}, \vec{PM} = \vec{OC}$$

所以

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$

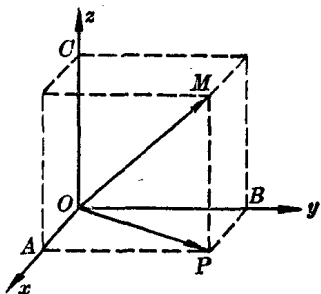


图 6.12

矢量 $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ 叫做矢量 \vec{OM} 在坐标轴上的分矢量。

在坐标轴 Ox, Oy, Oz 上以 O 为起点分别取三个单位矢量，其方向与坐标轴的方向相同，并分别以 i, j, k 表示，这三个单位矢量叫做基本单位矢量。

点 M 的坐标是 $OA=x, OB=AP=y, OC=PM=z$ ；因此 OA, OB, OC 正是矢量 \vec{OM} 在坐标轴上的投影。又 \vec{OM} 在坐标轴上的分矢量为

$$\vec{OA} = xi, \vec{OB} = yj, \vec{OC} = zk$$

所以

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = xi + yj + zk$$

式中 x, y, z 是矢量 \vec{OM} 在坐标轴上的投影。在矢量的起点为原点 O 的情况下， x, y, z 也正是矢量的终点 M 的坐标。

如果矢量 A 在 x, y, z 轴上的投影依次为 x, y, z ，则其在 x, y, z 轴上的分矢量为 xi, yj, zk ，故有

$$A = xi + yj + zk$$

x, y, z 叫做 A 的坐标，记为 $A = \{x, y, z\}$ 。

例如 $A = \{2, 3, 1\} = 2i + 3j + 1k$ 。

利用矢量的坐标，其加、减及矢量与数量乘法的运算如下：

设 $\mathbf{A} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\mathbf{B} = \{x_2, y_2, z_2\}$

则 $\mathbf{A} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$

因此有

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (x_1 + x_2)\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\mathbf{j} + (z_1 + z_2)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (x_1 - x_2)\mathbf{i} + (y_1 - y_2)\mathbf{j} + (z_1 - z_2)\mathbf{k}$$

$$\lambda\mathbf{A} = \lambda x_1\mathbf{i} + \lambda y_1\mathbf{j} + \lambda z_1\mathbf{k} \quad (\lambda \text{ 为一定数})$$

例 1 设两定点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 求矢量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标(图 6.13).

解 作矢量 $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$,

则 $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$

但 $\overrightarrow{OM_2} = \{x_2, y_2, z_2\}$
 $= x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$

$$\overrightarrow{OM_1} = \{x_1, y_1, z_1\}$$

$$= x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$$

所以 $\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$
 $= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} = \overrightarrow{M_1M_2}$

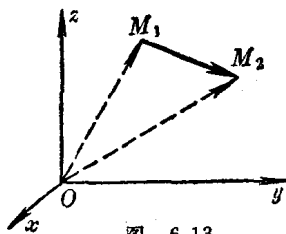


图 6.13

例 2 求证矢量 $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ 与矢量 $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ 平行的充要条件是 a_1, a_2, a_3 与 b_1, b_2, b_3 成比例, 或 $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$.

证 设 a_1, a_2, a_3 与 b_1, b_2, b_3 成比例, 即有数 λ , 使得

$$a_1 = \lambda b_1, \quad a_2 = \lambda b_2, \quad a_3 = \lambda b_3$$

即 $\{a_1, a_2, a_3\} = \{\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3\} = \lambda\{b_1, b_2, b_3\}$

或 $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$

按数乘矢量的定义 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

反过来, 设 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

(1) 若 \mathbf{b} 为零矢量, 即 $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, 则有 $\frac{0}{a_1} = \frac{0}{a_2} = \frac{0}{a_3}$, 即对

应坐标成比例;

(2) 若 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, 那么将 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的起点重合, 因 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 平行, 两向量在一直线上, 即有某数 λ , 使得 $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$, 写成坐标形式即

$$a_1 = \lambda b_1, \quad a_2 = \lambda b_2, \quad a_3 = \lambda b_3$$

或

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda$$

6. 矢量的模, 方向余弦, 方向数

(1) 矢量的模

设向量 \overrightarrow{OM} 的起点为原点 O , 终点为 M (不论起点在那里, 可将起点移至原点, 其在坐标轴上的投影总是相等的)。

向量 \overrightarrow{OM} 在坐标轴上的投影为 $OA = x, OB = y, OC = z$ 。

点 M 在 xOy 面的投影为 P , 于是由勾股定理得

$$(OP)^2 = (OA)^2 + (OB)^2$$

$$(OM)^2 = (OP)^2 + (PM)^2 = (OP)^2 + (OC)^2$$

因此

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OM}|^2 &= (OM)^2 \\ &= (OP)^2 + (OC)^2 \\ &= (OA)^2 + (OB)^2 + (OC)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

即

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1)$$

(2) 方向余弦

若向量 \overrightarrow{OM} 与坐标轴 Ox, Oy, Oz 的正向间的夹角顺次为 α, β, γ , 则 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 叫做这矢量的方向余弦。

因

$$OA = |\overrightarrow{OM}| \cos \alpha$$

$$OB = |\overrightarrow{OM}| \cos \beta$$

$$OC = |\overrightarrow{OM}| \cos \gamma$$

所以

$$\cos \alpha = \frac{OA}{|\overrightarrow{OM}|}, \quad \cos \beta = \frac{OB}{|\overrightarrow{OM}|}, \quad \cos \gamma = \frac{OC}{|\overrightarrow{OM}|}$$

因此得:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad (2) \\ \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} \\ &= 1 \quad (3)\end{aligned}$$

即任何矢量的方向余弦的平方和等于 1. 由此容易推出单位矢量 \mathbf{a}° 的坐标表示为 $\mathbf{a}^\circ = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$.

(3) 方向数

与方向余弦成比例的一组实数 l, m, n , 即

$$\frac{l}{\cos \alpha} = \frac{m}{\cos \beta} = \frac{n}{\cos \gamma}$$

叫做方向数.

令上式的比值为 κ , 则

$$l = \kappa \cos \alpha, \quad m = \kappa \cos \beta, \quad n = \kappa \cos \gamma$$

由

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

得

$$l^2 + m^2 + n^2 = \kappa^2 \quad \text{或} \quad \kappa = \pm \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$$

所以

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{l}{\pm \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad \cos \beta = \frac{m}{\pm \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{n}{\pm \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}\end{aligned}$$

上式应同时取正号或同时取负号.

例 设两定点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 求这两点间的距离 d .