漫话 羣

邓应生 编　梅向明 校订

高等教育出版

漫 话 群

邓应生 编
梅向明 校订

高等教育出版社

本书是介绍群的概念的科普书籍. 作者从日常生活的例子出发，引进了群、子群、同态、同构、正规子群、商群、共轭等概念，并在每个概念后面配有初等数学或高等代数中的例子. 然后介绍了这些概念在解代数方程问题中的应用.

本书可供大学低年级学生与对数学有兴趣的高中学生阅读.

漫话群

邓应生 编

梅向明 校订

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 4.5 字数 100 000

1989 年10月第1版 1989 年10月第1次印刷

印数 0001— 1 130

ISBN7-04-000842-4/O·324

定价2.30元

开场的话

编者想把这本小书写成通俗性的、趣味性的书，并希望读者在读过此书之后增加一点对数学中群论的兴趣. 这个愿望从几本书里得到鼓舞与支持：F. J. Budden著《群的魅力》(*The Fascination of Groups*)，Cambridge *University Press*，将大量身边的事物给以适当的规定后就适合群的要求，构思巧妙别致，使人爱不释手. M. И. Каргаполов与Ю·И. Мерзляков著《*Основы Теории Групп*》，作为一本专著，仍在可能的场合给抽象的数学概念以形象、生动的解释，例如，作者们把正规子群列叫做“抱娃娃的玩偶”(Матрёшка)等等. 编者学习上述做法，对我们周围的某些事物作了一点设计，使它们能说明群的若干概念，从而使读者看到群与我们的生活的某些联系. 这样做恐怕是有益的，但这只是一个初步的尝试，当然难免有缺点、错误，希望读者指正. 此外，还借鉴了其他书中的几个这类例子.

本书想向读者介绍群、子群、同构、同态、共轭、正规子群、商群、群表示等这些概念，但是，考虑到读者读完以后会问，群能解决什么问题？所以在正文的最后一节，写了“群的理论在解代数方程问题中的应用”，以表明群在解决如此困难问题中的巨大威力，写这一节的主要目的是为了说明群的应用，而不在于方程式理论本身，因此介绍是很粗浅的，不能面面俱到，这一点要请读者谅解.

编者想将本书提供给大学低年级学生阅读，编者在第一章中有意叙述了必要的预备知识，所以本书又可作为对数学有兴趣的高中学生的读物.

成稿后校订人梅向明教授给编者以可贵的帮助，并对全文，特

别是最后一节作了校改. 审查者姚昌瑞教授，任永才同志等提了重要的修改意见，还给予热情的帮助. 张爱和与张小萍两同志为编者审阅了此稿，也提了不少意见，对所有这些，编者谨致以诚挚的谢意！出版社领导以及有关同志支持出版此书，编者也表示万分的感谢！

编者

1985.10.

目　录

开场的话……1
壹　预备知识……1
一、集合……1
二、置换……11
三、剩余类……20
四、内部的规律……22
贰　从走马灯谈起——群与群的例子……26
一、走马灯里有数学问题吗？……26
二、群的定义……28
三、群的例子……31
四、两个概念……51
叁　万花筒里的数学——群的知识的深化……55
一、子群……58
二、群的同态……59
三、再谈群的同态……63
四、共轭、共轭元素……68
五、找共轭元素的一种方法……72
六、共轭子群……74
七、群 G 按子群 B 划分为陪集系……78
八、商群……81
九、单群……88
十、换位子群……88
十一、群的表示……92
十二、几个定理……97
肆　“八大锤”的联想——正二十面体运动群及其他……99
一、正二十面体运动群——元数为复合数的单群……99
二、群的理论在解代数方程中的应用……106
附录：群在九层镂空球中的应用……129

壹

预备知识

群是数学中的一个很重要的概念，群的理论现在已发展得很高深，它的应用也极广泛．它不仅对研究数学的其它分支是重要的，而且是研究某些自然科学学科，比如量子力学、光谱学、结晶学、原子物理、粒子物理等的有力武器．但是，群的理论并不是高深莫测的，体现群的要求的现象在我们的周围也可以找到．在本书中，我们将介绍一些这方面的例子．在这一部分中，我们先讲一些预备知识．

一、集　　合

集合这个概念直接反映了现实世界中常见的现象，它在数学中是不给予定义的概念．从直觉上来说，我们可以举出许多集合的例子：在一间屋子里，床、椅、桌、台灯、热水瓶、茶杯等合起来，是集合，可以叫做此屋中的“生活用具的集合”，椅、桌、台灯、笔、墨水瓶等合起来是集合，它们可以做为学习的用具，叫做“学习用具的集合”，把所有这些东西及其它用具合起来，叫做“用具的集合”．在我们身边还有许多其它集合，不胜枚举，以后也把集合简单地叫做“集”．

在数学中，1,2,3，…的全体是自然数的集合，以 N 作为标记；0，±1，±2，…的全体是整数集合，以 Z 作为标记；当用 n 表示任

意给定的自然数,a 表示任意给定的整数时,$\frac{a}{n}$这种形式的所有的数的全体叫做有理数集合,以Q 作为标记; 方程 $x^3-1=0$ 的三个根 $1,\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$合起来叫做此方程解的集合,$1,\omega,\omega^2$ 叫做 1 的三次根, 一般地 $x^n-1=0$(n 为自然数)的根叫做 1 的 n 次根.

由上面的例子可以看出,集合是由所谓元素构成的. 比如"生活用具的集合"以桌、椅等等作为它的元素; 整数集合以 $0,\pm1$, ±2 等等作为它的元素. 元素的个数可以是有限的,例如$x^3-1=0$ 的解集合, 它的元素个数是 3; 元素的个数也可以是无限的,例如自然数集合的元素个数就是无限的.

习惯上用大写英文字母, 如 $E,M,A,\cdots$来表示集合; 用小写英文字母 $a,b,c,x,\cdots$来表示元素. 为了用符号来表示"a 是A的元素"这句话,引用记号$\in$, 它表示"属于"的意思,这样,

$$a\in A$$

就表示"a 是 A的元素", 或者说: "a 属于 A", 又用 $\notin$ 表示"不属于",于是

$$b\notin A$$

就表示"b 不是 A 的元素",或"b 不属于 A".

为了表明一个集合 A 具有怎样的一些元素, 常用如下的表示方式:

当 A 的元素的个数为有限的时候, A 具有元素 a,b,c,d,e 就表示为:

$$A=\{a,b,c,d,e\}.$$

当元素的个数为无限的时候, 比如在全体自然数集合N的情形,可以写作

$$N=\{1,2,3,\cdots\},$$

在全体整数的集合 Z 的情形，可以写作

$$Z=\{0, \pm1, \pm2, \cdots\}.$$

请注意后面的点不可少，它表示无限的意思，这是一种象征手法．还有许多不能这样逐一列出的情形，这时就采用下面的表示方式，例如可将全体有理数的集合 Q 表示为

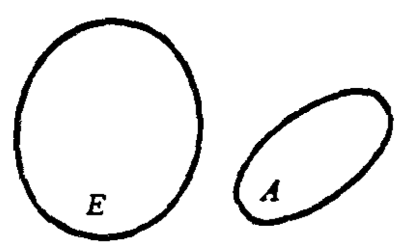
$$Q=\left\{\frac{a}{n}\middle|\forall n\in N,\ \forall a\in Z\right\},$$

花括号中的 N 就是上面所说的自然数的集合，Z 是整数的集合；$\forall$ 的意思是"每一个"（或"所有的"），所以 $\frac{a}{n}$ 不只是一个数，而是任何有理数的表达式．给定了 a 和 n，就得到一个有理数；给定另一组 a 和 n，又得另一个有理数，所以 $Q=\left\{\frac{a}{n}\middle|\forall n\in N,\ \forall a\in Z\right\}$ 将所有的有理数概括无遗！

接着顺便谈一下实数系与复数系．在中学我们已经知道，有理分数都可表示为循环小数；而非循环小数便是无理数，有理数与无理数的全体叫做实数系，记作 R．

$a+bi$ 形式的数（这里 $a, b\in R$，$i=\sqrt{-1}$）叫做复数．复数的全体叫复数系，记作 C．

为了形象化起见，还可用封闭的平面图形来表示集合，如右图所示．这是示意图，也是一种象征手法．



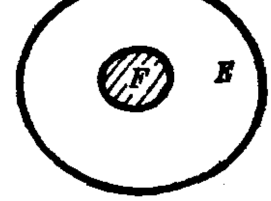
子集 从前面的例子可以看到，"学习用具的集合"的元素，包含在所有"用具集合"里面；自然数集合的元素包含在整数集合里面；而整数集合的元素又包含在有理数集合里面，等等．换句话说，在上述三种情况中，前面的集合是后面的集合的一部分，从而就说前面的集合是后面的集合的子集．概括地说：

一个集合 F，如果它的一切元素都属于某个集合 E，就说 F 是

E 的子集，写作 $F\subset E$，或 $E\supset F$. 从这里所说的条件可以看出，如果 $F\subset E$，那末当元素 $f\in F$ 时，必然有

$$f\in E.$$

请勿将 $\subset$ 与 $\in$ 这两个符号混淆.



$F\subset E$

一般地说，属于某个集合 A 的元素 a 都具有某种性质，此性质简略地用一个符号 P 来表示. 集合 A 就记作

$$A=\{a\,|\,\text{所有的 } a \text{ 具有 } P\}.$$

例如 $\rho=1, \omega, \omega^2$ 所具有的性质是，将它们代入 $x^3-1=0$ 中，都使左右两端相等，于是 $x^3-1=0$ 的解集合就记作

$$X=\{\rho\,|\,\rho \text{ 满足 } x^3-1=0\}.$$

不含有元素的集叫做空集，用符号 $\varnothing$ 来表示. 例如，其平方等于 2 的有理数的集是空集. 又例如，平面几何中，三内角之和大于 180° 的三角形的集合就是平面三角形集合的空子集. 我们规定对于任意集合 E，有

$$\varnothing\subset E,$$

还可看到：

$$E\subset E.$$

集合的运算　在集合与集合之间可以建立一些特定的运算，主要的有以下几种：

(1) 并　先看开始时举出的例子，在一个房间里生活用具有床、椅、桌、台灯、热水瓶、茶杯；学习用具有椅、桌、台灯、笔、墨水瓶，两类用具并在一起就是：床、椅、桌、台灯、热水瓶、茶杯、笔、墨水瓶，这里椅、桌、台灯是两种用具集合共有的，只取一次，这种把物品归并在一起的做法是集合的一种运算——“并”的实际背景，用数学术语来说：

设有 A 与 B 两个集合，所谓 A 与 B 的并，就是这样的元素组成

的集合，这些元素或者属于 A，或者属于 B. 用普通的话说，就是把 A 与 B 中的元素都取用无遗，但共同的只取一次. 对三个或三个以上的集合的并，可以依此类推，写法是

$$A\cup B,\ A\cup B\cup C,$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i\,(=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n),$$

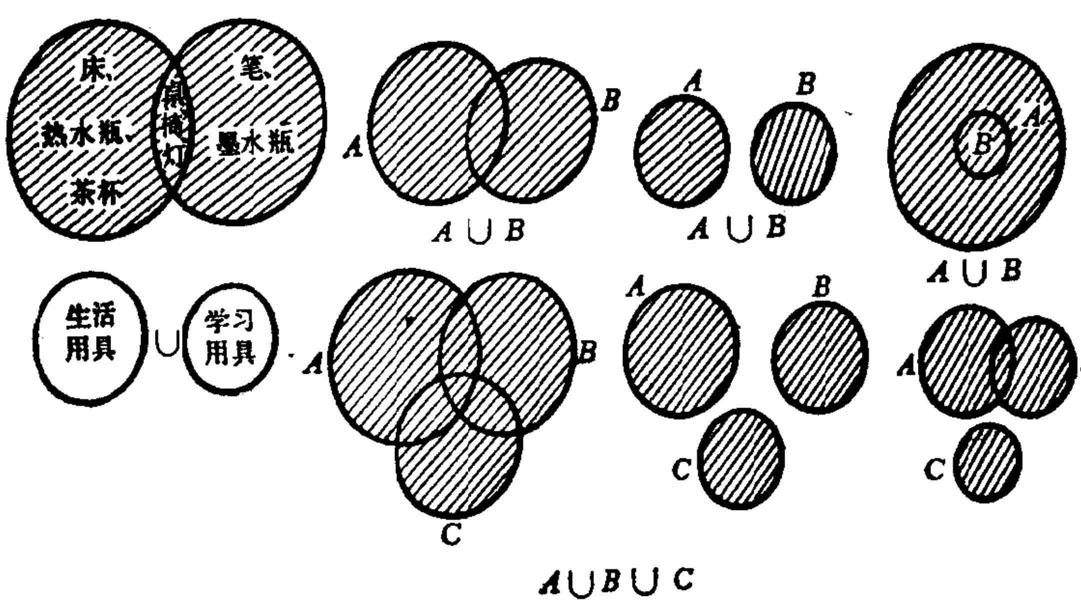
这里我们只限 n 为有限的情形.

从这里所说的条件可以看出，如果 $a\in A$, $b\in B$，那末

$$a\in A\cup B,\quad b\in A\cup B.$$

但是，如果 $c\in A\cup B$，那末，我们只能说，c 可能属于 A，可能属于 B，必然属于其中之一. 但究竟属于哪一个，或同时属于两个，还是不清楚的.

用图形来表示并的运算如下:



阴影部分表示并的结果

从所说并的意义来看，$A\cup B$ 与 $B\cup A$ 是一个意思. 用数学的术语来说，对于运算 $\cup$，A 与 B 的次序可以交换.

请注意，如果 $B\subset A$，那末 $B\cup A=A$; 另外，

$$A\cup\varnothing=A.$$

（2）交　还是看前面的用具的集合．生活用具中的桌、椅、台灯与学习用具中的桌、椅、台灯是共同的，也就是生活用具的集合与学习用具的集合“相交”．在集合的运算中，所谓交的运算，就是以这样一类实际问题为背景的．

设有两个集合 A 与 B，所谓 A 与 B 的交就是这样的元素所组成的集合，这些元素既属于 A 同时又属于 B，写作 $A\cap B$．对三个或三个以上(这里只限于有限个)的集合，可以依此类推，

$$A\cap B\cap C,\quad \bigcap_{i=1}^{n}A_i\,(=A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n).$$

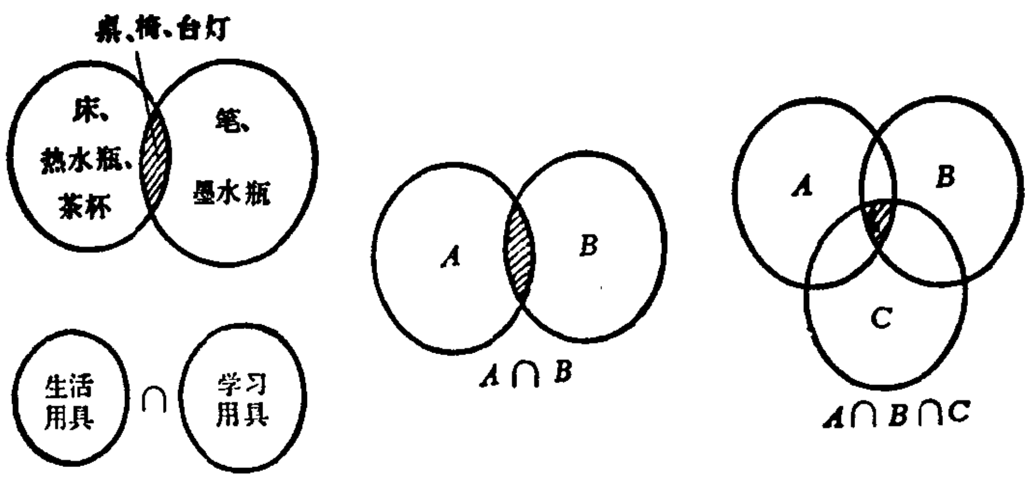
此处 n 为有限的自然数．

从这里所说的条件可以看出，如果 $c\in A\cap B$，那末必然有

$$c\in A \text{ 同时 } c\in B.$$

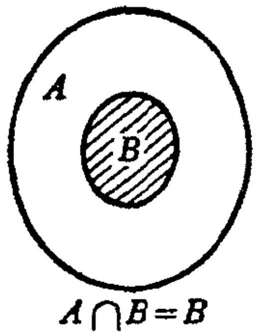
再从所说交的意义来看，$A\cap B$ 与 $B\cap A$ 是一个意思．用数学术语来说，对于运算 $\cap$，A 与 B 的次序可以交换．

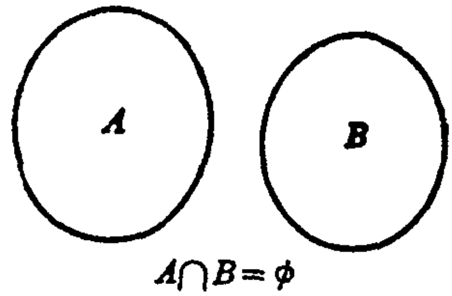
用图来表示交的运算如下：



阴影部分表示交的结果

请注意，如果 $B\subset A$，那末 $A\cap B=B$，如果 $A\cap B=\varnothing$，那末 A 与 B 不相交．



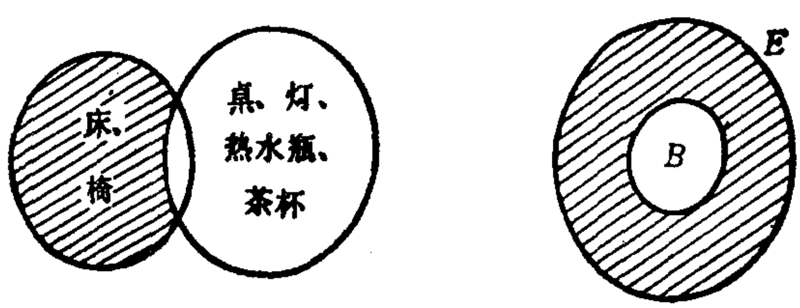


(3) 补 仍请看上述生活用具的例子．如果将这些生活用具的集合记作 E，而其中桌上的用物：桌、台灯、热水瓶、茶杯作为子集 B，那末在桌上用物的集合 B 之外再补上床、椅，就构成此房中生活用具的集合 E．

用数学的语言来说，就是：

设有集合 E 和它的子集 B，所谓 B 对于 E 的补集就是这样一些元素 b 的集，这些 b 属于 E，但不属于 B，即 $b\in E$，且 $b\notin B$，把补集写作 $C_E B$，或简写作 CB．B 与 $C_E B$ 之间有关系：$B\cup C_E B=E$——这体现了补全的意思；另有 $B\cap C_E B=\varnothing$——这体现了“要补全而成 E 的，正是 B 中所缺的”．

用图表示补的运算如下：



阴影部分表示 $C_E B$

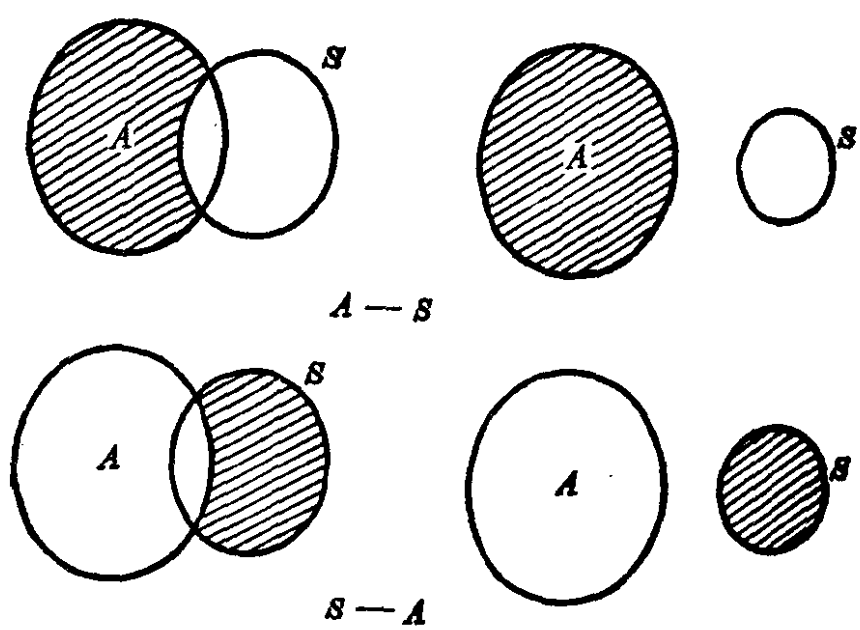
(4) 差 在上面生活用具的集合 E 与学习用具的集合 S 之间还可能有以下两种关系：(1)只属于生活用具集合，不属于学习用具集合的物品：床、热水瓶、茶杯；(2)只属于学习用具集合，不属于生活用具集合的物品：笔、墨水瓶．在第一种情形，床、热水瓶、

茶杯合在一起叫做生活用具集合对于学习用具集合的差；在第二种情形，笔、墨水瓶合在一起叫做学习用具集合对于生活用具集合的差.

在集合运算中，设有两个集合 A 与 S，所谓 A 对 S 的差集，是这样的元素组成的集，这些元素只属于 A 不属于 S，写作 $A-S$. 可以同样地定义 S 对 A 的差集 $S-A$.

显然 $A-S$ 与 $S-A$ 不是一回事，即对差运算来说，A 与 S 的次序不能交换.

用图表示差的运算如下：



阴影部分表示差

映射 设有集合 A, B，如果存在某个确定的规则，使 A 的每个元素 a 对应于 B 的某个确定的元素 b，这时，就说定义了由 A 到 B 的映射，映射通常用 f, g, φ, ψ 等表示，并记作

$$f: A \to B,$$

$b=f(a)$ 称为 a 在 f 下的象，A 称为 f 的定义域，当 a 取遍 A 的每个元素时，$f(a)$ 的全体叫做 f 的值域.

例 1 设 A 为 $Z=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$，$B=\{\cdots-1,$

1}，那末对应规则

$$\varphi: \begin{array}{l} \text{凡偶数} \to 1 \\ \text{凡奇数} \to -1 \end{array}$$

给出一个 $Z \to B$ 的映射.

例 2 设 $Z=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$，$B=\{0,1,2,3,4,5,6\}$，对应规则为:

$$\varphi: z \in Z \longrightarrow z \text{ 被 7 除所得余数} (\geqslant 0),$$

则 φ 给出了一个映射.

例 3 设 $A=X=\left\{\cdots,-2\pi,-\frac{3}{2}\pi,-\pi,-\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\pi,2\pi,\cdots\right\}$，$B=\{1,i,-1,-i\}$，对应规则为

$$f: x \to \cos x + i\sin x,$$

则 f 确定了一个映射.

例 4 设 $A=R^+$(即大于零的实数)，$r \in R^+$，$B=R$ (实数的全体)，对应规则为

$$\varphi: r \to \ln r,$$

则 φ 确定了一个映射.

设有定义域 A，值域 B. 对于 $a_1 \neq a_2$，$a_1, a_2 \in A$，有

$$f(a_1) \neq f(a_2),$$

而且对于每一个 $b \in B$，都存在 $a \in A$ 使 $f(a)=b$ 成立，这样的映射 f 就叫做一一对应的映射.

例如，在 $A=R$，$B=R$ 时，

$$f: x \to x+1 \quad (x \in R),$$

这映射是一一对应的.

现在请读者思考下面一些问题.

1. 在平面直角坐标系中，直线

$$y=x$$

可看作点的集合 L_0，点用实数的对 (x, y) 来表示．按照前面所说的集合表示法，将 $y=x$ 看作一种性质，问可否将 L_0 写成

$$L_0=\{(x, y) \mid y=x, \quad x \in R\}.$$

2．设有一些直线，在平面直角坐标系中由方程

$$l_c: y=x+c, \quad c=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$$

给出，这些直线所成的集合记作 $\mathscr{L}$，问如何用一个式子来表达 $\mathscr{L}$？又

$$l_2 \in \mathscr{L},$$
$$\{l_{-3}, l_5\} \subset \mathscr{L},$$
$$l_0 \in \{l_0, l_1\} \cup \{l_1, l_2\},$$
$$l_1 \subset \{l_0, l_1,\} \cap \{l_1, l_2\},$$

这里，例如 l_2, l_{-3} 各为

$$l_2: y=x+2,$$
$$l_{-3}: y=x-3.$$

这些写法，哪些是合理的？哪些是不合理的？

$$\{l_{-1}, l_2\} \cup \{l_0, l_{-1}, l_3\}=?$$
$$\{l_{-1}, l_2\} \cap \{l_0, l_{-1}, l_3\}=?$$
$$\{l_{-1}, l_{-3}\} \cap \{l_0, l_1, l_2\}=?$$
$$C_{\mathscr{L}}\{l_{-2}, l_{-1}, l_0, l_1, l_2\}=?$$
$$\{l_{-3}, l_{-1}, l_0, l_3\}-\{l_2, l_{-1}, l_5\}=?$$
$$\{l_2, l_{-1}, l_5\}-\{l_{-3}, l_{-2}, l_0, l_3\}=?$$

3．在平面直角坐标系中，圆 O

$$x^2+y^2=1$$

与抛物线 P

$$y=x^2,$$

各可以看作平面上点的集合，它们的交也就是这两条曲线的交点的全体(如果有交点的话)，试写出 $O \cap P$.

4. 上文中已说过记号 Q,R,C 的意义，数字 0 是它们的元素，由 0 一个元素组成的子集便写成 $\{0\}$，这写法对不对？从 Q,R,C 中各挖去 $\{0\}$，用式子各应该怎样表达？

二、置　换

读者一般都知道电话号码，同样几个数字，例如 1,2,3,4，其排列次序不同就代表不同的用户：1234 是用户甲，3142 就成为用户乙了. 汽车牌照号码的情形是一样的，其他事物也有一个排列问题，譬如黄、紫、白三盆菊花装饰在花架上，黄紫白是一种装饰式样，白紫黄另是一种装饰式样，等等.

从实例来看，置换是什么：从号码 1 2 3 4 到 3 142 是一个替换过程，即

1　换成　3

2　换成　1

3　换成　4

4　换成　2

或写成下面的形式：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

并把它叫做置换.

上面三种颜色菊花的排列式样也可写成置换形式

$$\begin{pmatrix} \text{黄} & \text{紫} & \text{白} \\ \text{白} & \text{紫} & \text{黄} \end{pmatrix}.$$

不过，一般地讲，我们在数学中都是把事物数字化或符号化，以便于运算，例如，我们不妨将黄菊花以 A 表示，紫菊花以 B 表示，白菊花以 C 表示，等等.