

TK 47/
1247

叶轮机械中的三元流 理论及其应用

张惠民 编

国防工业出版社

内 容 简 介

本书从分析三元空间气流的运动学开始,按叶轮机机械的发展过程,循序渐进地介绍叶轮机机械设计和分析中所采用的一元、二元和三元流动理论。书中着重介绍近几年来国内外采用较广的流线曲率法的准三元流理论以及 S_1 和 S_2 流面为基础的普遍三元流理论。

本书适合于航空院校发动机专业或其他动力专业作为教材或参考书,也可为已具有微积分、向量和张量分析、气体动力学以及叶轮机机械原理等基础知识的从事叶轮机机械工作的科技人员阅读参考。

叶轮机机械中的三元流 理论及其应用

张惠民 编

责任编辑 阎瑞琪

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 $1/32$ 印张 $7\frac{1}{2}$ 155千字

1984年5月第一版 1984年5月第一次印刷 印数: 00,001—00,000册

统一书号: 15034·2664 定价: 0.94元

2,750

前 言

人们对叶轮机中气流运动规律的认识，是在不断的实践中逐渐加深的。早期，由于受到各方面的限制，叶轮机一级的载荷较轻，叶片也短。因此，在当时的具体情况下，假设气体微团沿流程流动时，它的参数沿周向和径向都无变化，只是沿轴向有变化。从而设计叶片时就可以根据气体动力学一元流的知识，只计算中径上的气流参数，画出速度三角形之后再进行叶片造型。显然，这时设计出的叶片是直叶片。

二十世纪四十年代，随着叶轮机载荷的不断增加，例如，大功率蒸汽轮机的出现，后面几级的叶片很长，如果仍用直叶片则功率和效率都会大大下降。于是在涡轮叶片的气动设计方案中，先后出现了等环量（又称自由旋涡），等 α_1 （即涡轮导向器出口的绝对气流流出角 α_1 沿径向不变）和等反力度等的叶片扭向规律。这些扭向规律有些（例如等环量）也在压气机叶片的扭向规律中采用。这几种扭向规律的共同特点都考虑了气流参数沿径向的变化。把流过叶轮机中的复杂气流首次简化为沿着不同半径的圆柱表面上的流动，也就是把气流的径向分速度略而不计。在这种近似的假设下，流面与子午面的交线就是一条平行于转轴的直线。这时沿着整个流程气流参数不但沿轴向有变化，而且沿径向也有了变化。这样，气流流型就由一元发展到二元，叶片也就从直叶片变为扭转叶片。沿径向的气流参数分布就是用众所周知的“简化

径向平衡方程式”计算的。实践证明，根据二元流型曾设计出性能很好的压气机和涡轮。

但是，随着航空发展的需要，叶轮机械的发展，特别是在航空上为了提高飞机的性能，对压气机和涡轮的设计不断地提出新的要求和指标，从而使压气机的第一级由亚音速过渡到跨、超音速，第一级轮毂比 $\bar{a}$ 也就下降到 0.4 左右，这时流线的曲率和斜率对气流参数的影响就特别突出，要设计出这样的叶轮机械必须突破“沿圆柱表面”流动的束缚，把流线的曲率和斜率考虑进去，同时还要考虑熵和功沿径向的变化（二元流的设计初期，一般都假定气流是轴对称，等功等熵，后期也考虑变功变熵）。因此，就迫切要求建立新的流动模型，把二元流发展到三元流。1952年吴仲华教授发表了“理想气流的三元流普遍理论”^[1]，他首先提出 S_1 和 S_2 流面的概念，并交替应用二元的 S_1 和 S_2 流面来解决整个叶轮机械中的三元流问题。由于计算机存贮单元和运算速度的限制，这种通用的三元流理论在五十年代还没有具体应用到工程实用中去。六十年代以后，在 S_2 流面的基础上，有人提出“矩阵通流法”^[2] 和“流线曲率法”^[3,4,5]。这两种方法的数学模型是一样的，只是解的方法不同。本书除了介绍流线曲率法（又称速度梯度法）之外，也介绍 S_1 和 S_2 相对流面的概念以及这两种流面上的动力学方程式。

当前，由于电子计算机的发展，在设计叶轮机械时，应用三元流理论已比较普遍，并日趋完善。中国科学院工程热物理研究所和数学计算所，其他研究单位和工厂等编排了许多工程上可用的计算程序，为我们提供了不少有利条件。但是，要解决三元流的设计和分析问题，理论计算固然重要，

但如果没有反映实际气体流动的实验数据或者数据不够充分,就很难正确估定气流沿径向的损失分布,不容易较正确的预估环形附面层的厚度沿流程的发展,也很难较有把握的计算叶栅出口的气流落后角,等等。近几年来国内在积累我们自己实验得的可靠数据方面虽然做了不少工作,但还不够多,大部分还是参考或直接采用国外的资料,因此,大力开展叶轮机械的试验研究,进一步补充和积累有关的实验数据,就显得非常必要了。

本书共分六章。第一章从流体的空间运动学讲起,阐述了流体微团的绝对运动和相对运动,得出了两种运动间的速度和加速度的关系式,详细分析了各种分速度间的关系,介绍了一些场论中经常用到的微分运算符。第二章指出在叶轮机械中流动的气体所必须遵循的基本方程:连续方程、动力学方程和气体状态方程,并在第一章运动学的基础上导出了理想流体的欧拉方程的各种表达式。第三章分析了叶轮机械中实际气体流动时的复杂性及其简化,从而得出了叶片排之间的完全径向平衡方程式。简单回顾了在叶轮机械气动设计的发展过程中,如何从一元流过渡到二元流,亦即应用简化径向平衡方程,一直到六十年代初期开始的准三元流,也就是目前为大家所熟悉的三元流计算方法。实际上,目前常用的三元流气动计算,只是在叶片排间的轴向间隙或者只在 $S_{2,m}$ 流面上解完全径向平衡方程后,再沿径向取若干个 S_1 流面造型,这是三元流的一种简化,和真正的三元流尚有一段距离。在这一章中还着重介绍了间接地考虑粘性所造成的流动损失的各种工程上常用的方法。第四章介绍了五十年代中应用很普遍并取得良好设计效果的简化径向平衡方程的气动计算

法，详细地写出了正反问题的简化平衡方程式以及它们的计算步骤。第五章着重介绍了目前工程上应用较为广泛的准三元流气动算法——流线曲率法（或称速度梯度法），这种方法具有物理概念上较为清晰易懂、计算机的内存量少和计算速度快等优点，而它的缺点则在于原始参数选得不恰当时，收敛很慢容易出现不稳定。第六章较详细地介绍了 S_1 和 S_2 流面的物理意义及其流面上的动力学方程和流场中沿任意曲线的速度梯度方程，同时提到从这个通用方程可以推导出适用于 S_1 和 S_2 流面上沿任意方向的速度梯度方程。介绍了正反问题中判别偏微分方程性质的准则和目前对这个准则的不同看法。另外，还介绍了求解偏微分方程式的几种常用的数值方法。为了介绍使用非正交曲线坐标的叶轮机三元流动的基本方程，编写了一些有关张量运算的基本知识。

最后要说明一点，本书着重叙述叶轮机气动设计的发展过程和目前三元流的现状及其有关的几个物理概念，至于具体的解法和例子，国内外已有专论文章，不在这里重复，读者可参阅书后目录中的有关文献。阅读本书的读者需要具备气体动力学、叶轮机原理、矢量和张量分析的基本知识。

目 录

符号	1
第一章 空间气流的运动学基础和流场中的	
微分运算符	5
§ 1-1 叶轮机械中的坐标系	5
§ 1-2 绝对速度 ($\vec{C}$) 在绝对圆柱坐标系中的分量	11
§ 1-3 气流流过转子叶片通道时的绝对速度和相对速度	13
§ 1-4 叶轮机械中空间气流的加速度	14
1. 绝对加速度在坐标轴上的分量	15
2. 气体微团流过转子叶片通道时的绝对加速度和相对加速度沿三个 坐标轴的分量	16
§ 1-5 圆柱坐标系中的梯度、散度和旋度的表达式	18
1. 哈密顿运算符 ∇	18
2. 梯度	19
3. 散度	19
4. 旋度	19
§ 1-6 三元流场中常用的微分运算符	22
1. 速度沿流体微团运动方向的全导数	22
2. 微分运算符 ($\vec{C} \cdot \nabla$) 和 ($\vec{W} \cdot \nabla$)	23
3. 运算符 $\vec{C} \cdot \nabla$ (或 $\vec{W} \cdot \nabla$) 的另一种形式	24
4. 全导数运算符 $\frac{D}{Dt}$ 的另一种形式	25
§ 1-7 加速度的另一种表达形式	26
第二章 叶轮机械中气体流动的基本方程	28
§ 2-1 理想流体的动力学方程	28
§ 2-2 能量方程	31
1. 绝对运动 (静子) 中的能量方程	32

VIII

2. 相对运动(转子)中的能量方程	33
3. 总焓 H 和转子焓 I 间的关系	37
4. 动坐标中的总焓 H_w 和转子焓 I 间的关系	37
§ 2-3 连续方程和状态方程	39
1. 连续方程	39
2. 状态方程	41

第三章 在叶轮机械中欧拉方程的应用和

对粘性损失的处理方法	42
------------	----

§ 3-1 叶轮机械中实际气流流动过程的复杂性及其简化	42
1. 流动过程的复杂性	42
2. 实际流动的简化	43
§ 3-2 叶轮机械中的欧拉方程	45
1. 三元流的基本方程	45
2. 欧拉方程式的进一步简化——完全径向平衡方程式	48
§ 3-3 轴流式叶轮机械设计方法的发展	49
1. 一元流动模型	49
2. 二元流动模型	50
3. 准三元流的流动模型	51
§ 3-4 叶轮机械中粘性损失的处理方法	54
1. 端面附面层	55
2. 叶背叶盆附面层和后缘尾迹	59

第四章 叶轮机械的两大问题及其解法

§ 4-1 叶轮机械的反问题(即设计问题)	77
1. 二元流型设计中所用的方程式	78
2. 叶片的扭向规律	79
3. 适用于数值迭代的简化径向平衡方程式	80
4. 联系叶片排前后气流参数的能量方程式	83
5. 联系叶片排前后轴向分速度 C_x 分布的连续方程式	84
6. 原始数据和初步设计	84
§ 4-2 轴流式压气机级的气动设计步骤(第一例)	85
1. 转子部分	85
2. 静子部分	90
3. 级的增压比和效率	91

§ 4-3 叶轮机机械级的气动设计 (第二例).....	92
§ 4-4 叶轮机机械的正问题 (即气动验算和性能分析).....	94
1. 气动验算前的准备工作.....	94
2. 选定落后角 (又称脱轨角) δ 的计算公式.....	95
3. 简化径向平衡方程式的变换.....	99
§ 4-5 压气机的径向平衡方程式.....	99
1. 转子后面.....	99
2. 静子后面.....	103
§ 4-6 涡轮的径向平衡方程式.....	106
1. 静子后面.....	106
2. 转子后面.....	109
第五章 准三元流型中的流线曲率法.....	112
§ 5-1 流线在流程中发生径向移动的原因.....	112
1. 叶片排前后密度沿径向的梯度不同.....	113
2. 叶片厚度沿径向有变化.....	113
3. 叶片力的径向分力 F_r 的作用.....	114
4. 机匣内壁和轮毂形状的影响.....	115
§ 5-2 流线曲率法中的径向平衡方程.....	117
§ 5-3 完全径向平衡方程式的应用.....	123
1. 反问题时的形式.....	124
2. 正问题时的形式.....	125
§ 5-4 子午面上沿任意方向的平衡方程式.....	128
§ 5-5 平衡方程式的差分表达式.....	134
1. 反问题.....	134
2. 正问题.....	136
§ 5-6 在电子计算机上解正反问题时的步骤.....	136
1. 原始参数和选定的参数.....	137
2. 具体步骤.....	137
第六章 三元流的普遍理论.....	145
§ 6-1 轴对称理论.....	145
§ 6-2 三元流的流场模型.....	148
1. S_1 和 S_2 流面概述.....	148

2. 流面方程以及沿流面的偏导数	151
§ 6-3 S_2 流面上的动力学方程、连续方程和 求解气流参数的其他方程组	159
§ 6-4 S_1 流面上的动力学方程、连续方程和 求解气流参数的其他方程组	170
1. S_1 流面上的动力学方程	170
2. S_1 流面上的连续方程式	173
3. 求解 S_1 流面上的气流参数所需的方程式	175
§ 6-5 S_1 和 S_2 流面上气动问题的解法	176
1. 求解区域的确定	177
2. 解题时主方程式的确定	177
3. 选定恰当的数值法解主方程式	190
§ 6-6 叶轮机械内理想气体沿任意曲线方向的梯度方程式	195
1. 流面上的气流参数沿任意曲线方向的偏导数	195
2. 沿任意曲线方向的速度梯度方程式	196
3. 基本方程式的应用	198
§ 6-7 非正交曲线坐标系中的动力学方程和连续方程式	204
1. 张量的基本概念	205
2. 坐标系转变时张量的分量变化	206
3. 三元空间中无限接近两点间距离的平方的基本二次式	208
4. 基本坐标系和倒易坐标系	209
5. 逆变和协变分量的相互转换	212
6. 张量的微分运算	214
7. 相对流面 S_1 和 S_2 中非正交坐标系的选定以及 g_{ij} 和 g^{ij} 各分量的计算	222
8. 速度的逆变分量转换成速度的协变分量	225
9. 非正交坐标系下的连续方程式	226
10. 非正交坐标系下的欧拉方程式	226
11. 非正交坐标系下的能量方程	227
参考文献	228

符 号

A^i	向量 $\vec{A}$ 的逆变分量
A_i	向量 $\vec{A}$ 的协变分量
$\vec{C}$	绝对速度
$\vec{C}_m$	子午面上的绝对速度分量
D_s	静子叶片的扩压因子
D_r	转子叶片的扩压因子
F	质量力; 叶片力
G_a	空气重量流量
G_g	燃气重量流量
H	绝对总焓
H_w	相对总焓
I	转子焓
$K_{b,k}$	流量堵塞系数
K_G	流量系数
K_p	压力修正系数
K_T	温度修正系数
M	气流质量
Q	熵函数
Q_n	外界与气流交换的热量
R	气体常数
S_1, S_2	流面

T	静温
T^*	总温
T_{2ad}^*	等熵滞止温度
$\vec{U}$	牵连速度 (圆周速度)
V	绝对速度; 容积
V^i	绝对速度逆变分量的物理量
v^i	绝对速度的逆变分量
V_i	绝对速度协变分量的物理量
v_i	绝对速度的协变分量
W^i	相对速度逆变分量的物理量
W_i	相对速度协变分量的物理量
w^i	相对速度的逆变分量
w_i	相对速度的协变分量
a	叶型最大挠度与前缘的距离, 涡轮叶栅喉部宽度
a^i	向量 $\vec{a}$ 的逆变分量
a_i	向量 $\vec{a}$ 的协变分量
b	弦长; S_1 流面的一块薄层的径向厚度
C_{iad}	涡轮导向器等熵膨胀到 i 点的速度
f	作用在轴流压气机 S_1 流面上的力
f'	作用在径流式压气机 S_1 流面上的力
g	基本协变张量 g_{ij} 的大小; 重力加速度
g_{ij}	基本协变张量
g^{ij}	基本逆变张量
h	气流静焓
m	沿子午流线方向

n	多变指数
p	气流静压力
p^*	气流总压力
q	任意物理参数; 任意曲线方向
$r, \theta(\varphi), z$	圆柱坐标系的坐标轴
s	比熵、表面积; 沿微团的运动方向
t	栅距; 时间; 叶尖
u^i	曲线坐标
x, y, z	直角坐标系的坐标轴
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	笛卡尔坐标的单位向量
$\vec{i}_r, \vec{i}_\theta(i_\varphi), \vec{i}_z$	圆柱坐标的单位向量
$\vec{e}_i$	基本坐标系的坐标向量
$\vec{e}^i$	倒易坐标系的坐标向量
$\vec{n}$	法线单位向量
$\frac{D}{Dt}$	沿气流微团运动方向的全导数算子
$C \frac{\partial}{\partial s}, W \frac{\partial}{\partial s}$	沿气流微团运动方向的偏导数
$\nabla = i_r \frac{\partial}{\partial r} + i_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + i_z \frac{\partial}{\partial z}$	哈密顿算子
α	气流绝对速度与轴线或额线的夹角
$\bar{\alpha}$	绝对速度 $\vec{C}$ 与子午分速 $\vec{C}_m$ 间的夹角
α_q	子午面上任意曲线方向 q 与 r 轴的夹角
$\eta_{m,s}^*$	按质量平均的滞止绝热效率
η_s	涡轮导向器的绝热效率
$\eta_{p,t}$	涡轮的多变效率
$\eta_{R,t}^*$	压气机转子的滞止绝热效率

$\eta_{f, \dots}$	压气机的多变效率
$\eta_{s, \dots}^*$	压气机一级的滞止绝热效率
$\eta_{R, \dots}^*$	涡轮转子的滞止绝热效率
β	相对气流与转轴或额线的夹角
β_y	叶型安装角, 即弦长与转轴之夹角
$\bar{\beta}$	相对速度 $\bar{w}$ 与子午分速 $\bar{w}_m$ 间的夹角
δ	叶栅出口的气流落后角或叶片表面线与 r 的夹角
δ_s	机匣附面层厚度
δ_h	轮毂附面层厚度
λ	S_2 流面与 r 的夹角
μ	S_2 流面与转轴的夹角; 动力粘性系数
σ	子午分速与转轴的夹角; 总压恢复系数
$\vec{\sigma}$	单位切线向量
τ	稠度 (b/t); 气动函数; S_2 微元流片的切向厚度
ξ_s	涡轮导向器的动能损失系数
ψ	涡轮转子的速度损失系数; 子午面上任意方向 y 与 r 的夹角
φ	涡轮导向器的速度损失系数
θ	叶型弯曲角
ω	转子角速度
$\bar{\omega}$	总压损失系数
ρ	密度
ϵ	计算精度
γ	气流流出角 (静子为 α , 转子为 β)

第一章 空间气流的运动学基础和 流场中的微分运算符

叶轮机械的主要任务就是使气体流过转子中由许多叶片形成的通道时, 气流的某个分速度 (例如切向分速度) 发生预期的变化, 从而使气流获得能量 (压气机), 或使气体输出能量 (涡轮)。因此, 了解各分速度的特点以及它们在气流与叶片的能量交换或气流本身的能量转换中所起的作用, 就非常必要了, 在这一章里, 我们将要介绍:

1. 叶轮机械中采用的坐标系;
2. 气流流过叶轮机械时有哪几种常见的分速度以及它们之间的关系;
3. 在三元流中常用的沿流体微团运动方向的微分运算符。

§ 1-1 叶轮机械中的坐标系

在流体力学中, 大多数采用笛卡尔直角坐标系。但是, 在叶轮机械中, 由于气体微团是在环形的通道中流动, 所以采用圆柱坐标系是比较合适的。

图 1-1 是描写气流流过叶轮机械静子叶片通道时的绝对坐标系。环形通道中某点 A 的位置在笛卡尔坐标系中用 x 、 y 、 z 三个坐标来决定。如用圆柱坐标系, 则同一点 A 的位置为 r 、 θ 和 z 所决定。在叶轮机械中, 习惯上把 z 坐标轴

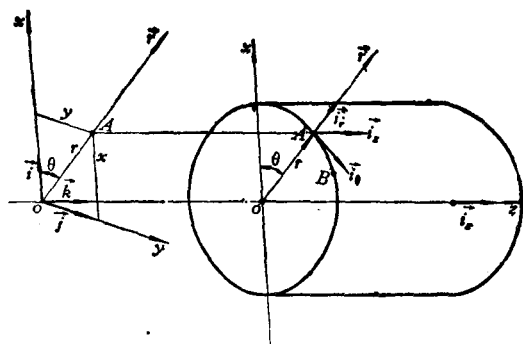


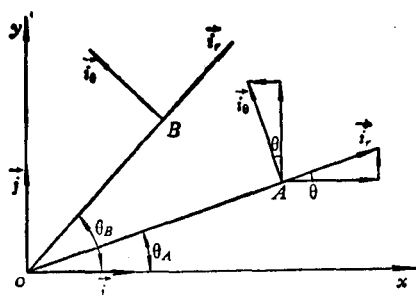
图1-1 绝对坐标系中的笛卡尔坐标系和圆柱坐标系

和转轴放在一起。 A 点的坐标 θ 则是从选定的绝对坐标轴（即静止坐标轴 x ）量起的角度。从 A 点沿半径 r 作一指向半径方向而长度等于1的单位向量 $\vec{e}_r$ ，从 A 点作指向切线方向而长度等于1的单位向量 $\vec{e}_\theta$ ，最后从 A 点作一指向转轴方向而长度等于1的单位向量 $\vec{e}_z$ 。这三个单位向量相互垂直形成一右手正交圆柱坐标系。大家知道，在笛卡尔坐标系中，它的三个坐标轴 x 、 y 、 z 的方向，亦即三个单位向量 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ 的方向不会因流体微团的位置的改变而变化。但在圆柱坐标系中，除 $\vec{e}_z$ 方向不变外，从图1-1可以看出，当流体微团从 A 点移至 B 点时， $\vec{e}_r$ 和 $\vec{e}_\theta$ 的方向都要改变，如图1-2所示。

从图1-2可以得出下列关系式：

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_r &= \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta \\ \vec{e}_\theta &= -\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

从(1-1)式可以看出，因为 $\vec{i}$ 和 $\vec{j}$ 不变，所以 $\vec{e}_r$ 和 $\vec{e}_\theta$ 只是 θ 坐标的函数，将(1-1)式沿微团运动的方向对时间求全

图1-2 $\vec{i}_r$ 和 $\vec{i}_\theta$ 的变化

导数并用 $\frac{D}{Dt}$ 表示, 则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\vec{i}_r}{Dt} &= \frac{\partial \vec{i}_r}{\partial \theta} \frac{D\theta}{Dt} = (-\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta) \frac{D\theta}{Dt} \\ \frac{D\vec{i}_\theta}{Dt} &= \frac{\partial \vec{i}_\theta}{\partial \theta} \frac{D\theta}{Dt} = -(\vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta) \frac{D\theta}{Dt} \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

比较 (1-1) 和 (1-2) 两式, 可得下列关系:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{i}_\theta}{\partial \theta} &= -\vec{i}_r \\ \frac{\partial \vec{i}_r}{\partial \theta} &= \vec{i}_\theta \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

(1-2) 式中的 $\frac{D\theta}{Dt}$ 为流体微团的绝对角速度, 可以用它的切向分速度 C_θ 除以半径 r 得到, 即 $\frac{D\theta}{Dt} = \frac{C_\theta}{r}$, 合并 (1-2)、(1-3) 两式, 就可以得出绝对圆柱坐标系中单位向量 $\vec{i}_r$ 和 $\vec{i}_\theta$ 的全导数:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\vec{i}_r}{Dt} &= \frac{C_\theta}{r} \vec{i}_\theta \\ \frac{D\vec{i}_\theta}{Dt} &= -\frac{C_\theta}{r} \vec{i}_r \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$