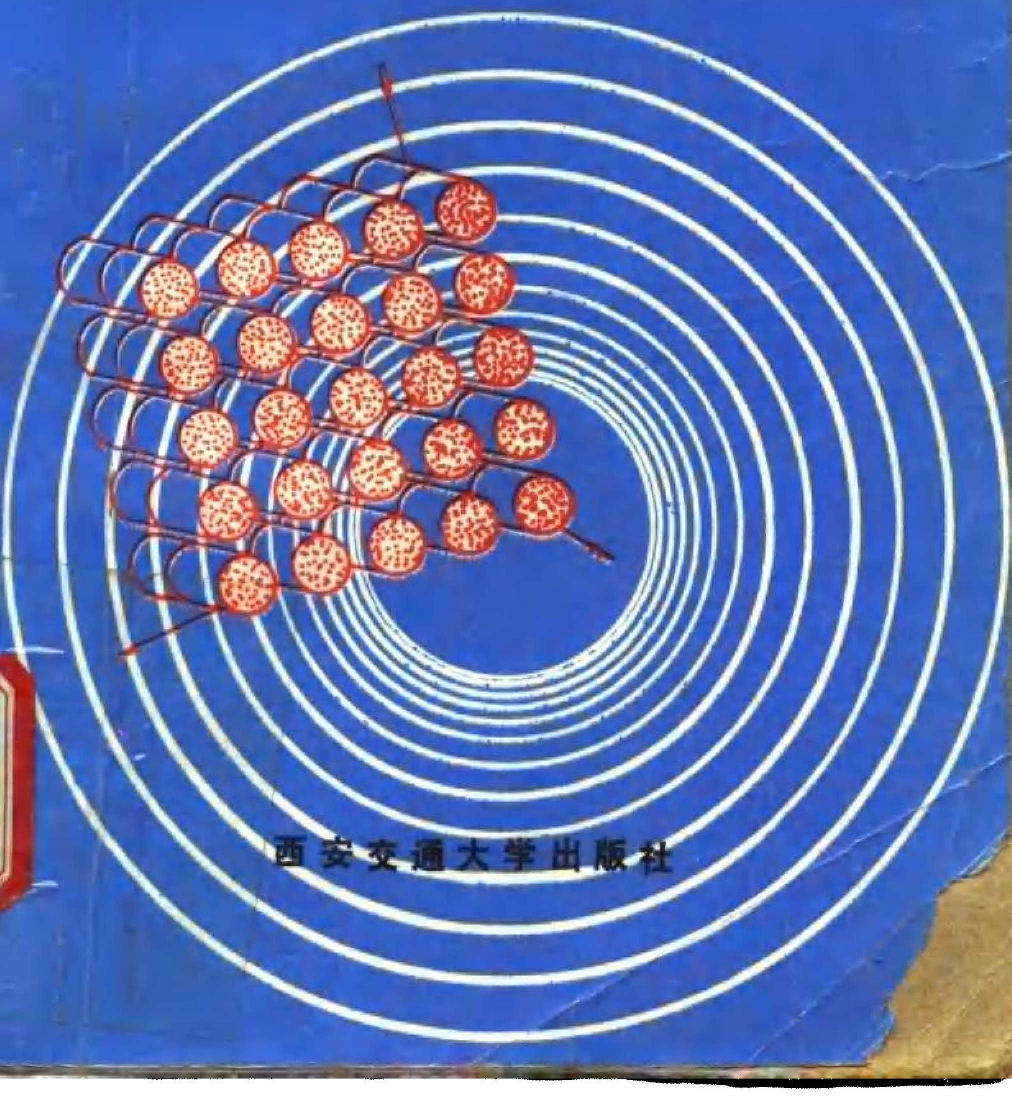
数学建模
——方法与范例

主编 寿纪麟



西安交通大学出版社

数学建模

——方法与范例——

寿纪麟（主编）
宋保军　周义仓　董天信　李翠华

西安交通大学出版社

内 容 提 要

本书分为两篇。第一篇为数学模型导引，共有7章，主要介绍数据拟合，网络模型，运筹与优化模型，种群生态学模型，传染病模型随机模型，计算机仿真等基础知识与一些典型的数学建模方法。各章内容是相对独立的，均配有适量的习题，适合于为非数学类理工科大学生开设的《数学模型》课的基本教材。

第二篇为数学建模范例，共有14个范例，全部选自历届《美国大学生数学建模竞赛》和国内大学生数学建模竞赛的竞赛题，并根据得奖的优秀论文编译而成。通过这些范例可使读者开阔眼界，进一步领略数学建模方法和技巧的精髓。本篇还可用作数学建模竞赛的强化培训的参考资料。

本书也可作为各类大学的学生、研究生和工程技术人员的参考书。

(陕)新登字007号

数 学 建 模

——方法与范例——

寿纪麟 (主编)

宋保军 周义仓 董天信 李翠华

责任编辑 路江

西安交通大学出版社出版

(西安市咸宁西路28号 邮政编码:710049)

西安向阳印刷厂印装

陕西省新华书店经销

*

开本 850×1168 1/32 印张 11.125 插页 1 字数:281千字

1993年12月第1版 1995年11月第2次印刷

印数:4001——8000

ISBN7-5605-0602-X/O·101 定价:9.80元

前　言

近几十年来，随着科学技术的迅速发展和计算机科学的不断进步，数学应用在不断地扩大，早已突破传统的物理、力学、普通工程技术的范围，已经扩展到包括生物、化学、医学、气象、人口、生态、经济、管理、社会学等极其广泛的领域。与此同时，很多部门又涌现出大量的数学定量问题，有待人们去研究与开发。

把数学与客观实际问题联系起来的纽带首先是数学建模，即通过调查，收集数据、资料，观察和研究其固有的特征和内在规律，抓住问题的主要矛盾，提出假设，经过抽象简化，建立反映实际问题的数量关系，也就是数学模型；然后运用数学的方法和技巧（或创造新的数学理论和方法）去分析和解决实际问题。这就需要较深厚的数学基础；敏锐的洞察力和想象力；对实际问题的浓厚兴趣和广博的知识面。好的数学模型往往要通过数学工作者和有关专门家的密切合作才能建立和改进。这里，创造性的思维和大胆探索是必不可少的，所以，数学建模是应用数学工作者也是各工程技术领域专门家的共同任务。

数学建模在发展科学技术方面的重要作用日益受到数学界与工程界的普遍重视。近10多年来首先由一些发达国家在大学中开设数学模型课，并于1985年创办了首届“美国大学生数学建模竞赛”，以后每年举行一次。由于竞赛试题大多直接来自实际问题，是对参赛者综合能力的全面测试，体现了培养高级工程技术人才的方向，所以参赛的国家和学校越来越多，影响很大。

在我国，1983年首先由清华大学在应用数学系开设了数学模型课，现在已普及到各主要的理工科大学。从80年代后半期起，我国的一批大学参加了美国大学生数学建模竞赛，并取得了优异成绩。90

年代初，我国也开始举办地区性的大学生数学建模竞赛。1992 年在中国工业与应用数学学会的倡导下，首次举行了全国八城市九赛区的数学建模联赛，并决定于 1993 年起每年都举办全国大学生数学建模竞赛。

近年来，我校和很多理工科兄弟院校一样，为大学生开设了数学模型课，深受广大优秀学生的欢迎。事实说明，这确实是培养高质量工程技术人才的途径之一。本书是在我们教学实践，并参考有关资料的基础上，专为工科大学生和数学建模竞赛的培训而编写的基本教材和参考资料。

全书共分两篇：第一篇为数学模型导引，主要介绍数学建模中常用的一些基础知识和典型的数学模型。本篇共分七章，分别为数据拟合，网络模型，运筹与优化模型，人口模型，种群生态学模型，随机模型和计算机仿真等。各章都配有适量的习题。主要目的是在浩瀚的数学应用领域中精选一部分较为典型且便于接受的模型，为数学建模入门打下基础。与此同时还编入了 3～5 个大型练习，使学生能亲自动手直接面对实际问题建立数学模型，培养学生综合分析和解决问题的能力。由于篇幅所限，有一些重要的数学建模方法，如聚类分析，最优控制，神经网络算法等未能编入本篇。

第二篇为数学建模范例。这些范例全都直接选自历届美国大学生数学建模竞赛与我国数学建模竞赛试题的优秀论文。由于篇幅的限制，每题只选一篇优秀论文，在保留原论文思路和方法的前提下经过适当压缩编译而成。通过这些范例，读者可以更进一步领略到针对各种不同类型的实际问题创造性地建立数学模型和分析、解决问题的方法和技巧。

本书只要求读者具备大学高等数学、工程数学的基本知识。第一篇可用作工科大学生的数学模型选修课(36 学时)的基本教材，并可根据教学的实际情况选择重点或增删部分内容；第二篇可帮助读者开阔眼界，特别还可作为数学建模竞赛的强化培训材料。

本书各章内容和范例都是相对独立的，读者可根据自己的兴趣和需要选择阅读。鉴于编者水平有限，加之仓促成章，错误与不妥之处一定不少。恳请专家和读者批评指正。

本书在编写过程中得到西安交通大学校、系领导和陕西省工业与应用数学学会的鼓励和支持；上海交通大学向隆万教授审阅了全部文稿，并提出很多宝贵意见，在此一并表示深切的感谢。

编　者

1993年7月于西安

目　　录

第一篇　数学模型导引

1　数据拟合

2　网络模型

3 运筹与优化模型

4 种群生态学模型

5 传染病模型

6 随机模型

7 计算机仿真

第二篇 数学建模范例

第一篇　数学模型导引

1　数据拟合

在生产和科研等实际问题中，常常要处理由实验或测量所得到的一批离散数据。处理这些数据的目的是为进一步研究实际问题提供数学手段。这些数据有时是某一类已知规律（函数）的测试数据，有时是某个未知函数的离散数据。数据拟合就是要通过这些已知数据，去确定某一类已知函数的参数或寻找某个近似函数，使所得的拟合函数与已知数据有较高的拟合精度。

数据拟合的一般提法如下：已知某函数 $y=f(x)$ 的一组测试数据 (x_i,y_i)，$(i=1,2,\cdots,n)$，要寻求一个函数 $\varphi(x)$，使 $\varphi(x)$ 对上述测试数据的误差较小，即 $\varphi(x_i)\approx y_i$，于是我们可以用 $\varphi(x)$ 来近似替代 $f(x)$。

数据拟合的方法很多，一般是根据数据拟合的不同要求而设计的。本章主要介绍几种常用的方法：一般插值法、最小二乘法和样条函数光顺法。

第一节　一般插值问题

一、插值问题的提法

在工程实际中，我们经常会遇到求经验公式的问题。即不知道某一函数 $f(x)$ 的具体表达式，而只能通过实验测量得到该函数在一系

列点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的值 $y_0,y_1,\cdots,y_n$，需要寻找另一函数 $\varphi(x)$ 来近似地替代 $f(x)$，要求满足

$$\varphi(x_i) = y_i,\ (i = 0,1,\cdots,n) \tag{1-1}$$

这类问题就称为插值问题，并称 $\varphi(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数。$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 称为插值节点，式(1-1)称为插值条件。也就是说，插值函数 $\varphi(x)$ 在插值节点 x_i 上的值等于 $f(x_i)$，而在插值节点以外，就用 $\varphi(x)$ 近似替代 $f(x)$。

常用的插值函数是多项式和样条函数，下面先介绍多项式插值。

二、Lagrange 插值公式

已知函数 $y=f(x)$ 在 $n+1$ 个互异点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的值为 $y_0,y_1,\cdots,y_n$，要找一个次数小于等于 n 的代数多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \tag{1-2}$$

使在节点 x_i 上成立

$$P_n(x_i) = y_i,\ (i = 0,1,\cdots,n) \tag{1-3}$$

这就是 n 次代数插值问题。$P_n(x)$ 称为插值多项式。可以证明 n 次代数插值问题存在唯一的解(参见[1])。

下面给出在计算机上容易实现的 Lagrange 插值公式

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{n}\Big[\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}\Big(\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\Big)\Big]y_j \tag{1-4}$$

0

当 $n=1$ 时，式(1-4)为二点一次插值(即线性插值)多项式

$$P_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

当 $n=2$ 时，式(1－4)为三点二次插值(即抛物线插值)多项式

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

另外还有几种插值公式，如 Newton 插值公式、Hermite 插值公 ·

式等，可参阅文献[1]，[6]。

第二节 数据拟合的最小二乘法

插值问题的求解是通过插值条件来确定插值函数的待定系数。然而，插值问题并不总是可解的。当插值条件的个数超过插值函数待定系数的个数时，就可能导致插值问题无解。再说，插值条件的数据都是通过测量得到的，其本身就是近似的，因此，没有必要让插值函数都严格地通过这些测量数据点，而只要求在节点上近似地满足插值条件，并使它们的整体误差达到最小，这便是最小二乘拟合的思想。

一、线性最小二乘拟合

首先引进广义多项式的概念。m 次多项式是函数系$\{x^k\}_{k=0}^{m}$的线性组合，一般地，设函数系$\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{m}$是线性无关的，则其线性组合

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(x) \tag{1-5}$$

称为广义多项式。如三角多项式

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{m} b_k \sin kx$$

就是函数系$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos mx, \sin mx\}$的广义多项式。

给定一组测量数据$(x_i, y_i)(i=1,2,\cdots,n)$和一组正数 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$，求一广义多项式 $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(x)$，使得目标函数

$$S = \sum_{i=1}^{n} \omega_i [\varphi(x_i) - y_i]^2 \tag{1-6}$$

达到最小。

此时，称 $\varphi(x)$为数据$(x_i, y_i)(i=1,2,\cdots,n)$关于权系数 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ 的最小二乘拟合函数。由于 $\varphi(x)$的待定系数 $a_0, a_1, \cdots, a_m$ 全部

以线性形式出现，故又称上述问题为线性最小二乘问题。目标函数(1-6)应根据需要来选择，有时还可以包含导数项；权系数的选取更是灵活多变的，有时选用 $\omega_i \equiv 1(i=1,2\cdots,n)$，统计上则常选用 $\omega_i \equiv \frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，这时，上述问题便成了均方差的极小化问题。

二、正规方程组

目标函数(1-6)是关于参数 $a_0,a_1,\cdots,a_m$ 的多元函数，由多元函数取得极值的必要条件知，欲使 S 达到极小，须满足条件

$$\frac{\partial S}{\partial a_k}=0 \qquad (k=0,1,2,\cdots,m) \tag{1-7}$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i[\varphi(x_i)-y_i]\varphi_k(x_i)=0$$

亦即

$$\sum_{j=0}^{m}\Big[\sum_{i=1}^{n}\omega_i\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)\Big]a_j=\sum_{i=1}^{n}\omega_i y_i\varphi_k(x_i)$$

$$(k=0,1,2,\cdots,m) \tag{1-8}$$

式(1-8)是关于未知量 $a_0,a_1,\cdots,a_m$ 的线性方程组，称为正规方程组。

对给定的测量数据，只要函数系 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{m}$ 选得合适，就可以从正规方程组(1-8)中解出 $a_0,a_1,\cdots,a_m$，于是就得到了最小二乘拟合函数 $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k(x)$。

三、一般的线性最小二乘拟合

上面讲的是一元函数的最小二乘法，其思想方法可以推广到多元函数。

设给定多元函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的一组测量数据

$$(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{ni},y_i) \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

和一组线性无关的函数系 $\{\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}_{k=0}^{l}$，求函数

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{j=0}^{l}a_j\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

对一组正权数 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$，使得目标函数

$$S=\sum_{i=1}^{m}\omega_i[y_i-\varphi(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{ni})]^2$$

达到最小。

同样，待定系数 $a_0,a_1,\cdots,a_l$ 也满足正规方程组

$$\sum_{j=0}^{l}(\varphi_j,\varphi_k)a_j=(\varphi_k,y),(k=0,1,\cdots,l) \tag{1-9}$$

其中

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\sum_{i=1}^{m}\omega_i\varphi_j(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{ni})\cdot\varphi_k(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{ni})$$

$$(\varphi_k,y)=\sum_{i=1}^{m}\omega_i\varphi_k(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{ni}).\ y_i$$

四、非线性最小二乘拟合

在作最小二乘拟合时，会遇到这样两类问题：

(1) 拟合函数 $\varphi(x)=\varphi(x,a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 的待定参数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 全部以线性形式出现，如多项式拟合函数

$$\varphi(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

这就是线性最小二乘拟合问题，求解也较为容易。

(2) 拟合函数 $\varphi(x)=\varphi(x,a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 的待定参数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 不能全部以线性形式出现，如指数拟合函数

$$\varphi(x)=a_0+a_1e^{-a_2x}$$

等，这便是非线性最小二乘拟合问题。具体方法叙述如下：

设给定函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的一组测量数据

$$(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{ni},y_i),(i=1,2,\cdots,m)$$

欲求一个含有非线性参数的函数

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n;a_0,a_1,\cdots,a_l)$$

对一组正权数 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$，使得目标函数

$$S(a_0,a_1,\cdots,a_l)=\sum_{i=1}^{m}\omega_i[y_i-\varphi(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{ni};a_0,a_1,\cdots,a_l)]^2$$

达到最小。

易见，非线性最小二乘拟合问题是一个非线性函数的极小化问题，可用非线性优化方法求解。然而，具体求解时要比线性情况复杂得多。对于不同的问题，可以采用一些特殊的技巧，现在已有很多有效的方法，如线性化方法、梯度法、最速下降法等，可参见文献[4]。

在作最小二乘拟合时，首先要选择合适的拟合函数类，可以通过对给定数据的分析来选择，也可以直接由实际问题给定，最常用的是多项式和样条函数，尤其是当不知道该选择什么样的拟合函数类时，通常可以考虑选择样条函数来拟合。

例 1-1 设测得函数 $y=f(x)$ 的数据如下：

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	1.78	2.24	2.74	3.74	4.45	5.31	6.92	8.85	10.97

试求 $f(x)$ 的近似表达式。

解 将测量数据画在图 1-1 上。由图可见，这很像指数函数的图形，不妨设 $y\approx ae^{bx}$，对给定数据 y_i 取对数，得到新数据如下：

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\log y_i$	0.250	0.350	0.438	0.573	0.648	0.725	0.840	0.947	1.040

画在图 1-2 上，像一条直线，因此可设 $\log y\approx a_0+a_1x$。

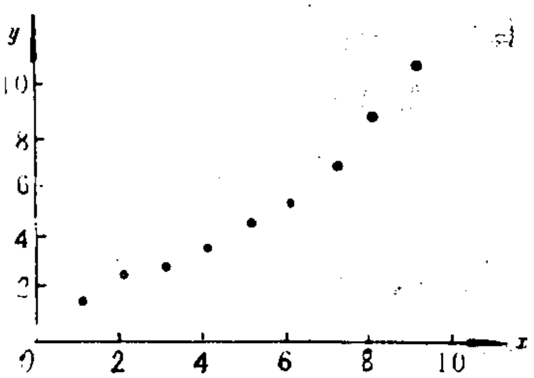


图 1-1

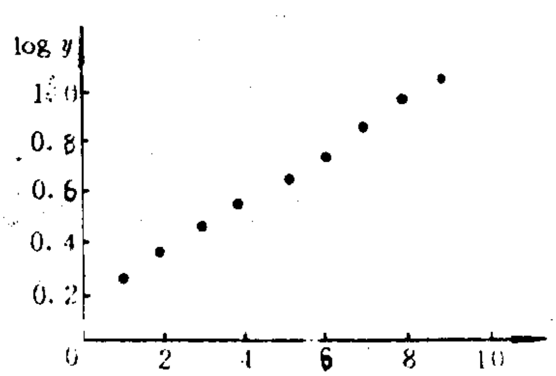


图 1-2

选取目标函数

$$S = \sum_{i=1}^{9} [a_0 + a_1 x_i - \log y_i]^2$$

相应的正规方程组为

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{9} (a_0 + a_1 x_i) = \sum_{i=1}^{9} \log y_i \\ \sum_{i=1}^{9} (a_0 + a_1 x_i) x_i = \sum_{i=1}^{9} x_i \log y_i \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 9a_0 + 45a_1 = 5.811 \\ 45a_0 + 285a_1 = 34.962 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a_0 = 0.153\ 42 \\ a_1 = 0.098\ 45 \end{cases}$$

故

$$\log y \approx 0.153\ 42 + 0.098\ 45x$$

从而 $f(x)$ 的近似表达式为

$$y \approx 1.424e^{0.226\ 7x}$$

第三节　k 次样条函数

样条(Spline)本来是绘图员用来画光滑曲线的一种细木条(或细金属条)。在画曲线时要求曲线过一些已知点，且使每段曲线的连接处过渡得很平滑，以后逐渐发展成为一个用途极其广泛的数学分支，现在数学上所说的样条(多项式样条)，实质上是分段多项式的光滑连接。

给定区间 $[a,b]$ 的一个分划

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

若函数 $S(x)$ 满足条件：

(1) 在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 上是 k 次多项式。

(2) $S(x)$ 及其直到 $k-1$ 阶导数在区间 $[a,b]$ 上连续。

则称 $S(x)$ 是关于分划 Δ 的一个 k 次多项式样条函数。$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 称为样条节点，$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 称为内节点，x_0, x_n 称为边界节点，这类样条函数的全体记作 $S_p(\Delta, k)$。

为了构造具体的 k 次多项式样条函数，先介绍几个重要概念。令

$$x_+^m = \begin{cases} x^m, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad (m = 0,1,2,\cdots)$$

称 x_+^m 为 m 次半截幂函数。特别当 $m=0$ 时，有

$$x_+^0 = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

称为单位跳跃函数。

给定区间 $[a,b]$ 的一个分划

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

可以证明[2]，函数系

$$1, (x - x_1)_+^0, \cdots, (x - x_{n-1})_+^0 \tag{1-10}$$

在区间 $[a,b]$ 上是线性无关的，因此构成 $[a,b]$ 上 n 维线性空间的基，称为单边基。函数系(1-10)的线性组合

$$S(x) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j (x - x_j)_+^0 \tag{1-11}$$

是一个阶梯函数，称为零次样条函数，$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 为其内节点，x_0，x_n 为其边界节点。

为了提高光滑度，对式(1-11)积分 k 次，得到一个新的函数，记作 $S_k(x)$，则

$$S_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\alpha_j x^j}{j!} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\beta_j (x - x_j)_+^k}{k!} \tag{1-12}$$

其中 $\{\alpha_j\}$，$\{\beta_j\}$ 是两组任意常数。