第2版

有限单元法基本原理和数值方法

王勖成 邵 敏 编著

清华大学出版社

等学校工程力学专业
教学指导委员会推荐教学用书

有限单元法基本原理和数值方法

（第2版）

王勖成　　邵　敏

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 提 要

本书的目的是使读者较好地掌握有限单元法的基本原理和数值方法，并能有效地利用和改进现有的、或发展新的单元、数值方法和计算程序。

本书为原 1988 年版的改写和再版，它反映了有限单元法的新进展以及作者从事本课程教学的新经验。全书分两篇。第一篇为基本部分，它包括作为有限单元法理论基础的加权余量法和变分原理，弹性力学问题有限单元法的一般原理和表达格式，单元和插值函数的构造，等参单元和数值积分，有限单元法应用中的若干实际考虑，线性方程组解法和有限单元法程序的结构和特点。第二篇为专题部分，它包括有限单元法的进一步理论基础——广义变分原理和杆件结构力学、平板弯曲、轴对称壳体、一般壳体、热传导、动力学、材料非线性、几何非线性等 8 个专门问题的有限单元法。第一篇和第二篇分别适合于本科生和研究生教学的基本要求。编写的重点是有限单元法的基本原理及表达格式的建立途径，单元插值函数和特性矩阵的构造及不同单元特性的比较，各种数值方法的原理、分析比较和计算执行。

本书可作为力学、机械、土木、水利等专业本科生和研究生的教材，也可作为上述专业工程技术人员和教师的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

有限单元法基本原理和数值方法/王勖成，邵敏编著. 2 版. —北京：清华大学出版社，1996
ISBN 7-302-02421-9

Ⅰ. 有…　Ⅱ. ①王…　②邵…　Ⅲ. ①有限元法-基础理论　②数据计算-计算方法　Ⅳ. O242.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 25238 号

出版者：清华大学出版社(北京清华大学校内，邮编 100084)
印刷者：北京市清华园胶印厂
发行者：新华书店总店北京科技发行所
开　本：787×1092 1/16　印张：36.25　字数：887 千字
版　次：1997 年 3 月第 1 版　1997 年 3 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-02421-9/O·177
印　数：0001～4000
定　价：29.80 元

第 2 版前言

改写《有限单元法基本原理和数值方法》(清华大学出版社,1988 年),出版它的第 2 版基于两方面的考虑:自该书 1985 年定稿以来,有限单元法的理论,特别是它的数值方法以及在工程实际中的应用有了很多新的进展;应用该书于本科生及研究生教学的实践中积累了新的经验、并认识到进一步改进的必要。和第 1 版相比较,第 2 版主要有如下变动:

1. 为体现循序渐进的原则,将全书分为两篇。第一篇为基本部分,第二篇为专题部分。和第 1 版不同的是,将原第 1 章的约束变分原理和弹性力学广义变分原理部分加以适当的扩充作为有限单元法的进一步理论基础放在第二篇的开始——第 8 章。原第 2 章杆件系统有限单元法有较大的改动,并考虑到它在理论和方法上和板、壳问题的有限单元法有紧密的联系,因此将杆件结构力学的有限单元法作为第一个专门问题放在第二篇的第 9 章。同时为使读者增强对有限元程序结构和特点的掌握,专门增写了一章(第 7 章有限单元法程序的结构和特点)并附有一典型的有限单元法程序介绍。作为教材、第一篇和第二篇分别适用于本科生和研究生教学的基本要求。高年级本科生也可根据需要选学第二篇的部分内容。

2. 为反映有限单元法的发展,本书的内容,特别是专题部分和第 1 版比较有相当多的变动。在板壳单元、动力学问题和非线性问题的数值方法等方面引进了国内外新的研究成果,同时对非必要的内容作了一定的删减。

3. 根据教学经验,为更好地使读者能加深对内容的理解和掌握,提高分析和解决问题的能力,对各章的习题作了一定的充实和调整。

需要说明的是,有关有限单元法的教材、专著和文章层出不穷,本书最后列出的是全书主要参考的教材和专著,各章末所列参考文献则是该章直接引用的文章。

本版的改写是在第 1 版基础上完成的,有关弹性力学问题有限单元法的一般原理和表达格式,线性方程组的解法,有限单元法程序的结构和特点部分主要由邵敏改写,其余部分主要由王勖成改写。本版的全稿由清华大学工程力学系杜庆华、岑章志两位教授进行了审阅,他们提出了许多宝贵的意见。另外,本书第 1 版出版以来,相当多的兄弟院校用于本科生或研究生的教学,同行专家对此次改写和再版给予了很多有益的建议和热情的鼓励。作者在此一并表示诚挚的谢意。

由于水平限制,本版仍然会有许多不足和不当之处,热切地希望读者和同行专家提出批评和指正。

作　者

1995 年 12 月

前　　言（第1版）

有限单元法发展至今天，已成为工程数值分析的有力工具。特别是在固体力学和结构分析的领域内，有限单元法取得了巨大的进展，利用它已成功地解决了一大批有重大意义的问题，很多通用程序和专用程序投入了实际应用。同时有限单元法又是仍在快速发展的一个学科领域，它的理论、特别是应用方面的文献经常而大量地出现在各种刊物和文集当中。

上述情况要求正在从事和即将参加现代化建设的工程技术人员，特别是担负着开发和研究任务的科学技术工作者，能够较好地掌握有限单元法的基本原理和数值方法，以便一方面能有效地利用现有的成果和计算程序，另一方面能具有改进现有方法和计算程序，并发展新的单元和数值方法以及计算程序的能力。

本书正是为了适应上述要求，为工科院校力学、机械、土水等专业本科高年级学生以及硕士研究生学习有限单元法课程提供一本教材。同时也可作为上述专业工程技术人员和教师工作和进修的参考读物。

本书编写的重点是：有限单元法表达格式的建立途径和方法；单元和插值函数的构造方法以及不同单元特性的分析比较；各种数值方法的原理、分析比较以及计算机执行。

内容的具体选择和安排反映了作者近十年来担任本课程教学的经验，注意了循序渐进、理论和实践的结合。本书共有十四章。

第一章综合阐述有限单元法的理论基础，即加权余量法和变分法，并着重讨论了弹性力学的各个变分原理及其相互关系。

第二、三章通过杆件系统和平面问题阐明利用直接刚度法和变分法建立有限单元法表达格式的途径。同时通过这二个问题的计算程序，具体阐述了计算程序的结构和基本技巧。

第四章专门讨论实际中有广泛应用的轴对称问题的有限元格式和应用，并讨论用部分离散的方法处理非轴对称载荷的原理和步骤。

第五章详细讨论了构造单元和插值函数的原则和方法，并着重讨论了在实际中有很广泛应用的等参单元的构造方法和表达格式。

第六章进一步讨论等参单元用于实际分析时的若干问题，例如数值积分阶数的选择，应力计算结果的改善，非协调元的利用等。

第七章专门讨论了大型、对称、稀疏、带状为系数矩阵特点的线性代数方程组的解法。这是有限单元法计算执行过程中的核心内容，对计算效率有很重要的影响。在本章中综合介绍了几种常用算法及其程序特点。

第八、九、十章讨论板壳问题的有限单元法。由于板壳结构有广泛的实际应用，同时基于经典板壳理论的单元要求具有 C_1 连续性，即在单元交界面上要求有连续的位移导数，因此板壳单元形式的研究较长时期以来是有限元研究工作的重点内容之一。在这几章中我们着重讨论了几种常用单元的原理、格式和特点。同时还讨论了板壳单元和实体单元的联结方法。

第十一至第十四章分别讨论了热传导问题、结构动力学问题、材料非线性问题以及一般非线性(即包括几何非线性)问题的有限单元法。这几类问题在实际工程技术中具有重要意义,有限单元法在这些领域内取得很大的进展。这几章比较详细地阐述了这几类问题的有限元格式的建立,具体讨论了各种有效的数值方法,并适当地介绍了进一步研究的问题。

这十四章内容大致可以分为两部分,前七章的基本内容可以作为本科生教材,后七章和前七章的部分较深入的内容可以作为研究生教材。

需要指出的是第一章的主要内容属于有限元的理论基础部分,未学习过其他有限元概论性课程的读者可以先学习第二、三章,掌握有限元的基本概念、一般步骤和特点以后,再学习第一章的主要内容,可能更有利于理解和消化。

作为教材,每一章后面附有习题和思考题,有的章还附有典型计算程序或子程序。

本书在编写过程中,曾得到清华大学杜庆华教授的热情支持,谢志成教授审阅了文稿,他们都对本书的编写提出了十分宝贵的意见。清华大学黄庆平博士曾帮助调试了若干子程序,岑章志副教授和杨锡芬讲师也为本书的编写作了有益的贡献。作者对他们表示衷心的感谢。

本书的第一、二、三、四、六、七、十一章主要由邵敏编写,其余各章主要由王勖成编写。由于水平限制,本书肯定存在许多不妥和需要改进之处,诚恳地希望读者提出批评和意见。

作　者

1987 年 8 月

目　录

第一篇　基本部分

第二篇　专题部分

第1章 预备知识

1.1 引 言

在科学技术领域内，对于许多力学问题和物理问题，人们已经得到了它们应遵循的基本方程(常微分方程或偏微分方程)和相应的定解条件。但能用解析方法求出精确解的只是少数方程性质比较简单，且几何形状相当规则的问题。对于大多数问题，由于方程的某些特征的非线性性质，或由于求解区域的几何形状比较复杂，则不能得到解析的答案。这类问题的解决通常有两种途径。一是引入简化假设，将方程和几何边界简化为能够处理的情况，从而得到问题在简化状态下的解答。但是这种方法只是在有限的情况下是可行的，因为过多的简化可能导致误差很大甚至错误的解答。因此人们多年来寻找和发展了另一种求解途径和方法——数值解法。特别是近三十多年来，随着电子计算机的飞速发展和广泛应用，数值分析方法已成为求解科学技术问题的主要工具。

已经发展的数值分析方法可以分为二大类。一类以有限差分法为代表。其特点是直接求解基本方程和相应定解条件的近似解。一个问题的有限差分法求解步骤是：首先将求解域划分为网格，然后在网格的结点上用差分方程近似微分方程。当采用较多的结点时，近似解的精度可以得到改进。借助于有限差分法，能够求解某些相当复杂的问题。特别是求解建立于空间坐标系的流体流动问题，有限差分法有自己的优势。因此在流体力学领域内，它至今仍占支配地位。但用于几何形状复杂的问题时，它的精度将降低，甚至发生困难。

另一类数值分析方法是首先建立和原问题基本方程及相应定解条件相等效的积分提法，然后据之建立近似解法。例如配点法、最小二乘法、Galerkin 法、力矩法等都属于这一类数值方法。如果原问题的方程具有某些特定的性质，则它的等效积分提法可以归结为某个泛函的变分。相应的近似解法实际上是求解泛函的驻值问题。里兹法就属于这一类近似方法。上述不同方法在不同的领域或类型的问题中得到成功的应用。但是也只能限于几何形状规则的问题。其基本原因是：它们都是在整个求解区域上假设近似函数。因此，对于几何形状复杂的问题，不可能建立合乎要求的近似函数。而有限单元法的出现，是数值分析方法研究领域内重大突破性的进展。

有限单元法的基本思想是将连续的求解区域离散为一组有限个、且按一定方式相互联结在一起的单元的组合体。由于单元能按不同的联结方式进行组合，且单元本身又可以有不同形状，因此可以模型化几何形状复杂的求解域。有限单元法作为数值分析方法的另一个重要特点是利用在每一个单元内假设的近似函数来分片地表示全求解域上待求的未知场函数。单元内的近似函数通常由未知场函数或及其导数在单元的各个结点的数值和其插值函数来表达。这样一来，一个问题的有限元分析中，未知场函数或及其导数在各个结点上的数值就成为新的未知量(也即自由度)，从而使一个连续的无限自由度问题变成

离散的有限自由度问题。一经求解出这些未知量,就可以通过插值函数计算出各个单元内场函数的近似值,从而得到整个求解域上的近似解。显然随着单元数目的增加,也即单元尺寸的缩小,或者随着单元自由度的增加及插值函数精度的提高,解的近似程度将不断改进。如果单元是满足收敛要求的,近似解最后将收敛于精确解。

从应用数学角度来看,有限单元法基本思想的提出,可以追溯到 Courant[1]在 1943 年的工作,他第一次尝试应用定义在三角形区域上的分片连续函数和最小位能原理相结合,来求解 St. Venant 扭转问题。一些应用数学家、物理学家和工程师由于各种原因都涉足过有限单元的概念。但只是到 1960 年以后,随着电子数值计算机的广泛应用和发展,有限单元法的发展速度才显著加快。

现代有限单元法第一个成功的尝试,是将刚架位移法推广应用于弹性力学平面问题,这是 Turner,Clough[2]等人在分析飞机结构时于 1956 年得到的成果。他们第一次给出了用三角形单元求得平面应力问题的正确解答。三角形单元的单元特性是由弹性理论方程来确定的,采用的是直接刚度法。他们的研究工作打开了利用电子计算机求解复杂平面弹性问题的新局面。1960 年 Clough[3]进一步处理了平面弹性问题,并第一次提出了"有限单元法"的名称,使人们开始认识了有限单元法的功效。

三十多年来,有限单元法的理论和应用都得到迅速的、持续不断的发展。

从确定单元特性和建立求解方程的理论基础和途径来说,正如上面所提到的,Turner、Clough 等人开始提出有限单元法时是利用直接刚度法。它来源于结构分析的刚度法,这对我们明确有限单元法的一些物理概念是很有帮助的,但是它只能处理一些比较简单的实际问题。1963—1964 年,Besseling[4],Melosh[5]和 Jones[6]等人证明了有限单元法是基于变分原理的里兹(Ritz)法的另一种形式,从而使里兹法分析的所有理论基础都适用于有限单元法,确认了有限单元法是处理连续介质问题的一种普遍方法。利用变分原理建立有限元方程和经典里兹法的主要区别是有限单元法假设的近似函数不是在全求解域而是在单元上规定的,而且事先不要求满足任何边界条件,因此它可以用来处理很复杂的连续介质问题。从 60 年代后期开始,进一步利用加权余量法来确定单元特性和建立有限元求解方程。有限单元法中所利用的主要是伽辽金(Galerkin)法。它可以用于已经知道问题的微分方程和边界条件、但是变分的泛函尚未找到或者根本不存在的情况,因而进一步扩大了有限单元法的应用领域。

三十多年来,有限单元法的应用已由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题,由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题和波动问题。分析的对象从弹性材料扩展到塑性、粘弹性、粘塑性和复合材料等,从固体力学扩展到流体力学、传热学等连续介质力学领域。在工程分析中的作用已从分析和校核扩展到优化设计并和计算机辅助设计技术相结合。可以预计,随着现代力学、计算数学和计算机技术等学科的发展,有限单元法作为一个具有巩固理论基础和广泛应用效力的数值分析工具,必将在国民经济建设和科学技术发展中发挥更大的作用,其自身亦将得到进一步的发展和完善。

本章将简要地介绍学习有限单元法必要的预备知识。在 2,3 节分别讨论作为有限单元法理论基础的微分方程等效积分形式和变分原理以及基于它们的近似方法,也即加权余量法和里兹法。最后在第 4 节扼要地引述作为今后主要分析对象的弹性力学问题的基

本方程和与之等效的变分原理。

1.2 微分方程的等效积分形式和加权余量法

基于微分方程等效积分提法的加权余量法是求解线性和非线性微分方程近似解的一种有效方法。有限单元法中可以应用加权余量法来建立有限元求解方程，但它本身又是一种独立的数值求解方法。在这一节中我们将阐明加权余量法的基本概念，求解步骤和不同形式加权余量法的特点。

1.2.1 微分方程的等效积分形式

工程或物理学中的许多问题，通常是以未知场函数应满足的微分方程和边界条件的形式提出来的，可以一般地表示为未知函数 $\boldsymbol{u}$ 应满足微分方程组

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{u}) = \begin{Bmatrix} \mathrm{A}_1(\boldsymbol{u}) \\ \mathrm{A}_2(\boldsymbol{u}) \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \tag{1.2.1}$$

域 Ω 可以是体积域、面积域等，如图 1.1 所示。同时未知函数 $\boldsymbol{u}$ 还应满足边界条件

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{u}) = \begin{Bmatrix} \mathrm{B}_1(\boldsymbol{u}) \\ \mathrm{B}_2(\boldsymbol{u}) \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (\text{在 } \Gamma \text{ 上}) \tag{1.2.2}$$

Γ 是域 Ω 的边界。

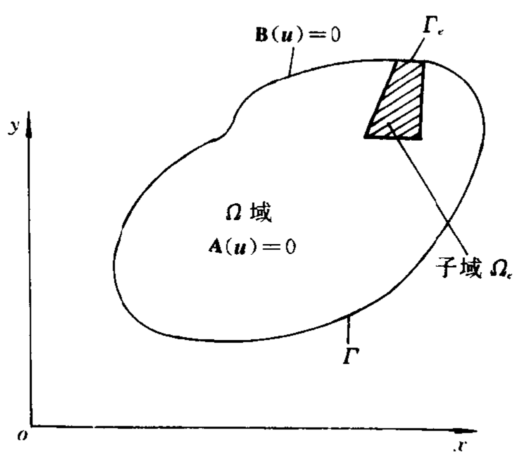

图 1.1 域 Ω 和边界 Γ

要求解的未知函数 $\boldsymbol{u}$ 可以是标量场（例如温度），也可以是几个变量组成的向量场（例如位移、应变、应力等）。$\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ 是表示对于独立变量（例如空间坐标、时间坐标等）的微分算子。微分方程数应和未知场函数的数目相对应，因此，上述微分方程可以是单个的方程，也可以是一组方程。所以在式(1.2.1)和(1.2.2)中采用了矩阵形式。

下面我们给出一个典型的微分方程,以后我们还要寻求它的解答。

例 1 二维稳态热传导方程

$$A(\phi)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+Q=0 \qquad (\text{在 }\Omega\text{ 内}) \tag{1.2.3}$$

$$B(\phi)=\begin{cases}\phi-\bar{\phi}=0 & (\text{在 }\Gamma_\phi\text{ 上})\\ k\dfrac{\partial \phi}{\partial n}-\bar{q}=0 & (\text{在 }\Gamma_q\text{ 上})\end{cases} \tag{1.2.4}$$

这里 ϕ 表示温度;k 是热传导系数;$\bar{\phi}$ 和 $\bar{q}$ 是边界上温度和热流的给定值;n 是有关边界 Γ 的外法线方向;Q 是热源密度。

在上述问题中,若 k 和 Q 只是空间位置的函数时,问题是线性的。若 k 和 Q 亦是 ϕ 及其导数的函数时,问题就是非线性的了。

由于微分方程组(1.2.1)在域 Ω 中每一点都必须为零,因此就有

$$\int_\Omega \boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\Omega \equiv \int_\Omega (v_1 A_1(\boldsymbol{u})+v_2 A_2(\boldsymbol{u})+\cdots)\mathrm{d}\Omega \equiv 0 \tag{1.2.5}$$

其中

$$\boldsymbol{V}=\begin{Bmatrix} v_1\\ v_2\\ \vdots \end{Bmatrix} \tag{1.2.6}$$

$\boldsymbol{V}$ 是函数向量,它是一组和微分方程个数相等的任意函数。

式(1.2.5)是与微分方程组(1.2.1)完全等效的积分形式。我们可以断言,若积分方程(1.2.5)对于任意的 $\boldsymbol{V}$ 都能成立,则微分方程(1.2.1)必然在域内任一点都得到满足。这个结论的证明是显然的,假如微分方程 $A(\boldsymbol{u})$ 在域内某些点或一部分子域中不满足,即出现 $A(\boldsymbol{u})\neq 0$,马上可以找到适当的函数 $\boldsymbol{V}$ 使(1.2.5)的积分形式亦不等于零。上述结论则得到证明。

同理,假如边界条件(1.2.2)亦同时在边界上每一点都得到满足,对于一组任意函数 $\bar{\boldsymbol{V}}$ 应当成立

$$\int_\Gamma \bar{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\Gamma \equiv \int_\Gamma (\bar{v}_1 B_1(\boldsymbol{u})+\bar{v}_2 B_2(\boldsymbol{u})+\cdots)\mathrm{d}\Gamma \tag{1.2.7}$$

因此,积分形式

$$\int_\Omega \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\Omega+\int_\Gamma \bar{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{1.2.8}$$

对于所有的 $\boldsymbol{V}$ 和 $\bar{\boldsymbol{V}}$ 都成立是等效于满足微分方程(1.2.1)和边界条件(1.2.2)。我们把(1.2.8)式称为微分方程的等效积分形式。

在上述讨论中,隐含地假定(1.2.8)式的积分是能够进行计算的。这就对函数 $\boldsymbol{V}$、$\bar{\boldsymbol{V}}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 能够选取的函数族提出了一定的要求和限制,以避免积分中任何项出现无穷大的情况。

在(1.2.8)式中,$\boldsymbol{V}$ 和 $\bar{\boldsymbol{V}}$ 只是以函数自身的形式出现在积分中,因此对 $\boldsymbol{V}$ 及 $\bar{\boldsymbol{V}}$ 的选择只需是单值的分别在 Ω 内和 Γ 上可积的函数就可以。这种限制并不影响上述“微分方程的等效积分形式”提法的有效性。$\boldsymbol{u}$ 在积分中还将以导数或偏导数的形式出现,它的选择将取决于微分算子 $\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{B}$ 中微分运算的最高阶次。例如有一个连续函数,它在 x 方向有一个斜率不连续点如图 1.2 所示。我们设想在一个很小的区间 Δ 中用一个连续变化来代替这个不连续。可以很容易地看出,在不连续点附近,函数的一阶导数是不定的,但是一阶

导数是可积的，即一阶导数的积分是存在的。而在不连续点附近，函数的二阶导数趋于无穷，使积分不能进行。如果在微分算子 **A** 中仅出现函数的一阶导数（边界条件的算子 **B** 中导数的最高阶数总是低于微分方程的算子 **A** 中导数的最高阶数），上述函数对于 $\boldsymbol{u}$ 将是一个合适的选择。一个函数 在域内其本身连续，它的一阶导数具有有限个不连续点但在域内可积，这样的函数我们称之为具有 C_0 连续性的函数。可以类似地看到，如果在微分算子 **A** 出现的最高阶导数是 n 阶，则要求函数 $\boldsymbol{u}$ 必须具有连续的 $n-1$ 阶导数，即函数应具有 C_{n-1} 连续性。**一个函数在域内函数本身（即它的零阶导数）直至它的 $n-1$ 阶导数连续，它的第 n 阶导数具有有限个不连续点但在域内可积，这样的函数我们称之为具有 C_{n-1} 连续性的函数**。具有 C_{n-1} 连续性的函数将使包含函数直至它的 n 阶导数的积分成为可积。

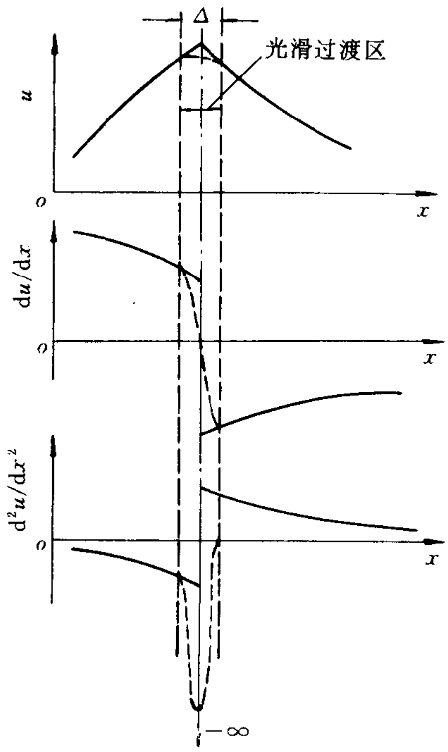

图 1.2　具有 C_0 连续性的函数

1.2.2　等效积分的“弱”形式

在很多情况下可以对(1.2.8)式进行分部积分得到另一种形式

$$\int_{\Omega}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{v})\mathbf{D}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{v}})\mathbf{F}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{1.2.9}$$

其中 **C**，**D**，**E**，**F** 是微分算子，它们中所包含的导数的阶数较(1.2.8)式的 **A** 低，这样对函数 $\boldsymbol{u}$ 只需要求较低阶的连续性就可以了。在(1.2.9)式中降低 $\boldsymbol{u}$ 的连续性要求是以提高 $\boldsymbol{v}$ 及 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 的连续性要求为代价的，由于原来对 $\boldsymbol{v}$ 及 $\bar{\boldsymbol{v}}$（在(1.2.8)式中）并无连续性要求，但是适当提高对其连续性的要求并不困难，因为它们是可以选择的已知函数。这种降低对函数 $\boldsymbol{u}$ 连续性要求的作法在近似计算中，尤其是在有限单元法中是十分重要的。(1.2.9)式称为微分方程(1.2.1)和边界条件(1.2.2)的等效积分“弱”形式。值得指出的是，从形式上看“弱”形式对函数 $\boldsymbol{u}$ 的连续性要求降低了，但对实际的物理问题却常常较原始的微分方程更逼近真正解，因为原始微分方程往往对解提出了过分“平滑”的要求。

下面我们仍以前面已提出的例题中的二维热传导方程为例，写出它们的等效积分形式和等效积分“弱”形式。例 1 中由二维稳态热传导方程(1.2.3)和边界条件(1.2.4)式，我们可以写出相当于(1.2.8)式的等效积分形式

$$\int_{\Omega}v\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+Q\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\Gamma_q}\bar{v}\left[k\frac{\partial\phi}{\partial n}-\bar{q}\right]\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{1.2.10}$$

其中 v 和 $\bar{v}$ 是任意的标量函数，并假设 Γ_ϕ 上的边界条件

$$\phi - \bar{\phi} = 0$$

在选择函数 ϕ 时已自动满足，这种边界条件称为强制边界条件。

对(1.2.10)式进行分部积分可以得到相当于(1.2.9)式的等效积分“弱”形式。利用格林公式对(1.2.10)式中第一个积分的前二项进行分部积分

$$\left.\begin{aligned}\int_\Omega v\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_\Gamma v\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)n_x\mathrm{d}\Gamma \\ \int_\Omega v\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial y}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_\Gamma v\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)n_y\mathrm{d}\Gamma\end{aligned}\right\} \tag{1.2.11}$$

于是(1.2.10)式成为

$$-\int_\Omega\left(\frac{\partial v}{\partial x}k\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}k\frac{\partial \phi}{\partial y} - vQ\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_\Gamma vk\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y}n_y\right)\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_q}\bar{v}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial n} - \bar{q}\right)\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{1.2.12}$$

式中 n_x, n_y 为边界外法线的方向余弦。在边界上场函数 ϕ 的法向导数是

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x}n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y}n_y \tag{1.2.13}$$

并且对于任意函数 v 和 $\bar{v}$，可以不失一般性地假定

$$v = -\bar{v} \tag{1.2.14}$$

这样，(1.2.10)式可以表示为

$$\int_\Omega \nabla^{\mathrm{T}}vk\,\nabla\phi\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega vQ\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_q}v\bar{q}\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_\phi}vk\frac{\partial \phi}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{1.2.15}$$

其中算子 ∇ 是

$$\nabla = \begin{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial y}\end{Bmatrix}$$

(1.2.15)式就是二维稳态热传导问题与微分方程(1.2.3)和边界条件(1.2.4)相等效的积分“弱”形式。在式中 k 以其自身出现，而场函数 ϕ(温度)则以一阶导数的形式出现，因此它允许在域内热传导系数 k 以及温度 ϕ 的一阶导数出现不连续，而这种实际可能性在微分方程中是不允许的。

对(1.2.15)式，还应指出的是

(1) 场变量 ϕ 不出现在沿 Γ_q 的边界积分中。Γ_q 边界上的边界条件

$$\mathrm{B}(\phi) = k\frac{\partial \phi}{\partial n} - \bar{q} = 0$$

在 Γ_q 的边界上自动得到满足。这种边界条件称为自然边界条件。

(2) 若在选择场函数 ϕ 时，已满足强制边界条件，即在 Γ_ϕ 边界上满足 $\phi - \bar{\phi} = 0$，则可以通过适当选择 v，使在 Γ_ϕ 边界上 $v=0$ 而略去(1.2.15)式中沿 Γ_ϕ 边界积分项，使相应的积分“弱”形式取得更简洁的表达式。

1.2.3 基于等效积分形式的近似方法:加权余量法 (Weighted Residual Method, WRM)

在求解域 Ω 中,若场函数 $\boldsymbol{u}$ 是精确解,则在域 Ω 中任一点都满足微分方程(1.2.1)式,同时在边界 Γ 上任一点都满足边界条件(1.2.2)式,此时等效积分形式(1.2.8)式或(1.2.9)式必然严格地得到满足。但是对于复杂的实际问题,这样的精确解往往是很难找到的,因此人们需要设法找到具有一定精度的近似解。

对于微分方程(1.2.1)式和边界条件(1.2.2)式所表达的物理问题,未知场函数 $\boldsymbol{u}$ 可以采用近似函数来表示。近似函数是一族带有待定参数的已知函数,一般形式是

$$\boldsymbol{u} \approx \bar{\boldsymbol{u}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{N}_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{N}\boldsymbol{a} \tag{1.2.16}$$

其中 $\boldsymbol{a}_i$ 是待定参数;$\boldsymbol{N}_i$ 是称之为试探函数(或基函数、形函数)的已知函数,它取自完全的函数序列,是线性独立的。所谓完全的函数系列是指任一函数都可以用此序列表示。近似解通常选择使之满足强制边界条件和连续性的要求。例如当未知函数 $\boldsymbol{u}$ 是位移时,可取近似解

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + \cdots + N_n u_n = \sum_{i=1}^{n} N_i u_i$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + \cdots + N_n v_n = \sum_{i=1}^{n} N_i v_i$$

$$w = N_1 w_1 + N_2 w_2 + \cdots + N_n w_n = \sum_{i=1}^{n} N_i w_i$$

则有

$$\boldsymbol{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}$$ 其中 u_i, v_i, w_i 是待定参数,共 $3 \times n$ 个。

$\boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{I} N_i$ 是函数矩阵。$\boldsymbol{I}$ 是 3×3 单位矩阵。N_i 是坐标的独立函数,有限单元法中如何选取将在以后的章节中讨论。

显然,在通常 n 取有限项数的情况下近似解是不能精确满足微分方程(1.2.1)和全部边界条件(1.2.2)式的,它们将产生残差 $\boldsymbol{R}$ 及 $\bar{\boldsymbol{R}}$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{R}\mathbf{B}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}) = \bar{\boldsymbol{R}} \tag{1.2.17}$$

残差 $\boldsymbol{R}$ 及 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 亦称为余量。在(1.2.8)式中我们用 n 个规定的函数来代替任意函数 $\boldsymbol{v}$ 及 $\bar{\boldsymbol{v}}$,即

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{W}_j; \qquad \bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{W}}_j \qquad (j = 1—n) \tag{1.2.18}$$

就可以得到近似的等效积分形式

$$\int_\Omega \boldsymbol{W}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{A}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}) \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \bar{\boldsymbol{W}}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{B}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}) \mathrm{d}\Gamma = 0 \quad (j = 1—n) \tag{1.2.19}$$

亦可以写成余量的形式

$$\int_\Omega \boldsymbol{W}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \bar{\boldsymbol{W}}_j^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{R}} \mathrm{d}\Gamma = 0 \quad (j = 1—n) \tag{1.2.20}$$