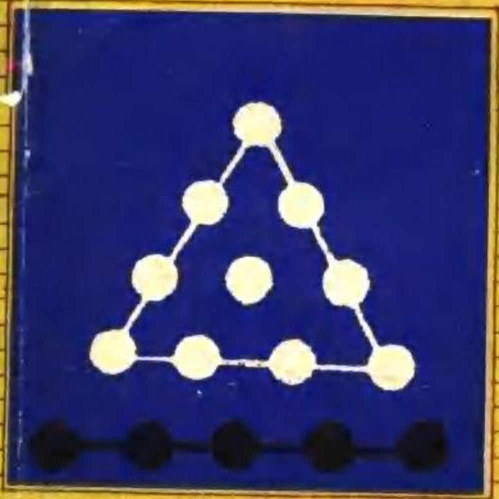
ZIRANSHUZHONG
DEMINGZHU



自然数中的明珠

天津科学技术出版社

自然数中的明珠

俞晓群　编著

天津科学技术出版社

责任编辑：黄立民

自然数中的明珠

俞晓群　编著

天津科学技术出版社出版
天津市赤峰道130号
天津市马家店印刷厂印刷
新华书店天津发行所发行

开本787×1092毫米　1/32　印张5.125　字数108 000
1989年11月第1版
1989年11月第1次印刷
印刷：1— [illegible] 000
ISBN　7-5308-0453-7/O·26　定价：2.10元

目　录

前　言

数学是自然科学的皇后，而数论是数学的皇后。

——高　斯

人们从幼儿时起，就开始认识自然数了。但是，您可曾知道：在这些“数”的字里行间，还蕴藏着一个无比瑰丽的世界……

记得有一位数学大师把数论中的问题比作一颗颗璀璨的明珠。当我们漫步在无垠的数学原野时，这些“明珠”便闪烁着奇异的光彩，仿佛向我们轻轻地呼唤着：来吧，朋友，这里遍布着无限的珍宝！出于欣喜和宠爱之情，笔者从这些五彩缤纷的明珠之中，信手择来八颗：完全数、亲和数、梅森数、……奉献给广大中学生和青年朋友，让我们共同分享这甘美的“人类智慧之果”！

本书详尽地介绍了数论中八种最重要的数字，全面地回顾了它们的产生、性质和发展史。从中可以概括地了解到数论的全貌，以及数论研究的思想方法。在从古至今的大量追述中，笔者力求史料翔实准确，侧重于发掘历代大数学家的思想过程。这对引导和激励青年一代步入艰深的数学领域，将会产生较好的效果。另外，本书是用历史叙述的形式写成的，它不是一部严格的数论教程，而是一个数学趣味性与知

识性高度相结合的读物。有鉴于此，书中关于数学性质的叙述是比较简略的，却注重于用大量的思想过程来引发人们的数学灵感。凡是具有初中以上文化程度的读者均可读懂。

在编写过程中，笔者曾得到南开大学数学研究所胡久稔先生的多次指教；尤其是得到了天津商学院吴振奎同志的鼎力协助和教诲，在此一并致谢！

俞晓群

1987年3月于沈阳

第一章　完　全　数

数学的使命就是在混沌之中去发现秩序。

——维　纳

§1.1　有趣的历史

完全数是自然数中最古老、最诱人的一类数字。它的定义是：一个数若等于它的全部因数之和（不包括自身），就叫做完全数。例如数字6的全部因数是1、2和3，它们的和恰好等于6，所以6是一个完全数。数字28的全部因数是1、2、4、7和14，它们的和恰好等于28，因此28是第二个完全数。

1．早期工作

人类对完全数的认识非常久远，古往今来，历代数学家都对它有着特殊的偏爱，因此，几乎每一个数字的产生都留下许多生动有趣的记载。现在，让我们从远古时代出发，浏览一下完全数的历史。

最早知道6和28的特性的是古印度人和希伯来人。但是，对于完全数比较深刻的认识是在古希腊时期。公元前约600年间，数字研究的先师毕达哥拉斯首先表述了他对完全数的酷爱，他说："6，象征着完满的婚姻以及健康和美丽，因为它的部分是完整的，并且其和等于自身"。公元前300年，欧几里得在他的巨著《几何原本》第九章中给出了一个关于完

全数的出色的定理。他写道：

命题6 若几何级数（从1开始）的一些项之和$1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}$是素数，那么这个和同最末一项的乘积是一个完全数，即$(1+2+\cdots\cdots+2^{n-1})2^{n-1}$或$(2^n-1)2^{n-1}$是一个完全数。

验证一下：当$n=2$时，$2^2-1=3$是素数，而$(2^2-1)2^{2-1}=6$，果然得到了第一个完全数。欧几里得的工作开辟了完全数研究的先河。在古希腊文明泯灭之后，新的“数学王国”诞生在亚历山大城。公元100年，一位来自犹太给拉撒的阿拉伯人尼可马修斯写出一部卓越的数学著作《算术入门》。历史学家曾评价说：在数学领域中，这本书在算术方面的作用可以与欧几里得的《几何原本》媲美。书中尼可马修斯复述了欧几里得关于完全数的论述，并且将自然数划分为盈数、亏数和完全数三类，即一个自然数的全部因数（不包括自身）之和，若大于自身，就叫做盈数；若小于自身，就叫做亏数；若等于自身，就是完全数。例如，12的全部因数1、2、3、4和6之和等于16，大于12，所以12是盈数。8的全部因数1、2和4之和等于7，小于8，所以8是一个亏数。尼可马修斯正确地给出了四个完全数：

6，28，496，8128，

其中后两个是首次发现的。他深为完全数优美的性质所感染，在书中写道：“奇迹发生了。正如世间缺少完美的事物，而丑陋的东西却比比皆是一样，自然数中遍布着杂乱无章的盈数和亏数；完全数却以它特有的性质熠熠发光，珍奇而稀少。”

几位数学大师的工作，以及他们对完全数的评估吸引了

众多的后来者。但是，自然数浩如烟海，完全数又如沧海一粟，在这渺渺茫茫的数海中，寻找千古珍稀的“数字珍珠”，谈何容易！在尼可马修斯之后，人们又经历了一千多年的探索，其间有著名数学家奥古斯丁、泰比特、伊本克拉、斐波那契等人的工作。结果，“上穷碧落下黄泉，两处茫茫皆不见”。时至1456年，正当人们迷惘之际，新的奇迹发生了。人们偶然发现，在一位无名氏的手稿中，竟神秘地给出了第五个完全数：33550336。这是一个具有八位数字的大数，它验证的艰巨性是可想而知的。但是，这位无名氏使用了什么方法？他为什么不愿披露自己的姓名？这些都使人们迷惑不解。

2．梅森猜测

15世纪以来，由于大运算量的障碍，使许多著名学者在完全数的研究中屡受挫折。例如，16世纪意大利学者塔塔利亚错误地认为：当$n=2$和$n=3$至39的奇数时，$2^{n-1}(2^n-1)$是完全数。更有甚者是17世纪的庞格斯，他被人们称为“神数术”的大师。在他的一本近700页的著作《数的玄学》中，他一举列出了28个所谓“完全数”，其中除塔塔利亚给出的20个数字之外，他又补充了八个，最大的具有28位数字。但是，塔塔利亚和庞格斯都没有给出证明或解法，因此令人疑惑。

1603年，数学家克特迪历尽艰辛，最终严格地证明了：$2^{12}(2^{13}-1)=33550336$确是第五个完全数。并且正确地给出了第六和第七个完全数：$2^{16}(2^{17}-1)$和$2^{18}(2^{19}-1)$。但是，克特迪还错误地认为$2^{22}(2^{23}-1)$、$2^{28}(2^{29}-1)$和$2^{36}(2^{37}-1)$也是完全数，后来分别得到大数学家费尔

马和欧拉的指正。

可以说，在17世纪，完全数的研究出现了一个小高潮，而这个高潮的总结工作是由马林·梅森完成的。他在1644年指出：庞格斯给出的28个“完全数”中，只有8个是正确的，即当$n=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31$时，$2^{n-1}(2^n-1)$是完全数，它们分别位于庞格斯数表的第1、2、3、4、8、10、12和19位上（按数的位数排列）。梅森还认为：第九、第十和第十一个完全数是$2^{66}(2^{67}-1)$、$2^{126}(2^{127}-1)$和$2^{256}(2^{257}-1)$，并且，当$n\leqslant 257$时，只有这11个完全数。梅森知识广博、深为数学家们崇敬。他的上述论断竟统治了完全数研究近300年。不过有一点他同庞格斯一样，就是也没有给出他的证明或解法，他的工作只能算做一个“数学猜测”。

参与验证“梅森猜测”的有许多数学名流。例如，哥德巴赫认为梅森是对的；莱布尼兹曾错误地判断：只要n是素数，$2^{n-1}(2^n-1)$就是完全数。这些大数学家们也许是太轻视这些小数字了，结果屡屡出错。

3．欧拉定理

1730年，数学四伟人之一的欧拉思考了完全数的特性，果然出手不凡，给出一个出色的定理：

若P是一个偶完全数，则$P=2^{n-1}(2^n-1)$，其中n是某素数，2^n-1也是素数（证明见§1.2）。

这是欧几里得定理的逆定理。欧拉当时年仅23岁，正值风华之年，显示了他卓越的数学才能。但是，这一定理的证明一直没有发表，是人们在他的遗稿中发现的。欧拉也研究了梅森猜测，他指出：“我冒险断言：每一个小于50的素

数，甚至小于100的素数，使$2^{n-1}(2^n-1)$是完全数的仅有n取1，2，3，5，7，13，17，19，31，41，47。我从一个优美的定理出发得到了这些结果，我自信它们具有真实性。"可是，时过不久，欧拉本人及文森姆、蒲拉那分别证明了$n=41$和47时，不能得到完全数。看来，伟人的认识也有一个修正的过程。1772年，欧拉在致贝努利的一封信中说：他已严格地证实了$2^{30}\cdot(2^{31}-1)$是第8个完全数。他的方法是检验直至46339的素数，看$2^{31}-1$是否具有形如$248n+1$和$248n+63$的因数（详见本书§3.2）。此时，欧拉已双目失明。

欧拉的工作，使完全数的研究发生了深刻的变化。但是，人们仍然不能彻底解释梅森猜测，他的根据是什么？18世纪的数学家文森姆认为："梅森的基础或许是建立在他伟大的天赋之上，或许他认识到了更多的真理。"

19世纪，人们对梅森的信任开始动摇了。首先，鲁卡斯创立了一种检验素数的新方法，并于1876年证明：$2^{66}(2^{67}-1)$不是完全数（首次发现了梅森的错误）。接着，鲁卡斯又证明：$2^{126}(2^{127}-1)$确是一个完全数。1883～1887年间，波佛辛等人证明了$2^{60}(2^{61}-1)$是一个完全数。1911～1914年，鲍尔等人证明了$2^{88}(2^{89}-1)$和$2^{106}\cdot(2^{107}-1)$也是完全数。最后，克劳契克与莱赫默分别在1922年与1931年证明了$2^{256}(2^{257}-1)$不是完全数。上述工作说明：梅森关于"$2^{66}(2^{67}-1)$、$2^{126}(2^{127}-1)$和$2^{256}(2^{257}-1)$是完全数"的猜测只有一个是对的；并且，在$n\leqslant 257$的范围内，他丢掉了$n=61$，89，107时所产生的完全数。

至此，人们对完全数的研究告一段落。它说明，在电子计算机产生之前，繁重的运算量严重地限制了人们的认识进

程，即使在小小的完全数面前，也会让那些最优秀的数学家无计可施。这段关于完全数研究的历史也反映了数论的特点，正如数学家丹齐克所说："数论是数学中所有部门里最最难的一门。不错，它的问题陈述出来，实在简单得连三尺孩童也能明白所讨论的是什么。但是，它所使用的方法却是那样的独特，必须有非凡的技巧和极大的敏才，才能找到恰当的入门之处."

4. "上帝"引来的题外话

有趣的是完全数还受到一些"局外人"的厚爱，从而引出许多稀奇古怪的趣闻轶事。例如，远在中世纪，《圣经》的注释者就认为：完全数与上帝密不可分。他们引用《圣经》开篇"创世纪"中记载：上帝造物之始，第一天传播光明，第二天创造空气，第三天聚水成海，第四天日月经天，第五天游鱼飞雀，第六天塑造人类与走兽。这时，上帝完成了创造世界，开始了第七天的休息。并通过神学家之口说："正是由于上帝造物用了6天，所以6才成了完全数。"《圣经》的注释者说：上帝创造的月亮周而复始一轮是28天，而28恰是第二个完全数。他们甚至把世界的混乱归咎于诺亚（《圣经》中的人物），说什么在洪水淹没世界之后，上帝第二次创造世界时，诺亚方舟上救得的是八个人，而不是六个人，所以世界不完美了。这些对于完全数的评注自然是十分荒唐的。中世纪著名学者奥古斯丁曾风趣地说："6是自身完美的，这并非鬼使神差。"至于第二个完全数28与月行周期的关系，就更有些牵强。因为事实上月球绕地球运行一周只用了27.3天（即使按阴历算，一个月为29.5天）。

神学家们的荒诞注释反映了西方人对于完全数的崇拜。

例如，19世纪的意大利人还把数字6比作维纳斯，喻为美的象征。但是，这种"崇拜"也引来了一些哗众取宠的人。他们不顾数学的真实性，在那里信口开河，危言耸听。1936年3月27日，一则奇闻出笼了。世界著名的大通讯社——美联社就发布了一则题为《一个"新的完全数"》的消息：

一个具有155位数字的完全数被发现，一位博士用了5年的时间证明了欧几里得时代的问题

〔芝加哥3月26日美联社电〕 今天，克依格博士放下了他手中的笔和纸，并宣称：他已经证明了一个自欧几里得时代起，挫败了所有数学家的问题——找到了一个大于19位数字的完全数。

他说，一个完全数是等于它的因数之和的数。例如，28的和是1，2，4，7和14的和，所有这些数都可以整除28。克依格博士的完全数包含155位数字，即26815615859885194199148049996411692254957831641184786755447122887443528060146978161514511280138383284395055028465118831722842125059853682308859384882528256。

它的表达式为$2^{256}(2^{257}-1)$。博士说，在过去的5年中，他每天工作达17个小时，才证明了它是一个完全数。

这是一则错误百出的电文。首先，克依格的证明是错误的，$2^{256}(2^{257}-1)$不是完全数(莱赫默等人已经证实了这一点)。其次，数学家们已经找到了多个大于19位数字的完全数。这些常识性的错误几乎不值得真正的数学工作者们一驳。

5. 完全数一览表

1946年，人类第一台电子计算机的产生，为寻找完全数带来盎然生机。但是，到1985年止，人们仅找到30个完全数，并且它们已经逐步失去昔日人们的宠爱，成为检验计算机功能或寻找"最大素数"的副产品。下面是已知的全部30个完全数，供读者欣赏。

表1·1　　完全数表

序号	n	完全数 $2^{n-1}(2^n-1)$	位　数
1	2	$2(2^2-1)$	1
2	3	$2^2(2^3-1)$	2
3	5	$2^4(2^5-1)$	3
4	7	$2^6(2^7-1)$	4
5	13	$2^{12}(2^{13}-1)$	8
6	17	$2^{15}(2^{17}-1)$	10
7	19	$2^{19}(2^{19}-1)$	12
8	31	$2^{31-1}(2^{31}-1)$	19
9	61	$2^{61-1}(2^{61}-1)$	37
10	89	$2^{89-1}(2^{89}-1)$	54
11	107	$2^{107-1}(2^{107}-1)$	65
12	127	$2^{127-1}(2^{127}-1)$	77
13	521	$2^{521-1}(2^{521}-1)$	314
14	607	$2^{607-1}(2^{607}-1)$	366
15	1279	$2^{1279-1}(2^{1279}-1)$	770
16	2203	$2^{2203-1}(2^{2203}-1)$	1327
17	2281	$2^{2281-1}(2^{2281}-1)$	1373
18	3217	$2^{3217-1}(2^{3217}-1)$	1937
19	4253	$2^{4253-1}(2^{4253}-1)$	2561
20	4423	$2^{4423-1}(2^{4423}-1)$	2663
21	9689	$2^{9689-1}(2^{9689}-1)$	5834

续

22	9941	$2^{9941-1}(2^{9941}-1)$	5985
23	11213	$2^{11213-1}(2^{11213}-1)$	6751
24	19937	$2^{19937-1}(2^{19937}-1)$	12005
25	21701	$2^{21701-1}(2^{21701}-1)$	13066
26	23209	$2^{23209-1}(2^{23209}-1)$	13973
27	44497	$2^{44497-1}(2^{44497}-1)$	26789
28	86243	$2^{86243-1}(2^{86243}-1)$	51923
29	132049	$2^{132049-1}(2^{132049}-1)$	79501
30	216091	$2^{216091-1}(2^{216091}-1)$	130099

§1.2 特性种种

几千年来尽管神学家们给完全数蒙上了神秘的宗教色彩，完全数还是以它的数学性质放出奇异的光彩，在数学领域中吸引着后人。现在，让我们深入了解一下它的内容吧！

1．两个定理

上一节我们曾提到欧几里得和欧拉的工作。现在我们介绍一下他们完美的数学证明。为了叙述方便，我们先给出一些数论中常用符号的定义和二个性质。

定义 设m、n是自然数，则（1）$m\mid n$表示m整除n；$m\nmid n$表示m不能整除n。（2）$(m, n)=1$表示m和n互素，即m和n的公因数只有1。（3）$\sigma(n)$表示n的全部因数之和。例如，$\sigma(6)=1+2+3+6=12$。

性质1 n是完全数的充要条件是$\sigma(n)=2n$。这一引理

可由完全数的定义立即推出。

性质2　若$(m, n)=1$，则$\sigma(mn)=\sigma(m)\cdot\sigma(n)$。

证明　首先，对于任一自然数$m(\neq 1)$，推出$\sigma(m)$的一个表达式。设m的素因数分解是$m=p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}$，则对于任一$d\mid m$，有$d=p_1^{b_1}\cdots p_k^{b_k}$，其中$0\leqslant b_i\leqslant a_i(i=1,\cdots,k)$。显然，它们恰好是乘积$(1+p_1+\cdots+p_1^{a_1})(1+p_2+\cdots+p_2^{a_2})\cdots(1+p_k+\cdots+p_k^{a_k})$的展开式中的各项，所以这个展式就等于$\sigma(m)$。而式中的每一个括号内都是一个几何数列，所以$\sigma(m)=\dfrac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1}\cdots\dfrac{p_k^{a_k+1}-1}{p_k-1}$。

现在，设m和n的素因数分解是$m=p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}$，$n=q_1^{b_1}\cdots q_t^{b_t}$，因为$(m, n)=1$，所以$p_i\neq q_j(i=1, 2, \cdots k; j=1, 2, \cdots, t)$。因此，$m\cdot n=p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}\cdot q_1^{b_1}\cdots q_t^{b_t}$。根据前面的推导有$\sigma(m\cdot n)=\dfrac{p_1^{a_1}-1}{p_1-1}\cdots\dfrac{p_k^{a_k}-1}{p_k-1}\cdot\dfrac{q_1^{b_1}-1}{q_1-1}\cdots\dfrac{q_t^{b_t}-1}{q_t-1}$。它显然等于$\sigma(m)\cdot\sigma(n)$。

注　具有这种性质的函数叫做积性函数。引理2的证明思路十分简洁，但符号比较复杂，读者也可以牢记结果，略读证明过程。

欧几里得定理　若2^n-1是素数，则$2^{n-1}(2^n-1)$是一个完全数。

注　我们先给出一种极初等的证法（这也可能是古希腊人的思想方法），然后再给出一种简洁的证法。

证法一　设$P=2^{n-1}(2^n-1)$，其中2^n-1是一个素数。显然，P的全部因数是$1, 2, 2^2, \cdots 2^{n-1}$及$2^n-1, 2(2^n-