泛函分析导论及应用

〔加拿大〕欧文·克雷斯齐格　著

蒋正新
吕善伟　译
张式淇

北京航空學院出版社

泛函分析导论及应用

〔加拿大〕欧文·克雷斯齐格 著

蒋正新 吕善伟 张式淇 译

白文林 校

北京航空學院出版社

内 容 简 介

本书是学习泛函分析的一部优秀入门书，被欧美很多大学广泛地用作数学系、物理系本科生和研究生的教材。

本书共十一章，包括度量空间；赋范空间、巴拿赫空间、希尔伯特空间、不动点定理及其应用、逼近理论、赋范空间中线性算子的谱理论、赋范空间中紧算子及谱理论、有界自伴算子的谱理、希尔伯特空间中的无界算子、量子力学中的无界算子。本书有精选的900多道习题，并在附录2中给出了解答。

本书深入浅出、通俗易懂、只假定读者有微积分和线性代数的基础知识即可阅读。适合于理工院校和师范理科专业的师生、研究生以及科技工作者、工程技术人员学习参考。

INTRODUCTORY FUNCTIONAL ANALYSIS
WITH APPLICATIONS

Erwin Kreyszig(University of Windsor)

泛函分析导论及应用

〔加拿大〕欧文·克雷斯齐格著

蒋正新 吕善伟 张式淇 译

白文林 校

责任编辑 郭维烈

北京航空学院出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京农业工程大学排印

• • •

787×1092 1/16 印张：30.75 字数：787千字

1987年5月第一版 1987年5月第一次印刷 印数：8000册

统一书号：15432 · 055 定价：4.45元

前　言

本书目的　泛函分析在数学及应用科学中的作用，都在不断地增长着。因此，人们越来越希望能在学生学习的早期阶段，就将他们引入到这个领域。本书目的就是要使读者熟悉泛函分析的基本概念、原理和方法以及它的应用。

教科书应该是为学生写的。因此，我力图在数学和物理专业的四年级大学生和一年级研究生易于理解的范围之内，给出这个学科的基本内容以及有关的实际问题。我希望工科的研究生也能从中得到益处。

必备知识　本书是初等的。大学数学的基础，特别是线性代数和普通微积分，作为必备知识也就够了。测度论既不要求，也不讨论。拓扑方面的知识也不需要。几处涉及到紧性的地方，本书自给自足。除了后面供选用的，因而也是易于删掉的一节（§7.5）外，用不着复习分析。附录1列出了供复习与参考的资料摘要。

因而本书能为广大范围的学生所接受，并且使得从线性代数过渡到高等泛函分析更容易。

课程安排　本书适用于每周五小时的一个学期的课程或每周三小时的两个学期的课程。

本书也可作为少学时的课程。事实上，可以删掉某些章而不破坏连续性或使其余部分残缺不全（详见下图）。例如：

第一章至第四章或第五章，可构成一个很短的课程。

第一章至第四章加第七章，构成一个包含谱论和其它课题的课程

内容及安排　图1示出组成本书内容的五个主要方框

希尔伯特空间的理论（第三章）放在赋范空间和巴拿赫空间的基本定理（第四章）之前，是因为它比较简单，能给第四章提供更多的例子。而更重要的是，能使学生对于从希尔伯特空间过渡到一般的巴拿赫空间所遇到的困难有一个较好的感性认识。

第五章和第六章可以删去。因此，在第四章之后可以直接去读其余几章（七至十一章）。

谱论　包含在第七章至第十一章中，这部分有很大的灵活性。可以只研究第七章或第七章与第八章。或者先集中精力于第七章的基本概念（§7.2与§7.3），随后再转人研究有界自伴算子谱论的第九章。

应用问题　在本书中有多处提到了。第五章与第六章是单独讲应用的两章。可以按顺序学下来，如果有必要的话，也可提前学（见图1）：

第五章可以放在第一章之后学习。

第六章可以放在第三章之后学习。

第五、第六章是供选用的，因为它们不是其它各章的必备知识。

第十一章是讲应用的另一个单独章。研究的是无界算子（在量子物理中的），但实际上是与第十章相互独立的。

表述方式　本书的内容已成为美国、加拿大和欧洲的数学、物理和工程专业的大学生和研究生课堂教学和讨论的基础。为使初学者易于掌握，本书的叙述是详尽的，特别是前面几章。关于证明，宁愿采用要求较低的，而不用虽稍简短但却艰深的方法。

在概念和方法都必须是抽象的一本书里，对于它的形成与发展都必须给予极大的重视。我力图通过一般性的讨论，并精选大量而适当的例子，其中包括很多简单的，来做到这一点。我希望这样能使学生认识到：抽象的概念、思想和技巧，通常是在比较具体的事物的启示

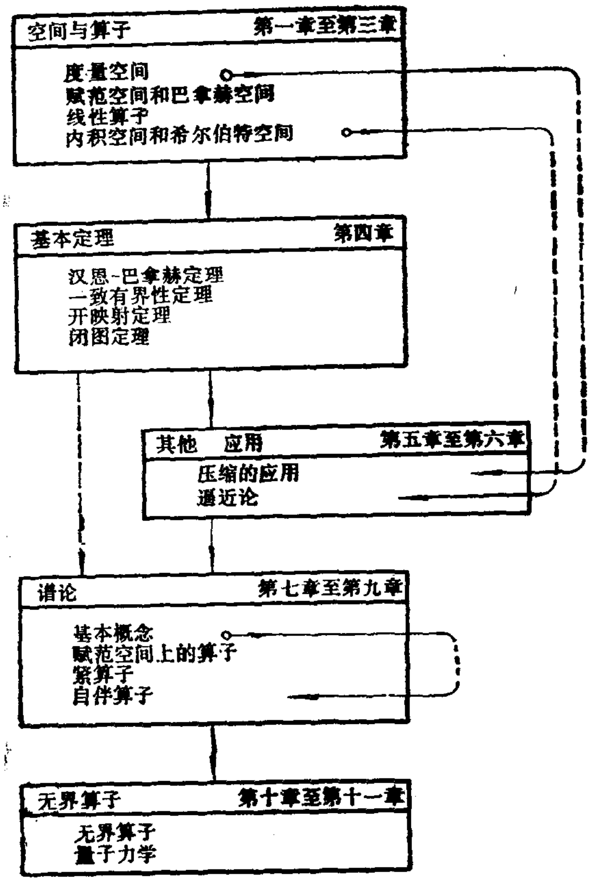

图 1　本书的内容及安排

下而形成的。学生应该懂得实际问题可以作为说明抽象理论的具体模型，也可以作为从一般理论产生具体结果的研究对象。此外，它还是理论向前发展中的新思想、新方法的重要源泉。

习题和解答　本书包含 900 多道精选的习题。这是为了帮助读者更好地理解泛函分析及其应用方面的内容，提高技巧和直观的能力而设置的。有些很简单，用以鼓励初学者。附录 2 给出了全部习题的答案。事实上，很多习题在附录 2 中给出了完整的解答。

本书的课文是自成体系的，即定理和引理的证明都包含在课文内，而没放在习题里。因此，内容的展开不依赖于习题，所以省略一部分甚至全部习题，都不会破坏叙述的连贯性。

参考资料　包含在附录 1 中，其中包括关于集合、映射、族等初等内容。

参考文献　涉及的书藉和论文，都搜集在附录 3 中，以助于读者对本书内容和某些有关的专题作进一步的研究。本书中引用了列出的所有论文和大多数的书藉。引文中包含有姓名和年份。请看两个例子：“存在不具有邵德尔（*Schauder*）基的可分巴拿赫空间；参阅 *P*・*Enflo*（1973）.”读者便可在附录 3 中 *Enflo*, *P*・(1973)处找到相应的论文。“本定理已由 *H*・*F*・*Bohnenblust* 和 *A*・*Sobczyk*(1938) 推广到复向量空间。”这指明在附录 3 中列出了这些作者1938年写的一篇论文。

符号与记法　在目录之后列表作了说明。

谢　启　（略）

ERWIN KREYSZIG

译 者 的 话

自1981年以来，每届有数百名工科硕士研究生选修《应用泛函》这门课。他们绝大多数来自工科院校，不仅没学过集合论与实变函数论，就是数学分析与线性代数的基础也相当薄弱，并且还要求多讲些泛函分析的应用。这使得我在教材的选取和教学方式方法的安排上都感为难。正值这时，我阅读了Erwin Kreyszig的《泛函分析导论及其应用》一书。它不要求读者具备实变与拓扑的知识就可以读懂，而且写得深入浅出，很富于知识性与趣味性，强调了应用。体系极为完整，论证十分严密，实为一本难得的泛函分析入门书。后来，我又读过Erwin的《高等工程数学》及《数理统计引论》，同样有独特的风格，也反映出作者博大精深的功力。他的这三本书，在世界广泛流布，被欧美很多大学用作教材。所以我也用这本书作为教材。经过1981—1984年的教学实践，效果甚好。由于听课人数的增加，原文版教材脱销，所以便在前几年讲课用的译稿基础上，约同吕善伟、张式淇同志共同加工修改，烦请白文林同志校正，由北航出版社出版。本书译稿1984年就已完成，在翻译的过程中，曾得到北航应用数理系主任李心灿教授的鼓励与帮助，也得到研究生院张维叙、王玉章处长的支持，制图教研室梅冰清同志精心绘制了插图，在此一并表示谢意。由于我们的水平有限，错漏之处还请专家批评指正。

蒋正新

1986年11月

符 号 说 明

A^c	集合A的余集
A^T	矩阵A的转置
$B[a,b]$	有界函数空间
$B(A)$	有界函数空间
$BV[a,b]$	有界变差函数空间
$B(X,Y)$	有界线性算子空间
$B(x,r)$	开球
$\tilde{B}(x,r)$	闭球
c	序列空间
c_0	序列空间
$\mathbf{C}$	复平面或复数域
$\mathbf{C}^n$	n维酉空间
$C[a,b]$	连续函数空间
$C'[a,b]$	连续可微函数空间
$C(X,Y)$	紧线性算子空间
$\mathscr{D}(T)$	算子T的定义域
$d(x,y)$	从x到y的距离
$\dim X$	空间X的维数
δ_{jk}	克罗奈克δ符号
$\mathscr{E}=(E_\lambda)$	谱族
$\|f\|$	有界线性泛函f的范数
$\mathscr{G}(T)$	算子T的图
I	恒等算子
inf	下确界（最大下界）
$L^p[a,b]$	函数空间
l^p	序列空间
l^∞	序列空间
$L(X,Y)$	线性算子空间
$M^\perp$	集合M的零化子
$\mathscr{N}(T)$	算子T的零空间
0	零算子
ϕ	空 集

$\mathbf{R}$	实直线或实数域
$\mathbf{R}^n$	n 维欧几里德空间
$\mathscr{R}(T)$	算子T的值域
$R_\lambda(T)$	算子T的预解式
$r_\sigma(T)$	算子T的谱半径
$\rho(T)$	算子T的预解集
s	序列空间
$\sigma(T)$	算子T的谱
$\sigma_c(T)$	T的连续谱
$\sigma_p(T)$	T的点谱
$\sigma_r(T)$	T的残谱
$\mathrm{span}M$	集合M的张成空间
sup	上确界（最小上界）
$\Vert T \Vert$	有界线性算子T的范数
T^*	T的希尔伯特伴随算子
$T^\times$	T的伴随算子
T^+，T^-	T的正部和负部
T_λ^+，T_λ^-	$T_\lambda = T - \lambda I$的正部和负部
$T^{1/2}$	T的正平方根
$\mathrm{Var}(w)$	w的全变差
$\xrightarrow{w}$	弱收敛
X^*	矢量空间X的代数对偶空间
X'	赋范空间X的对偶空间
$\Vert x \Vert$	x 的范数
$\langle x, y\rangle$	x与y的内积
$x \perp y$	x与y正交
$Y^\perp$	闭子空间Y的正交补

目　　录

第一章　度量空间

第二章　赋范空间，巴拿赫空间

第三章　内积空间，希尔伯特空间

第四章　赋范空间和巴拿赫空间的基本定理

第一章　度量空间

泛函分析是数学的一个抽象分支，它起源于经典分析。它的发展开始于大约八十年之前，而今天，泛函分析的方法和结果在数学及其应用的各个领域变得十分重要。其产生的原动力来自线性代数，线性常微分和偏微分方程，变分学，逼近论，特别是线性积分方程，其理论对现代概念的创立和发展起着最大的作用。数学家们观察到各种不同领域的问题往往具有相互关联的特征和性质。人们根据这一事实，通过对问题去伪存真的提炼，而获得了处理这些问题的一个有效而统一的途径。这种抽象地处理问题的优点是，能把握住事物的最本质的核心部分。这样一来，研究者的精力就免受非本质的细节的干扰，从而对问题看得更深入和更清晰。从这样一个角度来看，抽象的方法是处理数学体系的最简单、最经济的手段。一般地讲，任何这样的一种抽象体系，都有各种具体的实现(具体模型)。所以，我们将会看到抽象的方法在应用于具体情况时，也是十分多变的。这对于把毫不相干的各个领域联系起来，建立其间的关系和互相转化的途径是大有帮助的。

在这样一个抽象的研究方法中，人们通常都是从一个满足某些公理的集合出发，而集合的元素的特征不予指定，这也是我们的目的。由公理导出的一些逻辑结果作为定理而被反复使用。这就意味着我们从公理体系出发而得到一个数学结构，这个数学结构的理论又以抽象的方法展开讨论。而后，可把得到的通用定理应用到满足公理体系的各种特殊的集合上去。

例如，在代数中曾用这种方法研究域、环和群；在泛函分析中，我们将用这种方法来研究抽象空间。这些空间是基本的，也是重要的，我们将详细地研究其中的某些空间（如巴拿赫空间、希尔伯特空间）。以后我们还会看到，“空间”这个概念是一个广泛到具有惊人程度的观念。一个抽象空间不过是满足有关公理体系的元素（非特指的）集合。如果选用不同的公理体系，便得到不同类型的抽象空间。

以系统的方式使用抽象空间的观念，要追溯到弗列谢（*M·Frechet*，1906）①，他以其巨大的成功而被认可。

在这一章我们研究度量空间。度量空间在泛函分析中是最基本的，其在泛函分析中的作用有如实直线**R** 在微积分中的作用。事实上，它是**R** 的推广，并且为统一处理分析的各个分支中的重要问题提供了一个共同的基础。

我们首先定义度量空间及其有关的概念，并举一些典型的例子来说明它们。对其中一些在实用上特别重要的空间，还要详细地讨论。我们要花很多精力在完备性的概念上，这个性质不是每个度量空间都能具备的。完备性在全书中都起着关键性的作用。

---

① 在附录3中给出了参考文献，并且还将引用附录3中所列出的书籍和论文。

本章内容概要

所谓度量空间（见1.1-1），就是指在其上定义了度量的一个集合X。而度量是指X中任意两点（或元）之间的距离。度量是以公理化的方式来定义的。这些公理是根据实直线**R**或复平面**C**上两点间的距离所具备的一些简单性质提炼出来的。一些基本例子（1.1-2到1.2-3）表明，度量空间的概念是极为一般化的。某些空间可能具备一个极为重要的附加性质，即完备性（见1.4-3），将在§1.5和§1.6中详细地讨论。另外一个在理论上和实用上都有意义的概念是度量空间的可分性（见1.3-5）。可分的度量空间比不可分的度量空间要简单些。

§1.1 度量空间

在微积分中，我们研究的是定义在实直线**R**上的函数。稍微回顾一下便知，在求极限的过程和其它的许多研究中，我们利用了**R**上的现成的距离函数d，即对于每两个点x，$y \in$ **R**，其间的距离为$d(x, y)=|x-y|$，如图2所示。在平面和通常的三维空间中，情况是类似的。

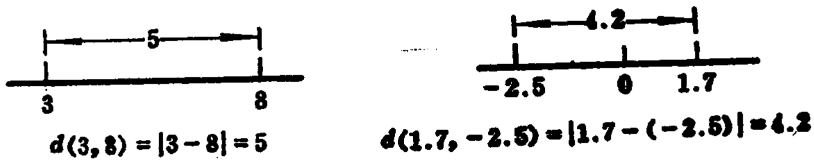

图2 R上的距离

在泛函分析中，我们将研究更为一般的“空间”及定义其上的“函数”。我们以充分一般化和多方适应的方式提出“空间”的概念如下：我们用抽象的集合X（其元素的特征为何，不予指定）代替实数集合**R**，并在X上引入这样一个“距离函数”，它仅满足**R**上的距离函数所具备的几条最根本的性质。但是，所谓“最根本”是指的什么呢？要回答这个问题远非那么简单。事实上，要选取和形成定义中的公理体系，总是要反复实验，并与具体问题进行类比，最后才能得到一个清晰而完整的概念。目前所给出的度量空间的概念，就是经过六十多年的发展过程才奠定的，它在泛函分析及其应用中是基本的，也是极为有用的。

1.1-1定义（度量空间，度量） 所谓度量空间，就是指对偶(X, d)，其中X是一个集合，d是X上的一个度量（或X上的距离函数），即d是定义在$X \times X$①上且对所有x，y，$z \in X$满足以下四条公理的函数：

(M1) d是实值、有限和非负的。

(M2) 当且仅当$x=y$时，$d(x, y)=0$。

① 符号×表示集合的笛卡尔积；A×B是所有序偶(a、b)的集合，其中a∈A，b∈B。因此，X×X是X的元素构成的所有序偶的集合。

(M3)　$d(x, y)=d(y, x)$　（对称性）。

(M4)　$d(x, y)\leqslant d(x, z)+d(z, y)$　**（三角不等式）**

为叙述方便，给出下面几个有关的术语。X叫做（X，d）的基集，X的元素叫做空间（X，d）的点。给定x，$y\in X$，我们把$d(x, y)$叫做x，y之间的距离。（$M1$）到（$M4$）叫做度量公理。“三角不等式”的名字是受初等几何的启示而得到的，如图3所示。

用归纳法从（$M4$）可以推得广义的三角不等式

$$d(x_1, x_n)\leqslant d(x_1, x_2)+d(x_2, x_3)+\cdots+d(x_{n-1}, x_n) \tag{1}$$

在不至引起混乱的情况下，我们常将度量空间（X，d）简写成X。

如果取子集$Y\subset X$且把d限制在$Y\times Y$上，则可得（X，d）的一个**子空间**（Y，$\tilde{d}$）；因而Y上的度量就是限制①

$$\tilde{d}=d\Big|_{Y\times Y}$$

$\tilde{d}$ 叫做d在Y上**诱导出来的度量**。

现在我们列举一些度量空间的例子，其中有一些已为读者所熟悉。为了证明它们确是度量空间，我们必须逐个验证各例中的d 是满足公理（$M1$）至（$M4$）的。通常情况下，验证（$M4$）比验证（$M1$）至（$M3$）要做更多的工作。然而，对于这里的几个例子来讲，不是很难的，所以把它们留给读者去完成(见习题集)。对于验证（M_4）来说不是这么容易的一些度量空间，将放在下一节讨论。

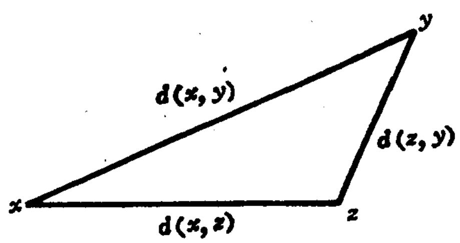

图3　平面中的三角不等式

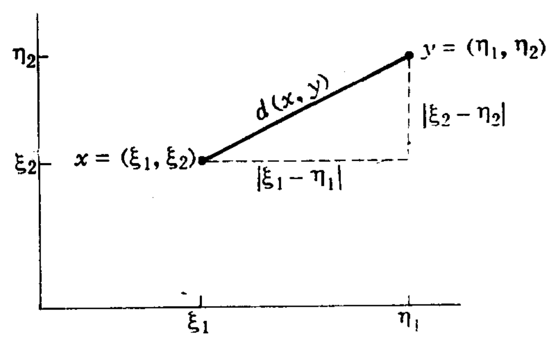

图4　平面上的欧几里德度量

例　子

1.1-2实直线R　它是所有实数的集合，取具有普通的度量定义

$$d(x, y)=|x-y| \tag{2}$$

1.1-3欧几里德平面$\mathbf{R}^2$　如果我们取实数序偶$x=(\xi_1, \xi_2)$ ②，$y=(\eta_1, \eta_2)$ 等的集合作为基集，用

$$d(x, y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2}\qquad(\geqslant 0) \tag{3}$$

来定义欧几里德度量（见图4），则得到度量空间$\mathbf{R}^2$，称之为欧几里德平面。

---

① 附录1中有映射的复习，也包括限制的概念。

② 在这里我们之所以不把$x=(\xi_1, \xi_2)$ 记成为$x=(x_1, x_2)$，是因为后面（从§1.4开始）在研究序列时需要用到x_1，x_2，…。

如果我们选用同样的实数序偶集合作基集，而改用

$$d_1(x, y) = |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2| \tag{4}$$

定义另一个度量d_1，则得到的是另一个度量空间。这说明了如下的重要事实：对于一个给定的集合（至少包含两个元素），在其上定义不同的度量，可得到不同的度量空间。(以d_1作为度量的空间没有一个标准名字，而d_1有时叫做出租汽车（*taxicab*）度量。为什么？$\mathbf{R}^2$有时也用E^2表示。)

1.1-4三维欧几里德空间$\mathbf{R}^3$ 这个空间的基集是所有形如$x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，$y=(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$的三元实序组的集合，用

$$d(x, y) = \sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2+(\xi_3-\eta_3)^2} \qquad (\geqslant 0) \tag{5}$$

在其上定义欧几里德度量。

1.1-5欧几里德空间$\mathbf{R}^n$，酉空间$\mathbf{C}^n$，复平面$\mathbf{C}$ 前面的几个例子是n维欧几里德空间$\mathbf{R}^n$的特殊情况。如果我们取所有形如$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$的$n$元实序组集合作为基集，用

$$d(x, y) = \sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2+\cdots+(\xi_n-\eta_n)^2} \qquad (\geqslant 0) \tag{6}$$

在其上定义欧几里德度量，便得到这个空间。

n维酉空间$\mathbf{C}^n$的基集是所有n元复序组的集合，其上的度量定义为

$$d(x, y) = \sqrt{|\xi_1-\eta_1|^2+|\xi_2-\eta_2|^2+\cdots+|\xi_n-\eta_n|^2} \qquad (\geqslant 0) \tag{7}$$

当$n=1$时，便得到复平面$\mathbf{C}$，具有普通的度量定义

$$d(x, y) = |x-y| \tag{8}$$

（$\mathbf{C}^n$有时又叫做n维复欧几里德空间。）

1.1-6序列空间l^∞ 这个例子和下一个例子给人的第一个印象是，度量空间的概念具有如此惊人的一般性。我们取一切有界的复数序列的集合作为基集X，也就是说X中的每个元素都是形如$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots)$的复数序列，简记为$x=(\xi_j)$，且对所有的$j=1, 2, \cdots$，都有

$$|\xi_j| \geqslant c_x$$

成立，其中c_x是依赖于x的实数，但与j无关。我们在X上用

$$d(x, y) = \sup_{j \in \mathbf{N}} |\xi_j - \eta_j| \tag{9}$$

来定义度量，其中$y=(\eta_j)\in X$，$\mathbf{N}=\{1, 2, \cdots\}$，而sup表示上确界（最小上界）①。这样所得到的度量空间通常记为l^∞。（这个有点奇怪的记法由下一节的1.2-3诱导出来。）因为X中的每个元素（或X的每个点）都是一个序列，所以l^∞是一个序列空间。

① 读者能够在A1.6中找到关于上确界和下确界的复习，见附录1。

1.1-7函数空间C〔a，b〕 我们取定义在闭区间$J=[a,b]$上的所有连续实值函数$x(t)$，$y(t)$，…的集合作为基集X，用

$$d(x,y)=\max_{t\in J}|x(t)-y(t)| \tag{10}$$

在X上定义度量，其中max表示最大值。这样所得到的一个度量空间记作为$C[a,b]$（其中字母C是取英文单词"*Continuous*"的第一个字母）。因为$C[a,b]$的每个点都是一个函数，所以它是一个函数空间。

读者将体会到，这里考虑问题的方式与微积分大不相同。在微积分中，我们通常是研究一个函数或同时研究几个函数。而这里，一个函数却变成为更大的一个空间中的点了。

1.1-8离散度量空间 我们取任意一个集合X，并在其上定义所谓离散度量为

$$d(x,x)=0, \quad d(x,y)=1, \quad (x\neq y)$$

空间(X,d)便叫做离散度量空间。虽然在应用中很少出现这种空间，但我们将以它为例来说明一些概念（粗心的话容易出错）。

从1.1-1我们看到，度量是用公理来定义的。顺便指出，在今天公理化的定义已被广泛地应用到数学的很多分支。它的有用价值，在希尔伯特关于几何基础的研究公布以后才被公认。有趣的是，对最古老最简单的数学部分的研究，却给予现代数学一个最重要的促进。

习　题

1. 证明实直线是一个度量空间。

2. 在实数集合上，$d(x,y)=(x-y)^2$能定义一个度量吗？

3. 证明$d(x,y)=\sqrt{|x-y|}$在实数集合上定义了一个度量。

4. 求在由两个点所组成的集合X上的所有度量。由一个点构成的集合又怎样？

5. 令d是X上的一个度量。试确定使得（1）kd，（2）$d+k$是X上度量的所有常数k。

6. 证明1.1-6中的d满足三角不等式。

7. 若A是l^∞的这样一了子空间，其元素是由零和1构成的序列。试问在A上诱导的度量是什么？

8. 证明用

$$\tilde{d}(x,y)=\int_a^b\left|x(t)-y(t)\right|dt$$

在1.1-7中的集合X上定义了另一个度量$\tilde{d}$。

9. 证明1.1-8中的d是一个度量。

10. 哈明（Hamming）距离 令X是由0和1构成的所有三元序组集合。证明X由八个元素组成，且由$d(x,y)=x$与y的不同的对应分量的个数在X上定义了一个度量d。（这个空间和类似的n元序组空间，在开关和自动理论以及编码中都起着重要作用，$d(x,y)$叫做x，y之间的哈明距离。参看附录3所列*R·W·Hamming*（1950）的论文。）

11. 证明（1）式。

12.（三角不等式） 三角不等式有一些有用的推论。例如，用（1）证明

$$|d(x,y)-d(z,w)|\leqslant d(x,z)+d(y,w)$$

13.利用三角不等式证明

$$|d(x,z)-d(y,z)|\leqslant d(x,y)$$

14.（度量公理） （$M1$）至（$M4$）可以用另外的公理来代替（而不 改变定义）。例如，证明可从（$M2$）和

$$d(x,y)\leqslant d(z,x)+d(z,y)$$

得到（$M3$）和（$M4$）。

15.证明度量的非负性可从（$M2$）至（$M4$）推出。

§1.2 度量空间的其他例子

为了说明度量空间的概念和验证度量公理，特别是验证三角不等式（$M4$），我们再给出三个例子。最后一个例子（空间 l^p）在应用中是其中最重要的一个。

1.2-1 **序列空间** s 这个空间的基集X是所有（有界或无界）复数序列的 集合，而其上的度量d 定义为

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}$$

其中$x=(\xi_i)$，$y=(\eta_i)$。注意，在例子1.1-6中的度量，在这里是不合适的（为什么？）。

容易看出，公理（$M1$）至（$M3$）是满足的，让我们来验证（$M4$）。为此，我们利用一个定义在$\mathbf{R}$上的辅助函数

$$f(t)=\frac{t}{1+t}$$

对它微分可得$f'(t)=1/(1+t)^2$，显然对任意的 $t\in\mathbf{R}$有$f'(t)>0$。因此f是单调递增的。从而由

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

可推出

$$f(|a+b|)\leqslant f(|a|+|b|)$$

将上述函数写出并应用关于数的三角不等式，便得到

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}$$

$$\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

在上面的不等式中，令$a=\xi_i-\zeta_i$，$b=\zeta_i-\eta_i$，其中$z=(\zeta_i)$，则$a+b=\xi_i-\eta_i$，且有

$$\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}\leqslant\frac{|\xi_i-\zeta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|}+\frac{|\zeta_i-\eta_i|}{1+|\zeta_i-\eta_i|}$$