中学数学丛书

不等式的证明及应用

王传荣　张云晓

天津科学技术出版社

中学数学丛书
不等式的证明及应用
王传荣　张云晓
＊
天津科学技术出版社出版
天津市赤峰道124号
天津新华印刷二厂印刷
天津市新华书店发行
＊
开本 787×1092毫米 1/32 印张 7.75 字数 162,000
一九八三年四月第一版
一九八三年四月第一次印刷
印数:1—66,000
书号：13212·52 定价：0.66元

编者的话

《中学数学丛书》是献给中学生和自学青年的礼物，希望它们成为中学数学爱好者的良师益友。

编写本丛书的目的在于帮助读者学好数学基础知识、提高运算能力、思维能力和空间想象能力，以及扩大数学知识领域。在编写过程中，力求把中学不同年级，不同阶段学过的代数、几何、三角、解析几何等方面的知识纵横联系，融会贯通，并对中学数学中某些问题或某种数学解题方法进行专题介绍，从而使读者在阅读这些小册子之后，能够比较系统、深入地掌握一些规律，学会一些方法，提高数学水平。

我们希望数学工作者、大中学数学教师和广大读者对本套丛书提出宝贵意见。

天津市数学会

一九八二年十月

目　录

一、不等式的意义和性质

（一）不等式的意义

实数集是一个有序集合．又，实数集内的任意两个数总是可以比较大小的．用符号“$>$”（$\geqslant$）或“$<$”（$\leqslant$）连结两个代数式所成的式子叫不等式．所谓不等式的意义，通常是指：对任意两个实数a，b

若a与b的差是正数，则称a大于b；

若a与b的差是零，则称a等于b；

若a与b的差是负数，则称a小于b，

反之亦然．将上述的说法，抽象成用数学符号来表示，那就是：

$$\left.\begin{array}{l} a-b>0 \Longleftrightarrow a>b \\ a-b=0 \Longleftrightarrow a=b \\ a-b<0 \Longleftrightarrow a<b \end{array}\right\} \qquad (11.1)$$

说明

（1）对于任意两个实数a，b有且仅有上述三种情况中的一种成立；

（2）设A、B是两个给定的代数式，如果代数式中变量的取值在允许取值范围内，永远有$A>B$（或$A<B$）成立，则称不等式$A>B$（或$A<B$）对于变数在允许取值范围之内是永远成立的．

例如，$x+\dfrac{1}{x}>2$，只要变量x取不等于1的正数，这

个不等式才能永远成立；

又如，$3xyz<x^3+y^3+z^3$，只要变量x、y、z取不全相等的正数，这个不等式才能永远成立；

再如，$(1-a)(1-b)(1-c)\geqslant 8abc$，只要变量 $a>0$，$b>0$，$c>0$且$a+b+c=1$，这个不等式才能永远成立.我们将此类不等式称为条件不等式；

例如，$a^2+1>0$，对于a为任意实数，这个不等式永远成立.我们将此类不等式称为绝对不等式；

例如，$a^2-2ab+b^2<0$，对于无论a，b取怎样的实数，这个不等式永远不成立.我们将此类不等式称为矛盾不等式.

由上可知，倘若撇开变量的允许取值范围来讨论不等式是没有意义的.换言之，我们总是约定在变量的允许取值范围内来讨论不等式；

(3) 尚须申明，本书限于在实数集内讨论问题，因此，除特别指明之外，以后所用字母表示的数均指实数.

（二）不等式的性质

在进行不等式的证明时，或利用不等式解题时，有必要将原不等式转化为一个新的且与原不等式等价的不等式.为此，经常利用下面一些不等式的性质：

1．$a>b\Longleftrightarrow b<a$ （对称性） (12.1)

2．$a>b$，$b>c\Longrightarrow a>c$ （传递性） (12.2)

3．$a>b\Longrightarrow a+c>b+c$ （加法保序性） (12.3)

推论

(1) $a>b$，$c>d\Longrightarrow a+c>b+d$ (12.4)

(2) $a>b$, $c<d \Longrightarrow a-c>b-d$ (12.5)

4. $a>b, c>0 \Longrightarrow ac>bc$ （乘正数保序性） (12.6)

5. $a>b, c<0 \Longrightarrow ac<bc$ (12.7)

推论

(1) $a>b>0$, $c>d>0 \Longrightarrow ac>bd$ (12.8)

(2) $a>b>0 \Longrightarrow \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$ (12.9)

(3) $a>b>0$, $0<c<d \Longrightarrow \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$ (12.10)

6. $a>b>0$, n是大于 1 的整数$\Longrightarrow a^n>b^n$ (12.11)

7. $a>b>0$, n是大于 1 的整数$\Longrightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ (12.12)

说明

(1) 有的教科书（如一九五六年，人教社版《高中代数》第三册）把(12.1)，(12.2)，(12.3)，(12.6)所表述的性质称为不等式的“基本性质”．不等式的对称性、传递性、加法保序性、乘正数保序性，之所以称为“基本性质”，实因不等式的其它性质都可以从不等式的“基本性质”中推出；

(2) 我们可以证明不等式的基本性质．例如证明不等式的传递性．

已知$a>b$，$b>c$，求证$a>c$．

证明　因$a>b$，$b>c$（已知）

因此　$a-b>0$，$b-c>0$（不等式的意义）

所以$(a-b)+(b-c)>0$（两个正数的和仍为正数——实数运算中的符号规则）即：$a-c>0$

因此　$a>c$（不等式的意义）．

并且我们不难发现，所有不等式基本性质的证明，有一个共同的特点，即其证明过程都是以不等式的意义为根据（出发点），再借助于实数运算中的符号规则来完成的．于是，有心的读者便可以体会到这实质上就是后面要讲的用“比较法”证明不等式的雏型．因此，读者务必掌握不等式性质的证明方法．至于不等式性质的证明过程，教科书中写得很详细，这里不再重复．

（三）含有绝对值的不等式

下面几个带有绝对值符号的不等式（或等式），也是后面经常用到的，务请读者弄清其含义，并在理解的基础上加以记忆：

1．$|a|=|-a|$． (13.1)

2．$|x|\leqslant a\Longleftrightarrow x^2\leqslant a^2\Longleftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a$ （其中$a>0$）． (13.2)

3．$|x|\geqslant a\Longleftrightarrow x^2\geqslant a^2\Longleftrightarrow x\geqslant a$或$x\leqslant -a$ （其中$a>0$）． (13.3)

4．$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$． (13.4)

〔$a>0$时：“左”取$<$号，“右”取$=$号；
$a=0$时：“左”、“右”全取$=$号；
$a<0$时：“左”取$=$号，“右”取$<$号〕

5．$|a|-|b|\leqslant |a+b|\leqslant |a|+|b|$． (13.5)

〔a,b同号时：“左”取$<$号，“右”取$=$号；
a,b异号时：“左”取$\leqslant$号，“右”取$<$号；
$a\neq 0$，$b=0$时：“左”取$=$号，“右”取$=$号；
$a=0$，$b\neq 0$时：“左”取$<$号，“右”取$=$号；

$a=0$，$b=0$时：“左”取=号，“右”取=号〕

推论

(1) $|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$；

(13.6)

(2) $|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$. (13.7)

〔事实上，对于a，$-b$利用(13.5)得$|a|-|-b|\leqslant|a+(-b)|\leqslant|a|+|-b|$即$|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$成立〕

6. $|ab|=|a|\cdot|b|$. (13.8)

7. $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$（其中$b\neq0$）. (13.9)

8. $|a^n|=|a|^n$（其中n为自然数）. (13.10)

〔特别的，当$a\geqslant0$时，有$|a^n|=a^n$〕

二、几个重要的不等式

作一个粗浅的比喻．不言自明，按照多项式的运算法则便可进行多项式的乘、除运算了，但是建立了乘法公式之后，我们利用乘法公式（模式作用）将大大化简多项式的乘、除法运算过程．类似的情况，在不等式的证明中或利用不等式解题中，也经常利用下面几个重要的不等式．

教科书中涉及到的几个重要不等式：

1．$a^2 \geqslant 0$ (21.1)

（这是实数区别于虚数的一个基本特性）

2．$a^2+b^2 \geqslant 2ab$ (21.2)

（其中 a，b 为任意实数．当且仅当 $a=b$ 时，上式取等号）

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqslant 2 \tag{21.3}$$

（其中a，b同号．当且仅当$a=b$时上式取等号）；

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \tag{21.4}$$

（其中a，b为非负数．当且仅当$a=b$时，上式取等号）．

附注

（1）习惯上常称以上公式（21.2）、（21.3）、（21.4）为

“基本不等式”．基本不等式的特点就在于不等式的一边为“和”的形式，另一边为“积”的形式．(21.2) 的左边为“平方”的和，右边为两底数乘积的2倍；(21.3) 的左边为“倒数”的和，右边为两倒数乘积的算术平方根的2倍；(21.4) 的左边为两个正数的算术平均值（“和”的形式）．右边为两个正数的几何平均值（“积”的形式）并且都是“和”不小于“积”（也有人称“和”大于或等于“积”）．

(2) 所有这些基本不等式，均是当且仅当$a=b$时取等号．换言之，基本不等式转化为等式的充要条件是a与b相等．

(3) 必须注意到上述基本不等式成立的条件不同（即不等式中变量允许取值范围不同），因而这些基本不等式的适用范围也不同．(21.2) 对于任意实数a，b均适用（绝对不等式）；(21.3) 只对于a,b是同号的两个数才适用；(21.4) 只对于a，b是两个正数（或零）才适用．

(4) 因对任意实数a，b都有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，　　(21.2)

特别对于两个非负数$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$（其中$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$）有$(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\geqslant 2\sqrt{a}\sqrt{b}$，从而有$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，

即$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，这也就是式 (21.4)．又当$a,b$同号时，$\frac{b}{a}$，

$\frac{a}{b}$表示两个正数，因此，由 (21.4) 的推导过程可得$\frac{b}{a}+$

$\frac{a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}$，即$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$，这也就是(21.3)．不难说明当$a$，$b$表示正数时 (21.2)、(21.3)、(21.4) 三者实质

上是一致的.

应特别强调，基本不等式（21.4）还可以推广到更一般的情况，并且它在正数范围内来研究不等式问题，起着非常重要的作用.

3. $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$ (21.5)

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc} \tag{21.6}$$

此条件可放

（其中a,b,c为正数，当且仅当$a=b=c$时，取等号）.

4. 已知a_1，a_2，…，a_n为正数，n为大于1的自然数，

则
$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \tag{21.7}$$

（当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时，上式取等号）.

附注

(1)（21.7）所示：n个正数的算术平均值不小于这n个正数的几何平均值. 显然，当$n=2$时（21.7）就转化为（21.4），当$n=3$时（21.7）就转化为（21.6）；

(2)（21.7）常称为柯西不等式. 关于柯西不等式的证明，读者可阅读其它参考书，这里就不证明了；

(3) 利用柯西不等式可以求某些函数的最大值或最小值.

设a_1，a_2，…，a_n表示n个正的变数，由(21.7)：

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

当"和"$a_1+a_2+\cdots+a_n=S$为定值时，由

$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{S}{n}$ 得"积"$a_1a_2\cdots a_n$有最大值：

$$(a_1a_2\cdots a_n)_{\max}=\left(\frac{S}{n}\right)^n. \tag{21.8}$$

当"积" $a_1a_2\cdots a_n=P$ 为定值时，由 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{P}$ 得"和" $a_1+a_2+\cdots+a_n$有最小值：

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)_{\min}=n\sqrt[n]{P} \tag{21.9}$$

并且，仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时，函数取得最大(或最小)值.

5．已知$b>a>0$，$m\geqslant0$，则

$$\frac{a}{b}\leqslant\frac{a+m}{b+m}$$

(当且仅当$m=0$时，取等号)． (21.10)

6．已知$x>-1$且$x\neq0$，n是不小于2的自然数，则

$$(1+x)^n>1+nx. \tag{21.11}$$

(这个不等式，称为贝尔努利不等式．它在研究含有指数（及根式）的有关不等式问题时起非常重要的作用．关于贝尔努利不等式的证明，用到了数学归纳法，详见教科书)

三、不等式证法浅释

一般的说来，凡经过逻辑推理或论理来断定不等式中的变量在允许取值范围之内，使得不等式成立，这样一个过程，就叫做“证明不等式”.

关于一个给定待证的不等式题，如同其它的数学命题一样，总可以分为“题设”（惯称“已知”、“条件”，常记为A）与“题断”（惯称“终结”、“结论”，常记为B）两部分.因此“不等式证明题”总可以写成“若A则B”的形式.例如求证$(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 64abc$（其中$a$，$b$，$c$为正数且$a+b+c=1$）.显然，这是一个不等式证明题.这个不等式证明题的“题设”(A)是$a>0$，$b>0$，$c>0$且$a+b+c=1$而“题断”(B)是$(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 64abc$.证明不等式，就是$A\Longrightarrow B$（若$A$则$B$）.

证明不等式，如同证明其它（真确的）数学命题一样，有着不同的推理论证方法.

（一）直接证法与间接证法

众所周知，对于任何一个不等式，总存在着与其等价的不等式.因此，要证明某一个不等式成立，可因题而异，见机行事，或直接从原题入手加以推证，或间接从它的等价不等式出发加以论理.基于这两方面的不同，证明不等式的方法便分为直接证法与间接证法.

1．直接证法．要证明一个不等式，例如，可以由“题设”（A）出发，根据不等式的意义和性质及前面已谈到的不等式（类似本书所列举的读者熟知的一些重要的不等式），按照逻辑推理，一直推出“题断”（B）．象这样由原题入手来证明不等式的方法叫做不等式的直接证法．不等式中的大多数证明题，大都采用这种证法．下面用四个例题说明．

【例1】 求证 $(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 64abc$（其中$a$，$b$，$c$为正数，且$a+b+c=1$）．

证明 ∵ $a>0$，$b>0$，$c>0$ 且$a+b+c=1$，

∴ $1+a=a+a+b+c$为四个正数的和，

而 $$\frac{a+a+b+c}{4}\geqslant\sqrt[4]{a^2bc}\,,$$ （见(21.7)）

∴ $(1+a)\geqslant 4\sqrt[4]{a^2bc}$． (1)

同理 $(1+b)\geqslant 4\sqrt[4]{ab^2c}$， (2)

$(1+c)\geqslant 4\sqrt[4]{abc^2}$， (3)

不等式(1)，(2)，(3)两边相乘，得：

$(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 64abc$ （见(12.8)）

（当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$时，上式取等号）．

【例2】 已知a，b，c为不全相等的正数，

求证$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}>\frac{3}{2}.$$

证明 ∵ $a>0$，$b>0$，$c>0$

∴ $a+b>0$，$b+c>0$，$c+a>0$，（见(12.4)）

∴ $$\frac{c+a}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}\geqslant 2$$ （见(21.3)） (1)