泛函分析

上册

〔苏〕Л. В. Канторович
Г. П. Акилов

高等教育出版社

泛函分析

上　册

[苏] Л. В. Канторович　Г. П. Акилов
刘证 郑权 张云生　译

高等教育出版社

内容提要

本书系根据 Л. В. Канторович, Г. П. Акилов 著"泛函分析"第二版(1977 年)译出，分上、下两册出版.

本书实际上是 1959 年出版的"赋范空间中的泛函分析"一书的修订本. 书中的叙述以一般泛函空间为基础，反映了这些年来在一系列问题上的进展. 这一版中泛函分析的应用在很大程度上得到了反映，除了在计算数学与数学物理上的应用外，还注意到对数理经济问题的某些应用.

上册为"泛函分析"的第一部分——线性算子与线性泛函，共十一章. 内容有拓扑空间与度量空间，向量空间，拓扑向量空间，赋范空间，线性算子与线性泛函，泛函的解析表示，线性算子序列，Banach 空间中的弱拓扑，紧算子与共轭算子，有序赋范空间，积分算子.

下册为"泛函分析"的第二部分——泛函方程，共七章. 内容为共轭方程，第二类泛函方程，近似方法的一般理论，最速下降法，不动点原理，非线性算子的微分，Newton 法.

本书可作为高等学校数学专业、计算专业教师和研究生以及泛函专门组学生的教学参考书，也可供数学及其应用领域内的科学工作者使用.

泛函分析

上册

[苏] Л. В. Канторович Г. П. Акилов

刘证 郑权 张云生 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 17.5 字数 423,000

1982 年 8 月第 1 版 1984 年 7 月第 1 次印刷

印数 1—10,500

书号 13010·0782 定价 2.65元

第二版序言

从本书第一版以《赋范空间中的泛函分析》为名出版以来，已经过去了二十年．在这段时间里，无论是数学在现代科学概念的体系中的位置，还是数学本身，都发生了根本性的变化．这种变化首先涉及到泛函分析在数学这门学科内的地位．如果说在本书第一版问世时，泛函分析还被当做分析的比较新的有前途的一部分，那么现在“泛函分析”和“数学分析”这两个术语实际上已有相同的含义了．不但如此，泛函分析现在是整个连续数学的统一的语言．关于函数论，微分方程及数学物理，计算方法，数理经济学与控制论，以及其他领域的任何一项认真的研究，如果不广泛地使用泛函分析的语言和结果就对付不了，也不可能对付．正因为如此，一方面泛函分析才成了数学的一个蓬勃发展的分支，另一方面，泛函分析的方法在应用中起着越来越大的作用．

作者怀着自豪和不安的心情意识到所发生的变化．自豪——这是这个重要历史事件的参与者的感觉的自然表露．而提供给读者的这本书的命运却引起了不安——要知道现在已不可能有泛函分析的包罗万象的教科书了(甚至是引论性的)．因此在准备本版时，虽然作了相当大的修改，我们认为，保持第一版所采用的总计划，以及基本上保持第一版对材料的选择和处理仍是适宜的．但是对一系列的问题，特别对拓扑向量空间论与积分算子论的叙述在本质上是有变化的．如果说，以前的叙述基本上限于赋范空间论，拓扑向量空间虽然占了不小的篇幅，但仍作为随意选取的材料，那么按照泛函分析发展的逻辑，拓扑向量空间现在就已经成了

叙述的基础，这也是书名变化的原因．用于半序空间理论基础的一章是新增加的，在可测函数理想空间的基础上建立了积分算子及其表达式的理论．

同以前一样，泛函分析对应用分析的应用占去了颇大的篇幅，这正是本书第一版的特征．本书所包含的这些内容促使国内外对相应问题的探讨．在本版中这些问题的叙述在某种程度上加强了并且现代化了．本版的主要特点在于也包含了与泛函分析在数理经济学及控制论中的应用有关的某些问题，虽然对此还没有做到十分完备．部分无关紧要的材料删去了．文献有本质变化．

第一章带有引论的性质，其中叙述了拓扑空间、度量空间及抽象测度空间的理论基础，很多结果是不加证明地引入的．我们假定读者熟悉实变函数的初等理论及大致如普通的大学数学分析教程范围的 n 维欧氏空间的拓扑．更专门，更精细的理论及应用方面的问题以小字排印，初读时可以放过．对泛函分析的应用有特殊兴趣的读者也可以略去与拓扑及拓扑向量空间有关的其他一系列较抽象的章节．如果他已经熟悉赋范空间的基本理论，也可以直接阅读相应的应用的章节．

（下略）

文献目录由两部分组成，一部分是泛函分析及其相邻问题方面的专著，另一部分是本书所使用的文献，它基本上由杂志上的论文组成．在书中引证 Вулих-II 时，是指引用专著目录中列在 Б. З. Вулих 的名字下面的第 II 号专著，而引证 Левин[3]时，是指引用 В. Л. Левин 的论文，已列在所使用的文献目录中．文献目录并不追求齐全．当结果已在专门的文献中得到反映时，我们照例宁愿引用书而不引用原来的论文．

全书由十八章组成，章分成节，节分成段，用双重数码编号；第一个数表示该段所在的节的号码，第二个数表示这一节内段的顺

序．在引用时也将指出该段所在章的号码；例如，XI. 4. 2 表示引用第十一章第四节第二段．在节内引证时章的号码省略．至于定理，照例在每一节内编号．例如，定理 XIV. 3. 2 表示第十四章第三节第二个定理．当所引证的定理在同一节内时不再指出章和节的号码．

第一版序言

泛函分析是近年来兴起的一门学科．仅在近二、三十年，它才形成为数学分析的一个独立分支，但这并未妨碍它成为现代数学的中心之一．

泛函分析是现时在数学中发生的根本性转折的最明显的表现．这种转折，就其原则的意义上讲，可以和十七世纪时把变量引入数学从而导致微积分的产生相比拟．

这个转折首先表现于研究数学分析的各种问题的途径发生了变化．泛函分析不是孤立地考察各个函数以及联系它们的关系和方程，而是把这些对象作为一个总体来研究，即研究函数空间和它们的变换（泛函运算）．例如，研究微分算子或积分变换就不是对个别的函数，而是对整个的函数类进行的，即研究这类函数变换的结果，算子在某种意义下的连续性等等．

把初看起来相距甚远的问题统一起来，同时研究它们，这种高度抽象的研究分析问题的形式也是泛函分析的一个重要特点．例如，研究泛函方程 $F(x)=y$，其中 x 和 y 是某种任意领域的对象．对这个方程的研究可以把这样一些不同的问题统一起来：解微分方程，积分方程，边值问题，无限代数方程组及矩量问题等．由个别的函数转移到函数空间，虽然有时是形式上的甚至是难以捉摸的．但在原则上是重要的，就象当初从代数方程及代数关系转移到变量和函数相关一样．

这种新的观点不是由于单纯地追求一般性而产生的．把抽象性提高到新阶段的要求，是由于在分析的发展过程中产生的新问

题而自然引起的．函数系的完全性，边值问题对确定的函数类的可解性，同时研究一整类问题，例如边值问题的解对方程右边或边值条件的相依性等都是这一类新问题．正是泛函分析的方法对于提出和研究这些问题显得特别富有成效．同时，在很多情况下，考察共同性就能够揭露更一般的，同时也是更根本的更深刻的规律性和联系，因为，抛弃了每个个别问题的无关紧要的细节，就暴露了事物的本质，从而使形式和起源不同的问题的亲缘关系就变得明显了．

变分法，积分方程，正交函数论，契比雪夫逼近论，矩量问题等一系列经典数学分析领域的研究自然要求采用新的方法，它为泛函分析的建立作了准备．泛函分析的一些问题就分别产生在这些领域之内，例如变分法中的泛函概念．另一方面，实变函数论，拓扑学，抽象代数等集合论科目的发展，为采用抽象的形式系统处理这一新的方向准备了工具，特别是抽象空间理论，对于泛函分析具有根本性的意义．

泛函分析开始独立存在的时刻可从下列事情算起，即系统地建立无限维酉空间算子理论（Hilbert 等）和发展了线性赋范空间的一般理论(1918—1923)，后者是匈牙利数学家 Riesz，特别是波兰数学家 Banach 所作的工作．

当发现泛函分析（Hilbert 空间的算子理论）在量子力学中得到了重要的应用时，对它的兴趣就更高了．在最近二十年，特别在苏联数学家的工作中，创立了泛函分析的新方向，它的方法和结果在理论物理、数学物理、应用分析及其他数学领域中都得到了最重要的应用．

本书的内容不包含泛函分析的全部方向及其所有应用领域．它基本上写的是赋范空间论(它的基础是由 Riesz 和 Banach 奠定的，包含这个理论的最重要的事实，也注意到其后的工作)．本

书讨论了赋范空间论，算子论及泛函方程论．除线性算子和线性方程外，非线性算子和非线性方程也占据了不小的位置．除一般理论外，本书还重视给出具体的泛函空间和算子，特别是专门讨论了 Соболев 引进的多变量可微函数空间．这些问题与一般地研究积分算子有关．

本书是以在列宁格勒大学对数学分析专门化和计算数学专门化的学生讲的讲义为基础写成的．

Л. В. Канторович　Г. П. Акилов

目　录

第一部分

线性算子与线性泛函

第一章　拓扑空间与度量空间

空间的概念在数学中起着最重要的作用，所谓空间就是在其元素之间以公理形式给出了某些关系的集合．这时，称在集合上给定了相应空间的结构．本章研究的基本对象是拓扑空间与度量空间，即对于其元素定义了邻近概念的集合．拓扑空间是 1910 年由 Hausdorff 引进的(参见 Hausdorff)，度量空间则是更早一些由 Fréchet[1]引进的．

§1．集合的一般知识·有序集

1.1. 在这一段里，我们回顾一下一般集合论的某些基本概念及有关的记号*)．同时我们将按照非形式的观点，认为集合或总体的概念直观上是明显的，不需要精确地定义．研究某个集合时，我们称构成集合的那些对象为它的元素．

我们用 $\boldsymbol{N}$ 表示全体自然数的集合，$\boldsymbol{R}$ 表示全体实数的集合，$\boldsymbol{C}$ 表示全体复数的集合．

设 A、B 是集合．记号 $a\in A$ 表示元素 a 属于集合 A；$a\notin A$ 表示元素 a 不属于 A．如果集合 A 的每个元素都属于集合 B，则称集合 A 是集合 B 的子集，并记为 $A\subset B$(或 $B\supset A$)．如果 $A\subset B$ 及 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，并记为 $A=B$．空集(即不包含任何元素的集合) 用记号 $\varnothing$ 表示．如果 (P) 是作用在集合 A 的元素上的某个命题，那么由满足 (P) 的所有 $a\in A$ 构成的子集记为 $\{a\in A:(P)a\}$，

---

*) 一般集合论的基础是由德国数学家 Cantor 在十九世纪后半期奠定的．

或简记为$\{a:(P)a\}$.

设 A、B 是集合. 如果对于每个元素 $a\in A$ 都按确定的规律对应唯一的元素 $f(a)\in B$, 则称给定了从集合 A 到集合 B 内的映射 f, 并且记为 $f:A\to B$. 对于任何 $X\subset A$, 它的象定义为 $f(X)=\{b\in B:$ 存在 $a\in X$, 使得 $b=f(a)\}$. 对于任何集合 $Y\subset B$, 它的全原象定义为 $f^{-1}(Y)=\{a\in A:f(a)\in Y\}$. 映射 $f:A\to B$ 叫做一对一的, 如果 $f(a_1)=f(a_2)$ 蕴涵 $a_1=a_2$. 如果 $f(A)=B$, 则称它是 A 到 B 上的映射. 如果映射 $f:A\to B$ 是一对一的并且还是 A 到 B 上的, 则称它是双射映射. 如果 f 是双射映射, 则由关系式 $g(f(a))=a$, $a\in A$ 定义的映射 $g:B\to A$ 叫做 f 的逆映射并记为 f^{-1}.

现在引进集合论基本运算的定义. 如果对于某个非空集合 A 的每个元素 α 都对应着某个集合, 则称给定了集族 $\{X_\alpha\}(\alpha\in A)$. 集合 $\bigcup\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$ 叫做集族 $\{X_\alpha\}$ 的并, 它是由这样的元素 x 组成的, 即至少对于一个 $\alpha\in A$, 使得 $x\in X_\alpha$. 集合 $\bigcap\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$ 叫做集族 $\{X_\alpha\}$ 的交, 它是由这样的元素 x 组成的, 即对于任何 $\alpha\in A$, 都有 $x\in X_\alpha$. 集合 $\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$ 叫做集族 $\{X_\alpha\}$ 的直积, 它是这样的映射 $f:A\to\bigcup\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$ 的全体, 使得对于所有的 $\alpha\in A$, 都有 $f(\alpha)\in X_\alpha$. 如果 A 由整数 $1,2,\cdots,n$ 组成, 则对应的并、交与直积分别记为

$$\bigcup_{k=1}^{n}X_k=X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_n,\qquad \bigcap_{k=1}^{n}X_k=X_1\cap X_2\cap\cdots\cap X_n,$$

$$\prod_{k=1}^{n}X_k=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$$

我们指出, 可以把有限直积 $\prod\limits_{k=1}^{n}X_k$ 与全体有序组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的集合等同起来, 其中 $x_k\in X_k$.

如果 A 是全体自然数的集合 N，则上述运算分别记为

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k, \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k, \qquad \prod_{k=1}^{\infty} X_k.$$

两个集合 A 与 B 称为离析的(或不相交的)，如果 $A\cap B=\varnothing$. 集族 $X_\alpha(\alpha\in A)$ 称为两两离析的，如果当 $\alpha_1\neq\alpha_2$ 时 $X_{\alpha_1}\cap X_{\alpha_2}=\varnothing$. 两两离析的集族 $\{X_\alpha\}(\alpha\in A)$ 叫做集合 T 的分划，如果 $T=\bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$.

由所有使得 $a\notin B$ 的 $a\in A$ 构成的集合 A 的子集叫做差 $A\backslash B$. 同时在 $A\backslash B$ 的定义中并不要求 $B\subset A$. 如果 $B\subset A$，则也称集合 $A\backslash B$ 为集合 B 的余集(关于集合 A 的). 集合

$$A\triangle B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$$

叫做集合 A 与 B 的对称差.

如果 $A\subset X$，则集合 A 的特征函数 χ_A 由下式定义：

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & \text{如果 } x\in A,\\ 0, & \text{如果 } x\in X\backslash A.\end{cases}$$

1.2. 如果对于集合 X 中的某些元素对 x 与 y 定义了序的关系 $x\geqslant y$ (x 大于或等于 y)，并且满足下列条件：

1) 对于任何 $x\in X$ 有 $x\geqslant x$;

2) 如果 $x\geqslant y$ 且 $y\geqslant z$，则 $x\geqslant z$;

3) 如果 $x\geqslant y$ 且 $y\geqslant x$，则 $x=y$,

则称集合 X 是有序的*).

记号 $x\leqslant y$ 表示 $y\geqslant x$; $x>y$ 表示 $x\geqslant y$ 且 $x\neq y$; $x\geqslant y, z$ 表示 $x\geqslant y$ 及 $x\geqslant z$. 实数集 $\boldsymbol{R}$ 是有序集的例子，其中任何两个元素都有关系 $\leqslant$ 联系(即通常的比较关系). 有序集也可以含有不可比较的元素，例如，按包含关系有序的自然数列 N 的所有子集构成的集合

---

*) 常常用部分有序集这个术语，这时强调的是并非所有元素对都能用“大于或等于”关系联系起来.