微积分程序教程续篇

陈永明　林炎生　张方盛 编著

上海科学技术文献出版社

微积分程序教程续篇

陈 永 明
林 炎 生 编 著
张 方 盛

上海科学技术文献出版社

(沪)新登字301号

微积分程序教程续篇

陈永明　林炎生　张方盛　编著

*

上海科学技术文献出版社出版发行

(上海市武康路2号)

全国新华书店经销

上海科技文献出版社昆山联营厂印刷

*

开本 787×1092 1/32　印张 13　字数 314,000

1991年9月第1版　1991年9月第1次印刷

印数：1—1,500

ISBN 7-80513-823-0/T·202

定价：8.00元

《科技新书目》247-341

内 容 提 要

本书是采用程序教学的方式编写的，其内容为级数、多元函数微积分．本书是上海科学技术文献出版社出版的《微积分程序教程》一书的续篇．

本书可作为师范院校、工科院校(包括电视大学、职工业余大学、函授大学)、成人中专学生学习和在职中学数学教师进修使用，对自学者尤为适宜。本书也可供从事微积分课程教学的教师参考．

编者的话

程序教学是美国心理学家斯金纳(B.F.Skinner)等首创的教学方法，其主要特点是“小步子”。即把学习的内容细分成若干个小的学习步骤，每一步都是一个问题，由学习者循序回答。问题与问题之间的难度相差很小，容易学懂。

本书是吸取了国外程序教学法的优点，并结合我国的实际情况作了改进编写而成的。通过实践，我们认为国外程序教学法有不少优点，但也有其不足之处。教学中采用“小步子”，循序渐进，由浅入深，容易学习，有利于调动学习者的学习主动性和积极性，但在培养解答能力方面较为薄弱。我们希望既保持国外程序教学循序渐进的优点，又能使学习者的解答能力得到锻炼与培养。因而对有些内容，在编写时，故意先出现一个较难的问题(我们称之为大步子)紧接着安排几个提示性的小问题（我们称之为支程序)。这样，对有能力解出这个问题的学习者，可以跳过支程序；对有困难的学习者也提供了一个独立思考的机会，而且学了支程序之后，回头再解原来的问题就没有什么困难了。这种编写方法，我们称为“大小步子结合”。这样做，一方面锻炼和培养学习者的分析和解决问题的能力，另一方面也达到了因材施教的目的。“大小步子结合”的提法是否确切，本书中结合得是否妥当，尚需在实践中逐步总结、改进、提高。

为了便于自学，本书每节前都写了“学习建议”；对有些内容作了“小结”；对有些解题方法作了“评论”；对容易混淆的概念和容易疏忽的地方作了“注”；每章还安排一节“杂例讨论”，介绍

综合性题目的解法。本书的习题有一定的难度，学习者可量力而行，选做一部分。

为了便于学习者复习和小结，在每一“步子”前标以记号(如[引]，[正]，[注]，……)，学习者一下子就可以了解这个“步子”的性质和地位。

本书是《微积分程序教程》的续篇。《教程》内容是一元微积分，本书内容是级数和多元微积分。读者对象仍为师范院校、工科院校(包括电视大学、业余职工大学、函授大学)、成人中专师生，对自学者和在职中学数学教师进修尤为适宜。

本书第一、二章由张方盛撰写，第三、五章由陈永明撰写，第四章由林炎生撰写，最后由陈永明统稿。成稿后由应制夷教授审稿。上海师大数学系、上海市徐汇区教育学院领导、山西省教育学院函授部沈纬萍老师对我们的试验及编写工作给于有力支持，在此一并表示感谢。由于我们水平有限，一定存在不少问题，恳请专家、同行和广大读者批评指正。

编　者

1990.12

目　录

第一章　常数项级数

第二章　函数项级数

第三章　多元函数微分学

第四章 重 积 分

第五章 曲线积分与曲面积分

第一章 常数项级数

本章及第二章内容是级数部分。级数是用来作数值计算与表示函数的一个重要的数学工具。在生产实际与自然科学中，为了得到函数的近似表达式以及计算积分与求微分方程的解等，常常利用级数来表达一个函数或者把一个函数展开为级数。

本章先讨论简易的级数——常数项级数。

§1.1 常数项级数及其敛散性

学习建议 本节内容很重要，它是整个级数部分的基础，特别是级数收敛与发散的概念务必弄懂。由于级数的收敛、发散概念与数列以及极限知识密切相关，因此，学习时宜复习数列、极限概念及数列求和等有关内容。

§1.1.1 常数项级数的概念

1 [引] 什么叫常数项级数？我们先看下例：

如果要求出圆的面积，可先作圆的内接正六边形（图 1-1-1），记其面积为 A_1，这是圆面积的一个近似值；再以这六边形的每一边为底边，在弓形内作顶点在圆周上的等腰三角形，记这六个三角形面积之和为 A_2，那么此圆内接正十二边形的面积 $S_2 = A_1 + A_2$ 也是圆面积的一个近似值，其近似程度比 $S_1(=A_1)$ 要好；同样，再以这十二边形的每一边为底边，在弓形内作顶点

在圆周上的等腰三角形，记这十二个三角形的面积之和为 A_3，那么此圆内接正二十四边形的面积 $S_3=$ ____ 也是圆面积的一个近似值，其近似程度比 S_1、S_2 都要好；依此类推，此圆的面积近似地等于 $S_n=$ ____。

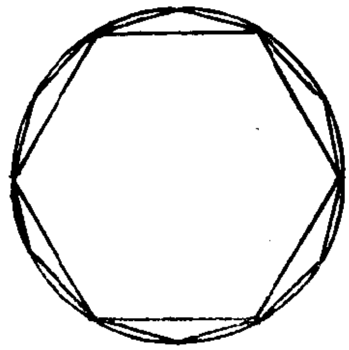

图 1-1-1

很明显，$\{S_n\}$ 是递增有界数列，它必有极限。于是人们自然地把圆面积 S 规定为 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$，亦可记作 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，于是有

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(A_1+A_2+\cdots+A_n)=\sum_{i=1}^{\infty}A_i.$$

这一极限思想在我国很早就出现。魏晋时代（公元三世纪）的数学家刘徽在《九章算术注》中提出了用正多边形计算圆面积或周长的"割圆术"。他从圆内接正六边形起，前后算到圆内接正 384 边形、正 3072 边形，分别得到圆周率 π 的近似值为 3.14 和 3.1416，在世界数学史上居于非常杰出的地位。

【答案　$A_1+A_2+A_3$；$A_1+A_2+\cdots+A_n$。】

2［**正**］定义　设给定无穷常数列 $\{u_n\}$：

$$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots,$$

称　$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots\left(\text{简写为}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\right)$为常数项级数，简称数项级数。其中第 n 项 u_n 叫做数项级数的一般项或通项。

为了简便起见，本章提到的级数，一般都是指数项级数。

从上述定义可知，数列 $\{u_n\}$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是既有密切联系，又有严格区别的不同概念，不要混淆。

3［**例**］　$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ \cdots,\ 3^{n-1},\ \cdots$；

$1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ \cdots,\ 1+2+3+\cdots+n,\ \cdots$；

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots;$$

$$1+2^2+3^2+\cdots+n^2+\cdots.$$

问第一个(是　不是)级数;第二个(是　不是)级数;后两个都(是　不是)级数。

【答案　不是;不是;是.】

4［**练**］写出下列级数的前四项:

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^n}$; ② $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2n+1}$; ③ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$.

【答案　① $\frac{1}{5}$, $\frac{-1}{5^2}$, $\frac{1}{5^3}$, $\frac{-1}{5^4}$; ② 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{2^2}{5}$, $\frac{2^3}{7}$;
③ $\frac{2^2}{2}$, $\frac{2^4}{2\cdot4}$, $\frac{2^6}{2\cdot4\cdot6}$, $\frac{2^8}{2\cdot4\cdot6\cdot8}$.】

5［**例**］$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots$,

按下列要求分别将此级数改变成新级数:

① 依次取级数的偶次项;

② 依次取级数的奇次项;

③ 级数的奇次项不变,偶次项均改为零;

④ 删去级数的前四项。

解　① $-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\cdots-\frac{1}{2^{2n-1}}-\cdots$;

② $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+$ ____ $+\cdots$;

③ $1+0+\frac{1}{4}+0+\cdots+$ ____ $+\cdots$;

④ $\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+3}}+\cdots$;

【答案　② $\frac{1}{2^{2n}}$; ③ $\frac{1+(-1)^{n-1}}{2^n}$.】

6［练］ $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots+\frac{n}{3^n}+\cdots$,

按下列要求分别将此级数改变成新级数：

① 删去级数的前三项；

② 依次取级数的奇次项；

③ 依次取级数的偶次项。

【答案 ① $\frac{4}{3^4}+\frac{5}{3^5}+\cdots+\frac{n+3}{3^{n+3}}+\cdots$； ② $\frac{1}{3}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{2n-1}{3^{2n-1}}+\cdots$； ③ $\frac{2}{3^2}+\frac{4}{3^4}+\cdots+\frac{2n}{3^{2n}}+\cdots$。】

§1.1.2 级数的收敛与发散

级数收敛与发散概念的引出

7［引］ 至此，虽然给出了数项级数的定义，但是它仅仅指出了级数的形式，并未告诉级数的含义是什么。例如，级数

$$1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}+\cdots.$$

有人用下面方法求解，你认为对吗？为什么？

令 $S=1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}+\cdots$,

则 $S=1+2(1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}+\cdots)$,

即 $S=1+2S$, $\therefore$ $S=-1$.

【答案 这一结果不合情理。无穷多个正数“相加”，怎么会得出其“和”为负数呢?! 这一解法有错，错在一开头“令 $S=\cdots$”，这默认了这一无穷多项“相加”必有“和”，盲目地搬用“有限项相加必有和”的性质。】

8［引］ 承上题，上述解法不对，怎么办呢？我们不妨来看此级数的前各项之和的情况：

$S_1=1$, $S_2=1+2=3$, $S_3=1+2+4=7$, ……,

$S_n=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

可知 $\{S_n\}$ 是严格单调____且(无 有)上界，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$

(存在 不存在),我们自然认为这一级数(没有 有)和。

【答案 增加;无;不存在;没有.】

9 [引] 在《微积分程序教程》第二章数列极限中,曾引《庄子·天下篇》中公孙龙学派提出"一尺之棰,日取其半,万世不竭"的说法(这是我国微积分思想的最早萌芽)。意思是说:有一尺长的木棰,第一天取棰长之半即$\frac{1}{2}$(尺),第二天取留下棰长之半即$\frac{1}{2^2}$(尺),第三天又取其留下棰长之半即__(尺),依此类推,则留下来的棰长构成一个递缩等比数列{__}。

我们把这个问题引伸一下:

第一天截去棰长$l_1=\frac{1}{2}$,

前二天共截去棰的总长$l_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$,

前三天共截去棰的总长$l_3=$ ________ $=\frac{7}{8}$,

……………………………………………

前十天共截去棰的总长$l_{10}=$ ________ $=\frac{1023}{1024}$,

……………………………………………

一般讲,前n天共截去棰的总长l_n,有

$$l_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}.$$

可以看出,不管n多大,其和l_n总是小于1;但随着n的无限增大,l_n无限趋向于____。这就启发人们把无穷数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$的前$n$项之和$l_n$当$n$无限增大时的极限作为无穷数列之和$S$:

$$l=\lim_{n\to\infty}l_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right),$$

即 $$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1.$$

导出这一等式恰好说明：一尺长的木棰，若每天取其余下的一半，并设想无限地取下去，同时又把每天取下来的木棰无限累加，就拼成总长仍为一尺的木棰。

撇开上述问题的实际意义，就可以得出一般数项级数收敛与发散的概念。

【答案 $\frac{1}{2^3}$；$\frac{1}{2^n}$；$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}$；$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}$；1.】

级数收敛与发散定义

10［正］ 定义 级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

作它的前 n 项之和 S_n（或称部分和）

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,$$

得到另一个数列 $\{S_n\}$：S_1, S_2, …, S_n, …。

如果当 $n\to\infty$ 时，$\{S_n\}$ 的极限存在且等于 S，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$（唯一确定的有限值），就称级数是收敛的，并称 S 为级数的和，写为

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=S.$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在（无穷或不确定），就称级数是发散的。发散级数是没有和的。

11［注］ ① 要把级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与数列 $\{u_n\}$ 及数列 $\{S_n\}$ 分辨清楚；

② 要把无穷级数的和与过去所学"有限项的和"区分开来．这从意义、存在性以及性质（下节将学到）等均可看出。

预备知识——求级数的部分和 S_n

12［引］ 级数的收敛、发散定义本身提供了判别级数敛散

性的一个方法——判别数列 $\{S_n\}$ 极限的存在性．因此，如何求出级数的部分和 S_n，成为判别级数敛散性的突破点．我们通过一些具体例子来概括出一些求 S_n 的方法．

13［例］ 求出与下列级数相应的部分和

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$； ② $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$；

③ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$．

解 ①
$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\underline{\qquad};$$

②
$$S_n=\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\underline{\qquad\qquad}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right);$$

③
$$S_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$
$$=\underline{\qquad\qquad}.$$

【答案 ① $1-\dfrac{1}{n+1}$； ② $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2}\right)$；