数列与极限

刘　文编

上海教育出版社

内 容 提 要

本书计分两部分．第一部分，阐述了等差数列、高阶等差数列、等比数列以及线性递归数列的通项、有关性质、求和方法，并概要介绍了初等数学中常见的各种类型的数列求和问题．第二部分，阐述了数列的极限理论，包括数列极限的概念、性质、运算律以及极限存在的判定准则．本书可供中学数学教师教学和业务进修参考，也可供中学生课外阅读．

数 列 与 极 限

刘　文 编

上海教育出版社出版

（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　上海崇明印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 3.125　字数 67,000

1979 年 12 月第 1 版　1979 年 12 月第 1 次印刷

印数 1--50,000 本

统一书号：7150·2213　　定价：0.23 元

目　录

一、数　列

1. 数列的概念

按照一定次序排列的一连串的数，叫做数列．例如：

1）把自然数的倒数按由大到小的次序排列起来，就得到

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots.$$

2）把 -1 的 1 次幂，2 次幂，3 次幂，… 依次排列起来，就得到

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots.$$

3）把 30 的正因数按从小到大的次序排列起来，就得到

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30.$$

4）把全体素数按由小到大的次序排列出来，就得到

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ \cdots.$$

5）把数 1 重复排列出来，就得到

$$1,\ 1,\ 1,\ \cdots.$$

对于一个数列，在这一串数中，其中的每一个数叫做该数列的项．并且，给数列的项编上次序：在第 1 个位置上的数叫做数列的第 1 项，第 2 个位置上的数叫做数列的第 2 项，……．在第 n 个位置上的数叫做数列的第 n 项．在一个数列中，项数一经确定，这一位置上的数就应完全确定了．

数列的第 n 项用附有下标（表示项数）的字母（如 a_n）来表示．当 $n=1$ 时，a_1 就表示数列的第 1 项；$n=2$ 时，a_2 就表示

数列的第 2 项,……于是,数列的一般形式是

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

并且,整个数列可简记成 $\{a_n\}$.

现在来考虑数列的分类:

如果按照项的个数来分,对于一个数列,如果在某一项的后面不再有任何项,这个数列就叫做有穷数列;如果在任何一项的后面都有跟随着的项,这个数列就叫做无穷数列. 在上述例子中,数列 3) 是有穷数列,其它几个数列都是无穷数列.

如果按照项与项之间的大小关系来分,对于一个数列,如果从第 2 项起,每一项都不小于它的前面的一项(即 $a_{n+1}\geqslant a_n$),这样的数列就叫做递增数列;如果从第 2 项起,每一项都不大于它前面的一项(即 $a_{n+1}\leqslant a_n$),这样的数列就叫做递减数列.

在上述例子中, 3)、4)、5) 是递增数列,而 1)、5) 则是递减数列.

递增数列和递减数列又统称为单调数列. 除了单调数列外,对于一个数列,如果从第 2 项起,有些项大于它的前一项,有些项却小于它的前一项,这样的数列就叫做摆动数列;如果一个数列的每一项都相等,这数列就叫做常数列.

例如,在上面的例子中, 2) 是摆动数列, 5) 是常数列.

对于一个数列, 如果每一项的绝对值都小于某一个正数(即 $|a_n|<M$, 这里 M 是某一正实数),这个数列就叫做有界数列;假定不存在这样的正数,这种数列便叫做无界数列.

例如,在上面的例子中,数列 4) 是无界数列,其余数列都是有界数列.

怎样来表示一个数列呢?

在前述例子中,写出一个数列的各项的构成方法,固然可以表示一个数列,但是,这样做未免太麻烦,而且对稍复杂一

些的数列，将难以表达清楚. 为此，我们来寻求通过式子来表示一个数列的方法.

首先使我们想到的是，假如可以建立一个由项数 n 来确定 a_n 的公式，就可通过一个简单公式表示出一个数列的一切项了. 例如，前述数列 1)，即自然数的倒数按由大到小的次序排列起来而形成的数列:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots$$

注意到

$$a_1=1,\quad a_2=\frac{1}{2},\quad a_3=\frac{1}{3},\ \cdots$$

就可通过归纳，得出该数列的第 n 项的一个公式

$$a_n=\frac{1}{n}.$$

这种用项数 n 来表示该数列的相应的项的公式，称为数列的通项公式.

对于一个数列，它的通项公式

$$a_n=f(n),$$

可看成是自变量 n 取自然数值的函数，这种函数称为整标函数.

有了通项公式，就可以根据项数 n 来求得该数列的任意一个项，这就可以用通项公式来表示一个数列了. 我们把通项公式为 $f(n)$ 的数列记成 $\{f(n)\}$. 例如，前述例子中，数列 1)、2)、5)，可以运用通项公式分别简记为

$$\left\{\frac{1}{n}\right\},\ \{(-1)^n\},\ \{1\}.$$

对于一个数列，怎样来求得它的通项公式呢?

对于任何有穷数列，都可以写出它的通项公式. 例如，设

$$a_1,\ a_2,\ a_3$$

是由三项组成的数列，不难验证

$$a_n=a_1\frac{(n-2)(n-3)}{(1-2)(1-3)}+a_2\frac{(n-1)(n-3)}{(2-1)(2-3)}+a_3\frac{(n-1)(n-2)}{(3-1)(3-2)}$$

是它的通项公式．容易看出，这种构造通项公式的方法，可以推广到任意有穷数列的情况．对于一个具有 n 个项的数列，运用这种方法得到的通项公式将是一个 $n-1$ 次多项式．当然，对于某些特殊数列，根据各项出现的规律，有可能写出简单的通项公式．

对于无穷数列，问题要复杂一点．

首先，并非对所有的无穷数列都能写出它的通项公式．例如，对于数列 4)，人们至今无法写出它的通项公式．

对于一个无穷数列，如果已经知道了这个数列的各项的构成方法，如果其中仅涉及初等运算，我们是可以求出这个数列的通项公式的．而如果仅仅知道一个数列的前几项，尽管可以运用归纳的方法写出它的一个通项公式，但答案可能不是唯一的．例如下述数列：

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \cdots$$

注意到该数列中从第二项起，后一项减去前一项的差都是 3，所以可以认为这个数列的通项公式是

$$a_n=1+3(n-1).$$

但是，也可以写出另一些通项公式，使得以这个通项公式确定的数列的前 4 项也是 1, 4, 7, 10．例如，令

$$a'_n=1+3(n-1)+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4),$$

容易验证，

$$a'_1=1,\ a'_2=4,\ a'_3=7,\ a'_4=10.$$

当 $n>4$ 时，应用公式 a_n 和 a'_n 算出的结果就不同了，例如

$$a_5=1+3(5-1)=13,$$
$$a'_5=1+3(5-1)+(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)$$
$$=37.$$
这就表明,仅给出一个无穷数列的前有限项,并不足以确定这个数列. 通常,对于这种已知数列的前几项而要写出通项公式的问题,尽管答案不唯一,只要符合题设条件,都应该说是正确的. 当然,应该善于发现规律性,写出一个比较简单的通项公式.

[例 1] 写出数列

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots$$

的一个通项公式.

解 在这个数列中,1 与 0 交错地出现. 我们知道,当 n 取正整数值时,$(-1)^{n+1}$ 交错地取值 1 与 -1,因此 $1+(-1)^{n+1}$ 交错地取值 2 与 0,于是得出所求数列的通项公式可以是

$$a_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}.$$

除了用通项公式表示一个数列外,还可以采用递归的方法来表示一个数列. 如果有一组递推公式,例如:

$$a_1=2,$$
$$a_2=3,$$
$$a_{i+2}=3a_{i+1}-2a_i \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

我们便可依次算出

$$a_3=3a_2-2a_1=3\times3-2\times2=5,$$
$$a_4=3a_3-2a_2=3\times5-2\times3=9,$$
$$\vdots$$

因此,采用一组递推公式,同样可以表示一个数列.

一般地，用递推公式：

$$a_1=\alpha_1,\ a_2=\alpha_2,\ \cdots,\ a_r=\alpha_r,$$

$$a_{i+r}=f(a_i,\ a_{i+1},\ \cdots,\ a_{i+r-1})\quad(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

表示的数列，叫做递归数列．其中，r 元函数 f 称为这一数列的定义函数，α_1，$\cdots$，α_r 叫做初始值，r 叫做这一递归数列的阶数．

当 f 是一线性函数时，即 $a_{i+r}=c_1a_i+c_2a_{i+1}+\cdots+c_ra_{i+r-1}$，则称这一递归数列为线性递归数列．

［例 2］　菲波那契数列是指：

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \cdots$$

从第 3 项起，它的每一项等于它的前两项之和．写出菲波那契数列的递归表示式．

解　根据菲波那契数列的各项的构成方法，可把这一数列采用递归方法表示如下：

$$a_1=1,$$

$$a_2=1,$$

$$a_{i+2}=a_{i+1}+a_i.\quad(i=1,\ 2,\ \cdots)$$

例 2 表明：菲波那契数列是二阶线性递归数列．

对于递归数列，能不能改用通项来表示呢？

对于线性递归数列，求其通项是有一般方法可循的．下面以二阶线性递归数列为例来加以说明．设其定义函数为 $p_1a_{n+1}+p_2a_n$，其通项为 $f(n)$，则整标函数 $f(n)$ 应满足方程：

$$f(n+2)=p_1f(n+1)+p_2f(n).$$

可以证明：如果 $f_1(n)$、$f_2(n)$ 是上函数方程的解，则它们的线性组合 $f(n)=c_1f_1(n)+c_2f_2(n)$ 也是上函数方程的解（其中 c_1、c_2 为常数）；并且，可以求出形如 $f(n)=x^n$ 的特解，其中 x 由下法确定：以 $f(n)=x^n$ 代入原函数方程：

$$x^{n+2}=p_1x^{n+1}+p_2x^n,$$

即

$$x^2-p_1x-p_2=0,$$

因此，只要 x 满足上代数方程(称为该递归数列的特征方程)即可．设 x_1 和 x_2 为上述特征方程的两个根，且 $x_1\neq x_2$，则原函数方程的一般解可写成❶

$$f(n)=c_1x_1^n+c_2x_2^n,$$

其中系数 c_1、c_2 由初始条件确定．

例如，由例 2 知，菲波那契数列的特征方程为

$$x^2-x-1=0,$$

它的解为

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

故满足递推公式 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ 的整标函数为

$$f(n)=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

由初始条件：$a_1=1$，$a_2=1$，即有

$$f(1)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}c_1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}c_2=1,$$

$$f(2)=(3+\sqrt{5})c_1+(3-\sqrt{5})c_2=1.$$

可从中解出

$$c_1=-c_2=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

所以菲波那契数列的通项公式为

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

---

❶ 如果特征方程取得重根，情况将有所不同．

[例 3]　求如下线性递归数列的通项公式：

$$a_1=2,\ a_2=3,$$

$$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n.$$

解　解该线性递归数列的特征方程：

$$x^2-3x+2=0$$

得 $x_1=1$, $x_2=2$. 故得：

$$a_n=c_1+c_2 2^n.$$

以初始条件代入，即令 $n=1,\ 2$，得

$$c_1+2c_2=2,$$

$$c_1+4c_2=3.$$

可从中解出 $c_1=1$, $c_2=\frac{1}{2}$. 所以，所求通项公式为

$$a_n=1+2^{n-1}.$$

不难知道，上述求二阶线性递归数列的通项的方法，可以推广到 r 阶线性递归数列，只是相应的特征方程为一元 r 次代数方程 $x^r-p_1x^{r-1}-\cdots-p_{r-1}x-p_r=0$.

2. 等 差 数 列

如果一个数列，从第二项起，每一项减去它前一项所得的差都等于一个常数，这个数列就叫做等差数列. 这个常数叫做这个等差数列的公差，通常用字母 d 表示.

例如，等差数列

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ \cdots,$$

$$3,\ 1,\ -1,\ -3,\ -5,\ \cdots$$

的公差分别为 3 和 -2. 运用递推公式，可把这两数列分别表示成

$$a_1=2,\ a_2=5,$$
$$a_{i+2}=a_{i+1}+(a_{i+1}-a_i)=2a_{i+1}-a_i;$$
$$b_1=3,\ b_2=1,$$
$$b_{i+2}=2b_{i+1}-b_i;$$

其中 $i=1, 2, \cdots$. 一般地，首项为 α，公差为 $d=\beta-\alpha$ 的等差数列可表示成：

$$a_1=\alpha,\ a_2=\beta,$$
$$a_{i+2}=2a_{i+1}-a_i.\quad (i=1,\ 2,\ \cdots)$$

所以，等差数列是二阶递归数列，它的定义函数为

$$f(a_i,\ a_{i+1})=2a_{i+1}-a_i.$$

根据以上定义，对于等差数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots$$

有

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

依此类推，就得到等差数列的通项公式：

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

有了通项公式，就可以采用通项公式表示一个等差数列：

$$\{a_1+(n-1)d\}.$$

易知，三数 $a,\ b,\ c$ 成等差数列的充要条件是

$$2b=a+c.$$

此时，称 b 为 a、c 的等差中项.

［例 1］ 在 a、b 之间插入 n 个数，使它们和原来两数成等差数列.

解 在 a、b 之间插入 n 个数而形成的等差数列中，首项

是 a，而第 $n+2$ 项即是 b. 代入等差数列的通项公式，得:

$$b=a+(n+1)d.$$

可从中解出 d:

$$d=\frac{b-a}{n+1}.$$

于是，所求的 n 个数是

$$\frac{b-a}{n+1},\ \frac{2(b-a)}{n+1},\ \cdots,\ \frac{n(b-a)}{n+1}.$$

例 1 告诉我们，运用等差数列的通项公式，如果在 a_1, a_n, n, d 四个量中已知三个量，即可求出第四个量，并可求出数列的一切项. 在解这一类型题目时(即不涉及数列的求和)，往往先解出公差 d 是个关键.

[例 2] 设 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 是某等差数列中的两个项，试证明此数列中的任一项都不是有理数.

证明 用反证法. 设 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$ 与有理数 a，分别为首项为 a_1，公差为 d 的等差数列中的第 l、m、n 项，即

$$\sqrt{2}=a_1+(l-1)d,$$

$$\sqrt{3}=a_1+(m-1)d,$$

$$a=a_1+(n-1)d.$$

从上三式中消去 a_1、d，即有:

$$\frac{\sqrt{3}-a}{m-n}=\frac{\sqrt{2}-a}{l-n}.$$

因为 a 是有理数，故由上式有

$$\sqrt{3}=r_1\sqrt{2}+r_2,$$

其中 r_1、r_2 是有理数. 两边平方，得

$$3=2r_1^2+2r_1r_2\sqrt{2}+r_2^2,$$

于是

$$\sqrt{2}=\frac{3-2r_1^2-r_2^2}{2r_1r_2}.$$

上式中，右端为有理数，左端为无理数，这就产生了矛盾．由此即证得了此数列的任一项都不是有理数．

［例 3］ 设正数 a_1, a_2, $\cdots$, a_{n+1} 成等差数列，证明

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$$

$$=\frac{n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{n+1}}}.$$

证明 设公差为 d，则

$$\frac{a_{n+1}-a_1}{n}=d.$$

从而有

$$\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}=\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{d}.$$

所以：

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$$

$$=\frac{1}{d}[(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})$$

$$+\cdots+(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})]$$

$$=\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_1}}{d}=(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_1})\left(\frac{a_{n+1}-a_1}{n}\right)^{-1}$$

$$=\frac{n(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_1})(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_1})}{(a_{n+1}-a_1)(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_1})}$$

$$=\frac{n}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_1}}.$$

［例 4］ 设 x、y、z 成等差数列，证明

$$y^2+yz+z^2、z^2+zx+x^2、x^2+xy+y^2$$

也成等差数列.

证明 由假设 x、y、z 三数成等差数列，即有

$$2y=x+z,$$

于是

$$\begin{aligned}&(y^2+yz+z^2)+(x^2+xy+y^2)\\&=\frac{1}{2}\left[4y^2+2y(x+z)+2x^2+2z^2\right]\\&=\frac{1}{2}\left[(x+z)^2+(x+z)^2+2x^2+2z^2\right]\\&=2(z^2+zx+x^2),\end{aligned}$$

这就证得了 y^2+yz+z^2、z^2+zx+x^2、x^2+xy+y^2 也成等差数列.

［例 5］ 设 p 个素数 $a_1, a_2, \cdots, a_p$ 构成递增等差数列，且 $a_1>p$. 证明：如果 p 为素数，则公差 d 能被 p 整除.

证明 因为 $a_1, a_2, \cdots, a_p$ 都是素数，且都大于 p，故其中任一数都不能被 p 整除. 而 $a_1, a_2, \cdots, a_p$ 被 p 除时只能取 $p-1$ 个不同的余数，根据抽屉原则，至少有两个数被 p 除得的余数相同，设这两个数为 a_i 与 a_j $(i>j)$，于是

$$a_i-a_j=(i-j)d$$

能被 p 整除. 但 $0<i-j<p$ 且 p 为素数，故 d 能被 p 整除.

下面我们来推导等差数列的求和公式.

设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和，即

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

显然，也可以将 S_n 写为

$$S_n=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1.$$

而数列 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1$ 可看成是首项为 a_n，公差为 $-d$ 的等差数列.

根据等差数列的通项公式，可将上两式写为:

$$S_n=a_1+(a_1+d)+\cdots+[a_1+(n-1)d];$$
$$S_n=a_n+(a_n-d)+\cdots+[a_n-(n-1)d].$$

把以上两式相加，得

$$\begin{aligned}2S_n&=(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)\\&=n(a_1+a_n).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.$$

以等差数列的通项公式代入上式，则求和公式可写成另一形式:

$$S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d].$$

为了书写方便，我们常用希腊字母 Σ（读作“西格马”）表示求和. 例如，前 10 个自然数的和可表示为

$$1+2+3+\cdots+10=\sum_{k=1}^{10}k.$$

一般地，设 a_k 是某数列的通项，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 表示这个数列的第 1 项一直加到第 n 项的和，$\sum\limits_{k=2}^{n}a_k$ 表示从第 2 项起，一直加到第 n 项的和. 即

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$
$$\sum_{k=2}^{n}a_k=a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

依此类推.

于是，等差数列的求和公式可以写为

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1+a_n)}{2},$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} [a+(k-1)d] = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d].$$

因为通项公式以及两个求和公式实际上给出了关于 a、d、n、a_n、s_n 的两组独立的条件．因此，如已知这五个量中的三个，就可以由这三个公式求出另外两个量．由组合公式知，共有 $C_5^3=10$ 种这类型的题目，例如：

1．已知 a_1、d、n，则

$$a_n = a_1+(n-1)d,$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d].$$

2．已知 a_1、d、a_n，则

$$n = \frac{a_n-a_1}{d}+1, \quad S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}.$$

3．已知 a_1、d、S_n，则

$$n = \frac{d-2a_1 \pm \sqrt{(2a_1-d)^2+8dS_n}}{2d},$$

$$a_n = a_1+(n-1)d.$$

4．已知 a_1、n、a_n，则

$$d = \frac{a_n-a_1}{n-1}, \quad S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}.$$

5．已知 a_1、n、S_n，则

$$d = \frac{2(S_n-na_1)}{n(n-1)}, \quad a_n = a_1+(n-1)d.$$

6．已知 a_1、a_n、S_n，则

$$n = \frac{2S_n}{a_1+a_n}, \quad d = \frac{a_n-a_1}{n-1}.$$