数学分析讲义练习题选解

刘玉琏 刘伟 刘宁 林玎 编

高等教育出版社

数学分析讲义
练习题选解

刘玉琏　刘伟　刘宁　林玎　编

高等教育出版社

（京）112号

内容提要

本书精选了刘玉琏、傅沛仁编写的《数学分析讲义》一半以上的习题作解答. 目的是通过分析解答所选题目教给学生分析问题和解决问题的方法，解答清晰、易懂，并对一些较难的习题给出了题前分析、详尽的解答步骤和题后注解. 为了切实地帮助初学者，还对某些典型的分析方法和技巧作了较详细的说明，文字精练、准确. 本书对正在学习数学分析的读者，特别是初学者以及对复习高等数学准备考研的读者都很有参考价值.

图书在版编目（CIP）数据

数学分析讲义练习题选解/刘玉琏编．—北京：高等教育出版社，1996（1998重印）
ISBN 7-04-005551-1

Ⅰ. 数… Ⅱ. 刘… Ⅲ. 数学分析-解题-高等学校-教材
Ⅳ. O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字（95）第20511号

*

高等教育出版社出版
北京沙滩后街55号
邮政编码：100009 传真：64014048 电话：64054588
新华书店总店北京发行所发行
北京联华印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 15.75 字数 400 000
1996年5月第1版 1998年3月第3次印刷
印数 17 574—25 583
定价 15.00元

前言

应广大读者要求，我们编写了这本《数学分析讲义练习题选解》（以下简称《选解》）．据悉使用刘玉琏、傅沛仁编《数学分析讲义》（第三版）作为教材的学校有高师本科院校、高师专科学校、高师函授院校和教育学院等．为了帮助广大专科学生学习，这本《选解》适当多选入一些练习题予以解答：证明题多数给出解答，计算题只给出奇数号码或偶数号码题的解答，甚至只选个别繁难题作答．每题的解答力求思路清晰、叙述完整、行文规范、详明易懂．

读者一定要正确地使用这本《选解》，那就是做题时要"先做后看"，力求"做完再看"．一般说来，学生做题总会遇到这样或那样的问题和困难，这时需要开动脑筋、回忆联想、多方探索、寻求解法，力争独立完成．这是提高解题能力不可缺少的思维训练过程．只有经过认真思考，仍百思不得其解时，才参看《选解》．否则，"先看后做"或"边看边做"都不会取得好的学习效果．请读者切记．

本书由刘伟编写第一、二、四、五、六章，林玎编写第三、七、八、九章，刘宁编写第十、十一、十二、十三、十四章．最后由刘玉琏审核、修改、定稿．

本书在编写过程中，始终得到高等教育出版社文小西副编审的亲切关怀和具体指导．本书稿承蒙中国人民警官大学强文久同志和本书的责任编辑徐可同志精心审改，纠正了一些错漏和个别科学性的错误，并提出宝贵的修改意见和建议．他们为提高书稿质量付出了辛勤的劳动．在此对他们表示衷心感谢．

由于编者水平有限和缺少编写《选解》的经验，本书定会有一些缺点和错误，恳请广大读者和老师们批评指正．

编者

1994 年 10 月 1 日

于长春东北师大数学系

目　录

第一章 函 数

练习题 1.1

（《讲义》[①]上册，第 10 页）

5. 确定下列函数的定义域：

(5) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$.

解 要求 $|x|-x\neq 0$ 或 $|x|\neq x$，即 $x<0$. 于是，函数的定义域是开区间 $(-\infty,0)$.

(6) $y=\ln(2x+1)+\sqrt{4-3x}$.

解 要求 $2x+1>0$，同时 $4-3x\geqslant 0$，或 $-\dfrac{1}{2}<x$，同时 $x\leqslant\dfrac{4}{3}$. 于是，函数的定义域是区间 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3}\right]$.

(7) $y=\ln\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

解 要求 $\sin\dfrac{\pi}{x}>0$ 或 $\forall\ k\in\mathbf{Z}$，$2k\pi<\dfrac{\pi}{x}<(2k+1)\pi$，即 $\forall\ k\in\mathbf{Z}-\{0\}$，$\dfrac{1}{2k+1}<x<\dfrac{1}{2k}$；当 $k=0$ 时是区间 $(1,+\infty)$. 于是，函数的定义域是无限多个区间：

$$\left(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2k}\right),k\in\mathbf{Z}-\{0\}\text{ 与}(1,+\infty).$$

(10) $y=\sqrt{\cos x}$.

---

① 《讲义》是指刘玉琏、傅沛仁编《数学分析讲义》(第三版)，下同.

解 要求 $\cos x \geqslant 0$，即 $\forall\ k \in \mathbf{Z}, 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{2}$. 于是，函数的定义域是无限多个区间：$\forall\ k \in \mathbf{Z}, \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$.

6. 正方形的周长集合 L 与其面积集合 A 之间的对应是否是函数？三角形的周长集合 l 与其面积集合 S 之间的对应是否是函数？为什么？

解 因为正方形的周长为 $a \in L\left(\text{每个边长为}\frac{a}{4}\right)$时，所对应的面积 $P=\left(\frac{a}{4}\right)^2 \in A$ 是唯一的，所以这个对应关系是函数.

因为三角形的周长为 $r \in l$（设三角形的三边之长分别是 a,b,c，即 $a+b+c=r$）时，所对应的面积 $Q=\sqrt{\frac{r}{2}\left(\frac{r}{2}-a\right)\left(\frac{r}{2}-b\right)\left(\frac{r}{2}-c\right)} \in S$ 不是唯一的（与 a,b,c 有关），所以这个对应关系不是函数.

10. 证明：若 $\varphi(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$，则 $\varphi(a)+\varphi(b)=\varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

证 由 $\varphi(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$ 知，$\varphi(x)$ 的定义域为 $|x|<1$. 所以，当 $|a|<1, |b|<1$ 时，有

$$\varphi(a)+\varphi(b)=\ln\frac{1-a}{1+a}+\ln\frac{1-b}{1+b}$$

$$=\ln\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}$$

$$=\ln\frac{1-a-b+ab}{1+a+b+ab}$$

$$=\ln\frac{1-\dfrac{a+b}{1+ab}}{1+\dfrac{a+b}{1+ab}}$$

$$=\varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right).$$

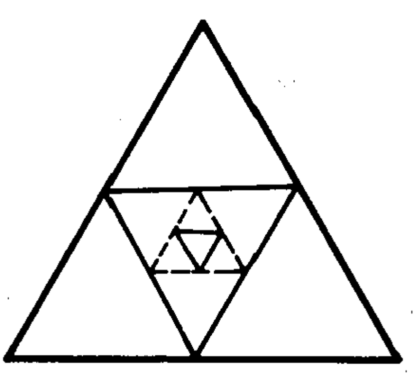

图 1.a

11. 如果等边三角形的面积为1，联结这个三角形各边中点得到一个小三角形，又联结这个小三角形的各边中点得到一个更小的三角形，如此无限继续下去，求出这些三角形面积的数列.

解 设原等边三角形的面积为 $\Delta_1=1$，如图 1. a. 联结各边中点所得的小三角形的面积 Δ_2 是原三角形面积 $\Delta_1=1$ 的$\frac{1}{4}$，即 $\Delta_2=\frac{1}{4}$. 同理，再联结这个小三角形各边中点得到的更小的三角形的面积 $\Delta_3=\frac{1}{4^2}$，如此无限继续下去，于是，这些三角形的面积数列是

$$\left\{\frac{1}{4^{n-1}}\right\}:1,\frac{1}{4},\frac{1}{4^2},\cdots,\frac{1}{4^{n-1}},\cdots.$$

14. 证明：若数列$\{a_n\}$是等比数列，且 $a_n>0$，$n=1,2,\cdots$，则数列$\{\ln a_n\}$是等差数列.

证 已知$\{a_n\}$是等比数列，设$\forall\ n\in\mathbf{N}$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$（a 为公比，是正常数），有

$$\ln a_{n+1}-\ln a_n=\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ln a(\text{常数}),$$

即$\{\ln a_n\}$是公差为 $\ln a$ 的等差数列.

15. 已知函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$的图象（在区间$[a,b]$上可随意画一条曲线，有的点函数值是正，有的点函数值是负），描绘下列函数的图象：

(1) $y_1=|f(x)|$.

解 $$y_1=|f(x)|=\begin{cases}f(x), & \text{当 } f(x)\geqslant 0,\\ -f(x), & \text{当 } f(x)<0,\end{cases}$$

其图象是图 1. b 的虚线.

(2) $y_2=\frac{1}{2}\{f(x)+|f(x)|\}$.

解 $y_2=\frac{1}{2}\{f(x)+|f(x)|\}=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{0,f(x)\}$，其图象是图 1. c 的虚线.

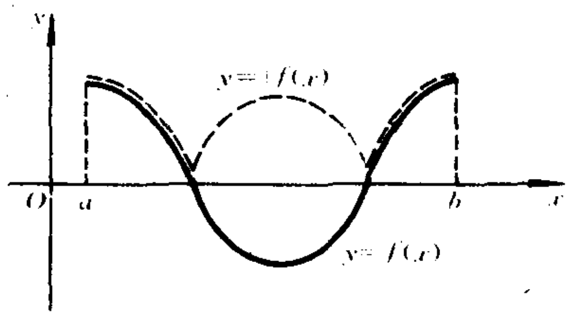

图 1.b

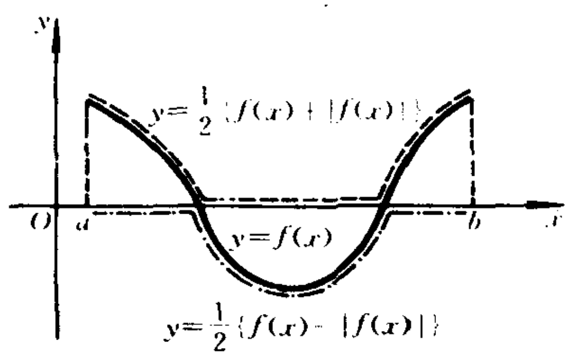

图 1.c

(3) $y_3=\frac{1}{2}\{f(x)-|f(x)|\}$.

解 $y_3=\frac{1}{2}\{f(x)-|f(x)|\}=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{0,f(x)\}$，其图象是图 1.$c$ 的点画线.

16. 已知函数 $y_1=f(x)$、$y_2=g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的图象（在区间 $[a,b]$ 上可随意画两条曲线，使其相交），描绘下列函数的图象：

(1) $y=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}$.

解 $y=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x),g(x)\}$，其图象是图 1.$d$ 的虚线.

(2) $y=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\}$.

解 $y=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\}=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x),g(x)\}$，其图象是图 1.$d$ 的点画线.

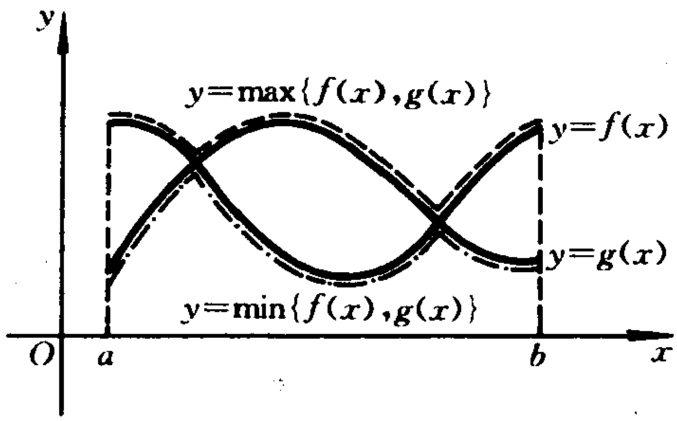

图 1.d

练习题 1.2

（《讲义》上册，第 20 页）

1. 证明：若函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在数集 A 有界，则函数 $f(x)+\varphi(x)$，$f(x)-\varphi(x)$，$f(x)\varphi(x)$ 在数集 A 也有界.

证 已知 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在 A 有界，即 $\exists\ M>0, \forall\ x\in A$，有

$$|f(x)|\leqslant M \text{ 与 } |\varphi(x)|\leqslant M.$$

于是，$\quad |f(x)+\varphi(x)|\leqslant|f(x)|+|\varphi(x)|\leqslant M+M=2M,$

即 $f(x)+\varphi(x)$ 在 A 有界.

同法可证，$f(x)-\varphi(x)$ 与 $f(x)\varphi(x)$ 在 A 也有界.

4. 指出下列函数哪些是奇函数？哪些是偶函数？

(6) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 是奇函数. 事实上，

$$\ln\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)=\ln\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

(7) $\ln\frac{1-x}{1+x}$.

解 是奇函数. 事实上,

$$\ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\ln\frac{1+x}{1-x}=-\ln\frac{1-x}{1+x}.$$

5. 证明:函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 无界.

证 $\forall\, b>1$,要找到 $x_b\in(0,1)$,使不等式 $\frac{1}{x_b}>b$ 成立. 从不等式 $\frac{1}{x_b}>b$ 解得 $x_b<\frac{1}{b}$. 于是,

$$\forall\, b>1,\exists\, x_b\in(0,1)\left(x_b<\frac{1}{b}\right),使\ f(x_b)=\frac{1}{x_b}>b,$$

即 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 无上界,从而 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 无界.

6. 判断下列函数哪个是周期函数,若有最小的正周期,并指出最小的正周期:

(1) $y=\sin^2 x$.

解 $y=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ 是周期函数. 已知 $\cos 2x$ 的最小正周期是 π. $\forall\, x\in\mathbf{R}$,有

$$\begin{aligned}\sin^2(x\pm\pi)&=\frac{1}{2}[1-\cos 2(x\pm\pi)]\\&=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\sin^2 x.\end{aligned}$$

于是,$\sin^2 x$ 的最小正周期是 π.

(2) $y=\sin x^2$.

解 $y=\sin x^2$ 不是周期函数.

用反证法. 假设 $y=\sin x^2$ 是周期函数,设其周期是 $T>0$,则 $\forall\, x\in\mathbf{R}$,有

$$\sin(x+T)^2=\sin x^2.$$

令 $x=0$,有 $\sin T^2=\sin 0=0$,则 $\exists\, n_0\in\mathbf{N}$,使 $T^2=n_0\pi$.

再令 $x=\sqrt{2}\,T$(为什么这样令? 见下面的证明),有

$$\sin[(\sqrt{2}+1)T]^2=\sin 2T^2=\sin 2n_0\pi=0,$$

则$\exists\ m_0\in\mathbf{N}$,使$\left[\left(\sqrt{2}+1\right)T\right]^2=m_0\pi$或.

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^2=\frac{m_0\pi}{T^2}=\frac{m_0\pi}{n_0\pi}=\frac{m_0}{n_0}.$$

上式等号左端$\left(\sqrt{2}+1\right)^2$是无理数,而右端$\frac{m_0}{n_0}$是有理数,矛盾.于是,$y=\sin x^2$不是周期函数.

(6) $y=D(x)$(狄利克雷函数).

解 $y=D(x)$(狄利克雷函数)是周期函数.

事实上,对任意正有理数r,$\forall\ x\in\mathbf{R}$,有

$$D(x\pm r)=\left\{\begin{matrix}1,\text{当 } x \text{ 是有理数}\\0,\text{当 } x \text{ 是无理数}\end{matrix}\right\}=D(x).$$

于是,任意正有理数r都是$D(x)$的周期.因为正有理数集没有最小数,所以$D(x)$没有最小的正周期.

(8) $y=\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{5}$.

解 $y=\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{5}$是周期函数.已知$\sin\frac{x}{2}$与$\sin\frac{x}{5}$的最小正周期分别是$4\pi$与$10\pi$.而$4\pi$与$10\pi$的最小公倍数是$20\pi$.$\forall\ x\in\mathbf{R}$,有

$$\sin\frac{1}{2}(x\pm 20\pi)+\sin\frac{1}{5}(x\pm 20\pi)=\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{5}.$$

于是,它的最小正周期是20π.

8. 证明:函数$f(x)$在区间I单调$\Longleftrightarrow\forall\ x_1,x_2,x_3\in I$,且$x_1<x_2<x_3$,有

$$[f(x_3)-f(x_2)][f(x_2)-f(x_1)]\geqslant 0.$$

证 已知$f(x)$在I单调$\Longleftrightarrow\forall\ x_1,x_2,x_3\in I$,且$x_1<x_2<x_3$,

$$\left\{\begin{matrix}\text{若 } f(x) \text{ 在 } I \text{ 单调增加,有 } f(x_3)-f(x_2)\geqslant 0 \text{ 与 } f(x_2)-f(x_1)\geqslant 0,\\\text{若 } f(x) \text{ 在 } I \text{ 单调减少,有 } f(x_3)-f(x_2)\leqslant 0 \text{ 与 } f(x_2)-f(x_1)\leqslant 0.\end{matrix}\right\}$$

$\Longleftrightarrow\forall\ x_1,x_2,x_3\in I$,且$x_1<x_2<x_3$,$[f(x_3)-f(x_2)][f(x_2)-f(x_1)]$

$\geqslant 0$.

* * * *

9. 例举符合下列条件的函数：

(1) 在 $\mathbf{R}$ 严格减少的奇函数.

答 $f(x)=-x$ 是在 $\mathbf{R}$ 严格减少的奇函数(验证从略).

(2) 在 $\mathbf{R}$ 单调减少的偶函数.

答 常数函数 $f(x)=C$(常数)是在 $\mathbf{R}$ 单调减少的偶函数(易证).

(3) 在 $\mathbf{R}$ 是偶函数、周期函数，且不存在单调区间.

答 狄利克雷函数 $y=D(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 是偶函数、周期函数，且不存在单调区间(验证从略).

(4) 在 $\mathbf{R}$ 是奇函数、偶函数、单调函数、周期函数.

答 常数函数 $f(x)=0$ 在 $\mathbf{R}$ 是奇函数、偶函数、周期函数(易证).

10. 证明：在 $\mathbf{R}$ 不存在严格增加的偶函数.

证 用反证法. 假设在 $\mathbf{R}$ 存在某个严格增加的偶函数 $f(x)$，

$$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}，且\ 0<x_1<x_2(-x_2<-x_1).$$

由 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 严格增加，有 $f(x_1)<f(x_2)$ 与 $f(-x_2)<f(-x_1)$；

由 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 是偶函数，有 $f(x_1)=f(-x_1)$ 与 $f(x_2)=f(-x_2)$. 于是，

$$f(-x_1)=f(x_1)<f(x_2)=f(-x_2),$$

与 $f(-x_1)>f(-x_2)$ 矛盾. 所以在 $\mathbf{R}$ 不存在严格增加的偶函数.

11. 列表对比下列的定义及其否定叙述：

(1) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 是偶函数与不是偶函数.

答

偶函数	$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)=f(-x)$.
非偶函数	$\exists x_0\in\mathbf{R}，x_0\neq 0$，有 $f(x_0)\neq f(-x_0)$.

(2) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 是周期函数与不是周期函数.

答

周期函数	$\exists\ l>0, \forall\ x\in\mathbf{R}$，有 $f(x\pm l)=f(x)$.
非周期函数	$\forall\ l>0, \exists\ x_0\in\mathbf{R}$，有 $f(x_0+l)\neq f(x_0)$ 或 $f(x_0-l)\neq f(x_0)$.

(3) $f(x)$ 在 (a,b) 是严格增加函数与不是严格增加函数.

答

严格增加函数	$\forall\ x_1,x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$.
非严格增加函数	$\exists\ x_1,x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$.

14. 证明：若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是定义在 A 上的周期函数，周期分别是 T_1 与 T_2，且 $\frac{T_1}{T_2}=a$，a 是有理数，则 $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 都是 A 上的周期函数.

证 已知 a 是正有理数(因为周期 T_1 与 T_2 都是正数)，设

$$\frac{T_1}{T_2}=a=\frac{m}{n},n,m\in\mathbf{N},$$

或 $nT_1=mT_2$. 设 $l=nT_1=mT_2>0, \forall\ x\in A$，有

$$f(x\pm l)+g(x\pm l)=f(x\pm nT_1)+g(x\pm mT_2)=f(x)+g(x)$$

与 $$f(x\pm l)g(x\pm l)=f(x\pm nT_1)g(x\pm mT_2)=f(x)g(x),$$

即 $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 都是在 A 上的周期函数.

练习题 1.3

(《讲义》上册，第 31 页)

1. 指出下列函数在指定区间的反函数及其定义域：

(4) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$，a,b,c,d 是常数，且 $ad-bc\neq 0$.

解 已知 $ad-bc\neq 0$，则 a 与 c 不能同时为零.

若 $c=0$，$a\neq 0$，此时，$d\neq 0$，从方程 $y=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$ 解得 $x=\frac{d}{a}y-$

$\frac{b}{a}$. 于是，它的反函数是 $y=\frac{d}{a}x-\frac{b}{a}$，定义域是 $\mathbf{R}$；

若 $c\neq0$，从方程 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 解得 $x=\frac{b-dy}{cy-a}$.

于是，它的反函数是 $y=\frac{b-dx}{cx-a}$，定义域是 $\mathbf{R}-\left\{\frac{a}{c}\right\}$.

(5) $y=\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，$x\in\mathbf{R}$.

解 从方程 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 或 $e^{2x}-2ye^x-1=0$ 解得 $e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$（只能取正号）或 $x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$. 于是，它的反函数是 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，定义域是 $\mathbf{R}$.

(6)

$$y=\begin{cases}x, & x\in(-\infty,1),\\ x^2, & x\in[1,4],\\ 2^x, & x\in(4,+\infty).\end{cases}$$

解 当 $x\in(-\infty,1)$ 时，函数 $y=x$ 的反函数是 $x=y$，$y\in(-\infty,1)$

当 $x\in[1,4]$ 时，函数 $y=x^2$ 的反函数是 $x=\sqrt{y}$，$y\in[1,16]$.

当 $x\in(4,+\infty)$ 时，函数 $y=2^x$ 的反函数是 $x=\log_2 y$，$y\in(16,+\infty)$. 于是，它的反函数是：

$$y=\begin{cases}x, & x\in(-\infty,1),\\ \sqrt{x}, & x\in[1,16],\\ \log_2 x, & x\in(16,+\infty).\end{cases}$$

2. 证明：若函数 $y=\varphi(x)$ 在数集 A 严格减少，则函数 $y=\varphi(x)$ 存在反函数 $x=\varphi^{-1}(y)$，且反函数 $x=\varphi^{-1}(y)$ 在 $\varphi(A)$ 也严格减少.

证 首先证明 $\varphi(x)$ 存在反函数，即 $\forall\ y\in\varphi(A)$，按照关系 φ^{-1} 对应唯一一个 $x\in A$. 用反证法，假设 $\exists\ y_0\in\varphi(A)$，按照对应关系 φ^{-1} 至少对应两个 $x_1,x_2\in A$，且 $x_1\neq x_2$，使 $y_0=\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$. 这与函数 $y=\varphi(x)$ 严格减少矛盾. 于是，函数 $y=\varphi(x)$ 存在反函数 $x=$

$\varphi^{-1}(y), y\in\varphi(A)$.

其次证明:反函数 $x=\varphi^{-1}(y)$在 $\varphi(A)$严格减少.

$\forall\ y_1,y_2\in\varphi(A)$,且 $y_1<y_2$. 设 $\varphi^{-1}(y_1)=x_1$ 与 $\varphi^{-1}(y_2)=x_2$ 或 $y_1=\varphi(x_1)$ 与 $y_2=\varphi(x_2)$. 已知函数 $y=\varphi(x)$在 A 严格减少,有:

$$\varphi(x_1)=y_1<y_2=\varphi(x_2)\Longleftrightarrow x_1>x_2\Longleftrightarrow\varphi^{-1}(y_1)>\varphi^{-1}(y_2),$$

即反函数 $x=\varphi^{-1}(y)$在 A 严格减少.

5. 证明:若函数 $f(x),g(x),h(x)$都是单调增加的,且

$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$,则 $f[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[h(x)]$.

证 将已知不等式 $f(x)\leqslant g(x)$与 $g(x)\leqslant h(x)$的 x 分别替换为 $g(x)$与 $h(x)$,有

$$f[g(x)]\leqslant g[g(x)] \text{ 与 } g[h(x)]\leqslant h[h(x)].$$

又已知函数 $f(x)$与 $g(x)$都是单调增加的,有

$$f[f(x)]\leqslant f[g(x)] \text{ 与 } g[g(x)]\leqslant g[h(x)].$$

于是, $f[f(x)]\leqslant f[g(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant g[h(x)]\leqslant h[h(x)]$,

即 $$f[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[h(x)].$$

7. 设 $f(x)$是 x 的二次函数,且 $f(0)=1, f(x+1)-f(x)=2x$,求函数 $f(x)$.

解 设 $f(x)=ax^2+bx+c$(求函数 $f(x)$也就是求其系数 a,b,c).

已知 $f(0)=c=1$,从而 $f(x)=ax^2+bx+1$. 又已知

$$\begin{aligned}f(x+1)-f(x)&=a(x+1)^2+b(x+1)+1\\&\quad-(ax^2+bx+1)\\&=2ax+a+b=2x.\end{aligned}$$

上式是恒等式,等号两端的同次幂的系数必相等,有

$$2a=2 \text{ 与 } a+b=0,\text{解得 } a=1,b=-1.$$

于是,二次函数 $f(x)=x^2-x+1$.

8. 证明:$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$.

证 根据两个对应关系(函数)相等的定义,对任意 x,有