J1/1171/24

# 试论"1＋1"和素数家族

赵元民　著

黑龙江科学技术出版社

# 序　言

陈占元

赵元民同志多年来从事师范教育工作，为培养人民教师洒下汗水，曾荣获哈尔滨铁路局师资培训优秀教师称号。他在授课之余，不惜用尽剩余精力潜心研究数学，曾正式出版数学专著《函数逼近方法》，并为我国国防科研、油田开发科研导出有效的表达式，荣获黑龙江省优秀科技成果三等奖。近几年来，赵元民同志对素数问题又进行了精心的研究，根据研究结果整理撰写了《试论“1＋1”和素数家族》一书，蒙哈尔滨铁路局、黑龙江科学技术出版社的大力支持，得以出版问世，我代表民进黑龙江省委对此表示深深的谢意。

赵元民同志是我会会员，他热爱党，热爱祖国，热爱科学事业，虽已年近花甲，仍进取不息，一心为祖国争光，为中华民族争光，勇于攀登科学高峰，向世界性科学难题进军。他创造的新方法——网络分析法，用来分解大偶数，有效地将大偶数分解为两个奇素数之和，并试图证明这一结果的普遍性。我虽然治学物理，对于这样的世界性数学难题未做过专门研究，但朱学志教授、高沛田副教授、杨仁同副教授三位数学专家认为“赵元民同志对大偶数分解为两个素数之和的研究是独辟蹊径的，对他的理论与方法尚未找到反例，在逻辑上尚未发现矛盾，因而应引起学术界的重视和探讨，有出版价值。书中独立提出的用网络分析方法来处理大偶数分解的问题，经大量验证和论述，看来是行之有效的。他所提出的素数家族的观点，

很有启发性，也有参考价值。”他对这方面的研究，做了大量的工作。

赵元民同志在《试论“1＋1”和素数家族》一书中，除论证分解大偶数为两个奇素数之和而外，还提出判定大奇数是否为素数的方法以及有关素数的一些规律性的见解，在其它边缘学科中也有应用价值。例如生命科学中遗传工程、生命基因等研究领域，都要涉及到素数方面的问题。因而，我认为这本书的出版，不仅数学界应引起重视和探讨，而且其它边缘学科亦应予以重视。

赵元民同志是中国民主促进会会员，他一心为祖国争光的愿望是值得鼓励的，他经过苦心研究所提出的科学上的见解应当给以注视。关于数论，研究的方法很多，研究的学者也很多，特别是关于大偶数分解为素数之和的问题研究的方法和研究的人更多，赵元民在本书中证明和证明方法的尝试是“独辟蹊径”的。我热切希望此书问世之后，得到国内外数学界及广大数学爱好者的评论，并愿作者为祖国争光的愿望早日实现。

1992 年 7 月 12 日

（陈占元同志是中国民主促进会中央委员会委员、民进黑龙江省委主任委员、中国人民政治协商会议哈尔滨市委副主席、物理学教授。）

# 自　　序

1981年出版了《函数逼近方法》之后，我于1985年开始对素数问题发生了浓厚的兴趣，尤其是对哥德巴赫1742年提出的至今尚未解决的“任一大偶数可表为两个素数之和”的问题甚感兴趣，再加上听到“几十年内乃至百余年内很难解决”的说法，心中惴惴不安，于是涌起创造一种方法试证一下的念头。想起毛泽东同志曾经说过中华民族有自立于民族之林的能力的豪言，就更有勇气，终于使自己的“跃跃欲试”变为“具体行动”了。

1985年以来，我为证此难题曾失败过三次，每次都耗费大量的精力，但我并未气馁，继续干下去，多少亲朋劝我搁笔，我未为所动，终于在1991年10月20日推演出满意的结果。以后经过多次修改才写成此书稿，得到中共黑龙江省委、民进黑龙江省委的热心关怀和支持，请专家审查书稿。全国高校数学史研究会理事朱学志教授首先审阅了我的书稿，随之高沛田副教授与杨仁同副教授亦先后审阅了我的书稿。三位老师在百忙之中不辞辛苦地细心审查并写了审查意见，在此我表示衷心的感谢，致以崇高的敬意。对给予我热心关怀和支持的各位领导同志，致以深深的谢意。

由于本人水平有限，不足与错误之处在所难免，敬请数学界诸位专家及广大数学爱好者批评指正。

赵元民

1992.7.21

# 目　　录

# 本书所用符号

$N$：大偶数，充分大的偶数

$P$：素数

$\{y_1, y_2\}$：泛指一对素数

$\{y_1, y_2\}_N$：构成 $N$ 的素数对

$y_1$：$\{y_1, y_2\}_N$ 中元素之一

$y_2$：$\{y_1, y_2\}_N$ 中元素之二

$y$：$(y_1 + y_2)$ 的简写

$\hat{y}_1$：$y_1$ 的近似值

$W$：$\hat{y}_1$ 的误差

$\max|W|$：$\hat{y}_1$ 的最大误差，误差限

$y_K$：$y_1$ 所在区间的素数

$Y_1$：$y_1$ 所在区间的奇数

$Y$：(1)奇合数

(2)未判定是否为素数的大奇数

$\hat{y}_2$：$y_2$ 所在区间的奇数

$\tilde{Y}$：偶数

$y$：$\{y_1 \cdot y_2\}_N$ 或 $\{y_1 \cdot y_2\}$ 的简写

$\pi(N)$：$N$ 以内素数的个数

$\pi(s)$：$s$ 以内素数的个数

$\{P\}$：$n$ 以内素数的集合

$\{n\}$：自然数集

$\{Q\}$：有理数集

$\{2n\}$：偶数集

$\{a_n\}$：奇数集之一

$\{b_n\}$：奇数集之二

$\{c_n\}$：奇偶数集之一

$\{d_n\}$：奇偶数集之二

$\ddot{n}$：自变量，$\ddot{n} \in \{Q\}$，$\ddot{n} > 1$

$\{y\}$：n 以内素数对的集合

$\exists$ ：存在一个

$m$、$M$、$K$、$k$、$S$：大于零的整数

$\alpha$、$\beta$、$j$、$i$：大于或等于零的整数

（其它符号与一般常用数学符号同）

# 第一章 绪 论

## §1. 本书的结构

1.本书共四章。第一章重点是简要介绍与本书有关的数学知识，包括一些概念和定理。关于定理这里只做介绍而不给出证明，因为这些定理的证明很复杂，不能占用更多的篇幅．但尽量告诉读者定理的证明在哪里可以找到。这里 介绍的有关定理是本书在论证过程中要引用的前人的结论．因此只写出其内容与名称，而不予以编号（譬如[素数定理]……）；笔者在本书中还要提出一些定理，并加以证明，对这些定理则予以编号（譬如[定理Ⅰ]……，以区别于前人已有的结论。

本书主要论述关于 Goldbach 问题“1+1”的证明及论证过程中发现的有关数论方面规律性的东西，对与论证无关的知识不做介绍。本书与一般数论的不同点主要表现在证明方法的独特性，笔者建立的“网络分析法”．无论在概念上、方法上都有特点，因此在第一章中还要简单介绍一下此方法的涵义，以便于读者理解。

2.第二章详细分析素数及构成大偶数 $N$ 的素数对 $\{y_1,y_2\}_N$ 在自然数无休限增长过程中分布的状态。在分析的基础上给出具体的的寻找 $\{y_1,y_2\}_N$ 的方法。本章提出的[方法Ⅰ][方法Ⅱ]，移到后面一章中证明，其原因在于第二章重点是给出寻找 $\{y_1,y_2\}_N$ 的方法，如将理论证明与之放在一起则会扰乱读者的思路。

3.第三章除提出和证明[定理Ⅱ]外，还对“证明”本身作

了剖析，详细阐明了“网络分析法”对于素数问题进行分析的特点与理论根据。因为[定理Ⅰ]是本书的核心，所以对它的证明与剖析就构成了全书理论体系的核心。[定理Ⅰ]的证明，实际上就是对“1＋1”命题的证明。有人认为目前尚不存在解决“1＋1”的工具，因而几十年内甚至一二百年内不可能解决“1＋1”这一难题。而笔者认为一切工具都是人创造出来的，若等待着有了工具之后再去解决“1＋1”，是不符合科学发展规律的。事实上，无论生产工具也好，数学工具也好，都是在解决具体问题的实践中迫使人们想办法创造出来的。没有一件工具是事先创造出来然后等着具体问题的到来；也没有一件工具是不在解决具体问题的实践中创造的；更没有一件工具是过一个时期侥幸从天外飞来的。只能是针对具体问题摸索着创造，若不管用则继续摸索，直至成功。笔者想要证明“1＋1”，但用现有的方法，试证数载未能如愿，况且中外诸多名家 200 余年来用尽已有的数学方法也都未能证明，因此不得不创造一个新的方法，名曰“网格分析法”。

4. 第四章重点阐述在证明[定理Ⅰ]的过程中所发现的一些有关素数产生、组合与发展的规律。发现素数与偶数有密切的关联，每个大于 4 的偶数 $N$，在表为两个奇素数之和的同时，是由另外一个偶数 $\hat{N}_1$ 转化而来，而且由另两个偶数 $N_1$ 与 $N_2$ 来决定 $N$ 的存在。其中 $N_1$、$N_2$ 与 $N$，有着“血缘”关系，而素数则由 $N$、$N_1$、$N_2$ 中产生，构成一个家庭。这一过程颇似生命过程。

## §2. 网络分析法的涵义

1. 50 年代美国杜邦公司与海军特种计划局曾针对工程技术、科研设计和生产计划安排中各项目之间错综复杂相互制约的动态关系，而提出了一种网络分析技术，这种“技术”以各工序间相互联系的网络图和简便的算法为手段，对整个工程做出切合实际的统筹安排。其中“网络图”是按工程顺序的方向找出一条流程主线做为主要矛盾线来分析和筹划。

网络分析法是借鉴上述方法的某些特征，放到不同领域、针对不同问题加以改制创造而成。

它借鉴“网络图”外在形式上具有的纵、横、纵横多个方向，及一个主方向、一条主要矛盾线的特点；借鉴其算法简便、通俗易懂的手段上的特点；在内容上则以数理逻辑为核心，以主要自变量为纲，对难以找到规律的客观对象进行数量分析。如此建立起来的方法，当针对构成大偶数的素数对 $\{y_1, y_2\}_N$ 在自然数增长过程中表现出来的无规则的现象进行分析时，有着特殊的令人难以估料的效能。

2. 先不谈针对素数问题的网络分析，先谈谈对一般事物数量关系的网络分析，以便对方法的涵义有个了解。

(1)将对象的数量表现做为函数值 $y_i$，$(i = 1,2,3,\cdots,s)$；找到使 $y$ 引起变化的主要自变量 $x$；

(2)如果能找到影响 $x$ 变化的参变量，也不要放过，找不到参变量也不要勉强；

(3)列出在 K 种不同环境中 $y = F(x)$ 的 K 条曲线，表出 K 种函数关系，把这 K 种函数关系做成网络分析表：

| x<br>y | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | … | … | $x_N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_1(x)$ | $y_{1,1}$ | $y_{1,2}$ | $y_{1,3}$ | $y_{1,4}$ | $y_{1,5}$ | $y_{1,6}$ | $y_{1,7}$ | … | … | $y_{1,N}$ |
| $F_2(x)$ | $y_{2,1}$ | $y_{2,2}$ | $y_{2,3}$ | $y_{2,4}$ | $y_{2,5}$ | $y_{2,6}$ | $y_{2,7}$ | … | … | $y_{2,N}$ |
| $F_3(x)$ | $y_{3,1}$ | $y_{3,2}$ | $y_{3,3}$ | $y_{3,4}$ | $y_{3,5}$ | $y_{3,6}$ | $y_{3,7}$ | … | … | $y_{3,N}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $F_k(x)$ | $y_{K,1}$ | $y_{K,2}$ | $y_{K,3}$ | $y_{K,4}$ | $y_{K,5}$ | $y_{K,6}$ | $y_{K,7}$ | … | … | $y_{K,N}$ |

(4)选用一种数学方法对表中函数值进行横向、纵向、纵横向分析，给出全区间或分成若干区间分别给出 $F_i(x)$ 的表达式。

假如选用的方法是最小二乘法，那么有横向表达式：

$$\hat{F}_i(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k$$

$$(i = 1,2,3,\cdots,K) \tag{1.1}$$

还有纵向表达式

$$\overline{F}_i(x) = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} F_i(x) \tag{1.2}$$

纵横向表达式可根据数值分析中获得的情况而另行给出（略）。

(5)对横向各表达式分别给出误差 $W$，便得到

$$\hat{F}_i(x) + W_i = F_i(x) \tag{1.3}$$

假如选用的数学方法是最小二乘法，那么

$$W_i = \left(\sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y})^2}{N - k - 1}}\right)_{(i)} \qquad (i = 1,2,3,\cdots,K)$$

从 $W_i$ 中选取最大值者做为误差限

$$\max|W| = \left|\sqrt{\frac{\sum(y-\hat{y})^2}{N-k-1}}\right|_{(s)}$$

(6) $F(x)$ 在综合环境中所表现的数量变化规律，应从以上的多方向分析中得到

$$F(x) = \overline{F}(x) \mp \max|W| \tag{1.4}$$

网络分析方法的涵义大体如此。但是本书所用针对素数问题的网络分析法与上述(1)～(6)之方法有许多不同处，这是由以下原因所致

a. 寻求目标不同。一为寻求某点上的函数值 $y_k$，一为寻求构成大偶数的一对素数的集合 $\{y_1, y_2\}_N$；

b. 搜寻区间不同。一为搜寻有限区间内的 $F(X)$ 变化规律，一为搜寻无限区间的 $\{y_1, y_2\}_N$ 的变化规律；

c. 表达式形式与误差式形式均不同，一以多项式为宜，一以集合形式为宜。

因此，(1)～(6)的方法只能看做是“网络分析法”的前身，实际上二者有很大的区别。

## § 3. 数论与素数

1. 数论是研究整数性质的一个数学分支。按其研究方法的不同,可分为初等数论、代数数论、几何数论、解析数论等数种。数论与其它数学分支一样,具有抽象的形式,并依据数理逻辑的原则进行严密的推理。做为一种数学理论的数论,也是现实世界空间形式和数量关系的深刻反映,对人类认识自然和改造自然起着重要的作用。19 世纪德国大数学家高斯(C. F. Gauss)曾说:"数学是科学的女王,数论则是数学的女王。"

整数与整数之间存在的某些奇妙关系,很早就被人们发现,例如我国古代在《周髀算经》中就明确记载了直角三角形三条边长的关系"$3^2+4^2=5^2$",世称"勾股弦数"。在欧洲古希腊时代对整数的研究已经奠定了基础,欧几里德(Euclid)的《几何原本》中就证明了"$N$ 趋于无穷则有无穷多个素数"的结论、求最大公约的算法等,与此同时还有爱拉托斯散(Eratosthenes)发现的求素数的"筛法"。公元 3 世纪希腊的丢番图(Diophantus)发现了"一次、二次不定方程的解法"。

到了 17 世纪,关于整数的研究在欧洲又有新的发展。如法国的梅森(M. Mersenne)提出有趣的"$2^p-1$"型的素数及费马(P. de. Fermat)提出的未证明的定理 Fermat 大定理等。18 世纪末 19 世纪初法国的勒让德(A. M. Legendre)及德国的高斯(C. F. Gauss)将数论研究提高到一定的高度。19 世纪德国数学家高斯与狄利克雷(P. G. Dirichlet)开始使用解析方法研究整数,从而创立了解析数论。进入 20 世纪后,解析数论、代数数论、几何数论都得到飞跃的发展。

2. 在大于 1 的自然数里,除了 1 和自身以外没有其它正

因数的数称为素数，其它的数称为合数。在整数列"2,3,4…，s"中选定素数的方法，有古希腊时代就知道的古老的筛法，近代则用 $\sqrt{s}$ 以内的素数 $P_i$ 来判定 $S$ 是否为素数。

对于整数 $n$ 的分解，则有[唯一分解定理]：

$$n = P_1^{a_1} P_2^{a_2} \cdots P_s^{a_s}, \quad n > 1, P_1 < P_2 < \cdots < P_s$$

此定理又称标准分解式，在初等数论与解析数论书中都能找到此定理的证明。

不容忽视的一个事实：在整数集中素数所占比率甚小，几乎全部整数都是合数，即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n} = 0$$

但是，早在公元前 3 世纪欧几里德(Euclid)在他的《几何原本》中用反证法已证明了素数有无穷多个，即

$$\lim_{n\to\infty} \pi(n) = +\infty$$

关于素数的分布，历来是人们重视而感兴趣的问题。从 $n$ 以内的素数表中可以观察到 $\pi(n)$ 与 $\frac{n}{\ln n}$ 的比值逐渐趋近于 1，这一事实曾给人以启发。终于在 1896 年哈达玛(j. Hadamard)和德拉瓦莱·普森(ch. dela vallee—poussin)各自独立地证明了[素数定理]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{\frac{n}{\ln n}} = 1$$

此定理被称之为素数分布的中心定理。(华罗庚《数论导引》载有此定理的证明)。

从已知的素数中还看到有许多相邻的一对其差为 2 的素数，即 $P_2 - P_1 = 2$。如 3,5;11,13;17,19;29,31;41,43;…人

们称这样的一对素数为孪生素数。但孪生素数是否有无穷多个，还没有证实。

若从 4 开始将偶数依次排列，不难找到两个素数之和与它相等。如 $4=2+2, 6=3+3, 8=3+5, 10=3+7, 12=5+7$, …。对此，哥德巴赫(C. Goldbach)在 1742 年与欧拉(L. Euler)的通信中提出“凡 6 以上的偶数均能表为两个奇素数之和”之猜想，欧拉复信说“这一猜想虽然我还不能证明它，但我相信是对的。”这就是数论中的一个难题，称为哥德巴赫问题或哥德巴赫猜想。200 多年来许多人都力图证明它的正确性。我国数学家陈景润于 1973 年证明了任意给定的大偶数 $N$，总可找到奇素数 $P_1$、$P_2$、$P_3$、$P'$、$P''$，使 $N=P'+P''$ 或 $N=P_1+P_2P_3$ 二式中至少有一式成立。这就是“1+2”成立的证明结果，但此结果还没有澈底解决哥德巴赫问题。

数论中有许多颇有趣味而没有得出结论的问题，例如 6，28，496 都是完全数，而究竟有多少个完全数还不知道。8、10、14、34 都是亏数；4、12、18 都是丰数。亏数、丰数、完全数与素数有何种关系也不知道。这些都不能不敦促人们创造新的方法对它们进行分析。

# 第二章　针对素数问题的网络分析

## §1.　分析方法的建立

1. 对于任意给定的大偶数 $N$，必定能找到构成它的两个素数，即

$$N = y_1 + y_2$$

已在本书第三章中详细地给出证明。但是对于某一个具体的 $N, N \geqslant 4, 2|N$，应如何寻找构成它的两个素数 $y_1$ 与 $y_2$，也同样是 Goldbach 问题中必须解决的一项内容。理论上证明了 $N = y_1 + y_2$ 总能成立，这是运用逻辑推理的方法针对大偶数 $N$ 具有的性质和条件和素数 $P$ 具有的性质和条件，令 $P_1 = y_1, P_2 = y_2$，采用数学符号和数学语言进行推演之后得出的结果。这一结果假若正确无误，必然能够依据论证过程中所建立的理论体系，给出 $N = y_1 + y_2$ 中寻找构成 $N$ 的一对素数 $\{y_1, y_2\}_N$ 的有效方法。不然的话，怎能令人相信你的理论正确无误？所以，理论推演的结果与符合理论的有效方法，二者是一件事的两个侧面，二者是相辅相成的。

如果某人只从理论上推出 $N = y_1 + y_2$ 成立之结果，而未能给出寻找 $\{y_1, y_2\}_N$ 的有效方法，那么只能做到使读者暂时相信该逻辑推理成立，自已去从素数集合中想法寻找构成给定 $N$ 的 $\{y_1, y_2\}_N$。即使从已知素数集中能找到某些给定 $N$ 的 $\{y_1, y_2\}_N$，也总会感到这个推理结果不完善。所以我认为理论上与方法上须同时具备才可算做完满解决了“1+1”之难题。

本书之所以把方法放在理论推演之前，是本着“由实践到

理论，再由理论到实践的程序，把问题的解决过程说清楚"的设想才这样做的。

2. 已知 $N \geqslant 4, 2|N, y_1 + y_2 = N$

(1)设 $\{y_1, y_2\}_N = \tilde{y}$，$y_1$ 是 $\tilde{y}$ 中元素之一，$y_1 \leqslant y_2$

"$P_1, P_2, \cdots, P_5$"是 $y_1$ 邻近的素数

$\{y\}$ 是自然数 n 以内全体素数对 $\{y_1, y_2\}_N$ 的集合

$\{P\}$ 是自然数 $n$ 以内全体素数的集合

则有函数关系

$$\tilde{y} = f(n)$$

这说明 $\tilde{y}$ 是随着自然数 $n$ 的增长而增长变化。但 $\tilde{y}$ 是集合形式的因变量而不是一般的因变量，且 $y_1 \leqslant y_2$，若按一般的函数值对待 $\tilde{y}$，则不切合实际。因此选取 $\tilde{y}$ 中的一个元素 $y_1$ 做为因变量的代表，于是函数关系就可表为一个复合函数形式：

$$y_1 = f(n)$$
$$y_2 = N - y_1$$

(2)可是素数集 $\{P\}$ 在自然数集 $\{n\}$ 中无规则存在，难以找到 $y_1 = f(n)$ 与 $n$ 之对应关系。为了解决这一困难，不妨引进如下四个数列

$$a_n = 2n - 1, \qquad b_n = 2n + 1$$
$$c_n = 3n + 2, \qquad d_n = 3n + 1$$

列出 $n(n = 100)$ 以内因变量 $y_1$、$\{y_1, y_2\}_N$ 分布状态的网络分析表。从这个表中可以得知其横向、纵向、纵横向都组成不同的数集：

横向有 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$、$\{d_n\}$；

纵向有 $\{y_1, y_2\}_j$、$\{Y_1, \tilde{y}_2\}_j$、$\{y_1, \tilde{y}_2\}_j$；

纵横向有 $\{y_1, y_2\}'_j$、$\{Y_1, \tilde{y}_2\}'_j$、$\{y_1, \tilde{y}_2\}'_j$