

TM13
Q359=3
:2

0603304 高等学校教材

电 路

(第三版)

下 册

邱关源 主编

Y026/02



21113000008174

高等教育出版社

内 容 简 介

本书是在《电路(电工原理 I)》和《电路(修订本)》的基础上修订而成的,本书内容满足工科电工课程教学指导委员会于 1987 年制订的高等工业学校电路课程(130—160 学时)的教学基本要求。

全书共二十章和两个附录,分上、下册出版。上册有十四章:电路模型和电路定律,电阻电路的等效变换,电阻电路的一般分析,非线性电阻电路,一阶电路,二阶电路,一阶和二阶非线性电路,相量法,正弦电流电路的分析,具有耦合电感的电路,三相电路,非正弦周期电流电路和信号的频谱。下册有六章和附录:拉普拉斯变换,网络函数,电路方程的矩阵形式,二端口网络,电路设计,开关电容网络简介,均匀传输线(附录 A),磁路和铁心线圈(附录 B),每章和附录均有习题,书末有答案。

高等学校教材

电 路

(第三版)

下 册

邱关源 主编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

青浦任屯刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 8.125 字数 192,000

1989 年 10 月第 3 版 1989 年 10 月第 1 次印刷

印数 00,001—27,150

ISBN 7-04-002397-0/TM·134

定价 2.05 元

目 录

第十五章 拉普拉斯变换	1
§15-1 拉普拉斯变换的定义	1
§15-2 拉普拉斯变换的基本性质	4
§15-3 拉普拉斯反变换	9
§15-4 应用拉普拉斯变换分析线性电路	15
习 题	26
第十六章 网络函数	32
§16-1 网络函数的定义及其性质	32
§16-2 复频率平面, 网络函数的极点和零点	36
§16-3 极点、零点与冲激响应	37
§16-4 极点、零点与频率响应	41
习 题	47
第十七章 电路方程的矩阵形式	52
§17-1 割 集	52
§17-2 关联矩阵, 回路矩阵, 割集矩阵	56
§17-3 矩阵 A 、 E_f 、 Q_f 之间的关系	66
§17-4 节点电压方程的矩阵形式	67
§17-5 回路电流方程的矩阵形式	78
§17-6 割集电压方程的矩阵形式	81
§17-7 移源法	83
§17-8 $2b$ 表格法	86
§17-9 状态方程	90
习 题	96
第十八章 二端口网络	102
§18-1 二端口(网络)	102
§18-2 二端口的方程和参数	104

§18-3	二端口的转移函数	115
§18-4	二端口的特性阻抗	120
§18-5	二端口的等效电路	122
§18-6	二端口的联接	126
§18-7	回转器和负阻抗变换器	130
	习 题	134
*第十九章	电路设计	140
*§19-1	概 述	140
*§19-2	巴特沃思逼近的概念	141
*§19-3	低通滤波器的无源实现	145
*§19-4	低通滤波器的有源实现	148
*§19-5	归一化和去归一化	151
	习 题	153
*第二十章	开关电容网络简介	155
*§20-1	开关电容元件的特性	155
*§20-2	开关电容网络	157
*§20-3	SCN 中的一些非理想因数	163
	习 题	166
附录 A	均匀传输线	168
§A-1	均匀传输线及其方程	168
§A-2	均匀传输线方程的正弦稳态解	174
§A-3	均匀传输线的行波	179
§A-4	均匀传输线的原参数和副参数	185
§A-5	终端接特性阻抗的传输线	190
§A-6	终端接任意阻抗的传输线	191
§A-7	无损传输线	196
§A-8	无损传输线方程的通解	205
§A-9	无损传输线的波过程	211
	习 题	216
附录 B	磁路和铁心线圈	218
§B-1	磁场和磁路	218

§B-2 铁磁物质	220
§B-3 磁路和磁路定律	224
§B-4 恒定磁通磁路的计算	229
§B-5 交变磁通磁路简介	237
§B-6 铁心线圈	240
习 题	243
习题答案	245

第十五章 拉普拉斯变换

内 容 提 要

本章介绍研究线性非时变电路的一种基本工具——拉普拉斯变换。主要内容有：拉普拉斯变换的定义及其与电路分析有关的一些基本性质；应用拉普拉斯变换求解常系数线性微分方程的方法；元件的电压电流关系和电路定律的运算(或复频域)形式，运算阻抗，运算导纳，运算电路以及求拉普拉斯反变换式的分解定理。

§15-1 拉普拉斯变换的定义

一个定义在 $[0, \infty)$ ，即 $(0 \leq t < \infty)$ 区间的函数 $f(t)$ ，它的拉普拉斯变换式 $F(s)$ 的定义为

$$F(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (15-1)$$

式中 $s = \sigma + j\omega$ 为复数。 $F(s)$ 称为 $f(t)$ 的象函数， $f(t)$ 称为 $F(s)$ 的原函数。拉普拉斯变换简称为拉氏变换， $F(s)$ 又称为 $f(t)$ 的拉氏变换式。

式(15-1)表明拉氏变换是一种积分变换。把原函数 $f(t)$ 与 e^{-st} 构成的乘积由 $t=0_-$ 到 ∞ 对 t 进行积分，则此定积分的值不再是 t 的函数，而是复变数 s 的函数了。所以拉氏变换把一个时间

域内的函数 $f(t)$ 变换到 s 域内的复变函数 $F(s)$ 。变量 s 有时称为复频率，这是因为在相量法中 ‘ $j\omega$ ’ 中的 ω 相当于频率，而这里的 s 除虚部 $j\omega$ 外还有实部 σ ，故称复频率。应用拉氏变换来进行电路分析称为电路的复频域分析，有时称为运算法。

从式(15-1)看出，一个函数 $f(t)$ 的拉氏变换或 $F(s)$ 存在的条件为该式的右边的积分为有限值，故此处 e^{-st} 有收敛因子之称。所以对任意一个 $f(t)$ ，对于所有的 t 只要满足条件

$$|f(t)| \leq M e^{ct} \quad (15-2)$$

式中 M 和 c 为 2 个正的有限值常数，则 $f(t)$ 的拉氏变换式 $F(s)$ 总存在，因为总可以找到一个合适的 s 值，使式(15-1)中的积分为有限值。我们假设涉及的 $f(t)$ 都满足此条件。式(15-1)中的积分下限取为 0_- ，这是为了使此积分能够计及时间函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 时刻可能包含的冲激，后面将有实例说明这种情况。

如果 $F(s)$ 已知，要求出它所对应的原函数 $f(t)$ ，则由 $F(s)$ 到 $f(t)$ 的变换称为拉普拉斯反变换，它的定义为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (15-3)$$

为书写简便起见，通常可用记号“ $L[]$ ”表示对方括号里的函数作拉氏变换，即

$$L[f(t)] = \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s)$$

用记号“ $L^{-1}[]$ ”表示对方括号里的函数作拉氏反变换，即

$$L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

另外，我们还约定在今后应用拉氏变换分析线性非时变电路时，用小写字母表示原函数，大写字母表示对应的象函数。如对应于电流 $i(t)$ 和电压 $u(t)$ 的象函数分别为 $I(s)$ 和 $U(s)$ 。

例 15-1 求 $f(t) = \varepsilon(t)$ 的象函数。

解

$$\begin{aligned}L[\varepsilon(t)] &= \int_{0_-}^{\infty} \varepsilon(t) e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{0_-}^{\infty} = \frac{1}{s}\end{aligned}$$

根据拉氏变换存在的条件可知, 上式中的 s 必须满足条件 $\operatorname{Re}(s) > 0$ 。所以对于 $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$L[\varepsilon(t)] = \frac{1}{s}$$

例 15-2 求 $f(t) = e^{at}\varepsilon(t)$ (a 为任一实数或复数) 的象函数。

解

$$\begin{aligned}L[e^{at}\varepsilon(t)] &= \int_{0_-}^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} e^{-(s-a)t} dt \\ &= \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \Big|_{0_-}^{\infty} = \frac{1}{s-a}\end{aligned}$$

同理, 上式中的 s 必须满足 $\operatorname{Re}(s-a) > 0$ 。所以对于 $\operatorname{Re}(s-a) > 0$

$$L[e^{at}\varepsilon(t)] = \frac{1}{s-a}$$

例 15-3 求 $f(t) = \delta(t)$ 的象函数。

解

$$\begin{aligned}L[\delta(t)] &= \int_{0_-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{0_-}^{0+} \delta(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{0_-}^{0+} \delta(t) e^{-s \cdot 0} dt = 1\end{aligned}$$

所以, $L[\delta(t)] = 1$ 。由上面的积分看出, 正是因为我们定义拉氏变换的积分从 0_- 开始, 所以单位冲激函数 $\delta(t)$ 的象函数为 1。这说明式(15-1)定义的拉氏变换可以计及 $t=0$ 时 $f(t)$ 所包含的冲激, 从而给计算存在冲激函数的电路带来方便。

例 15-4 求 $t=T$ 时刻出现的单位阶跃函数 $\varepsilon(t-T)$ 的象函数。

解

$$\begin{aligned}L[\varepsilon(t-T)] &= \int_{0-}^{\infty} \varepsilon(t-T) e^{-st} dt \\&= \int_{0-}^{\infty} \varepsilon(t-T) e^{-s(t-T)} e^{-sT} d(t-T) \\&= e^{-sT} \int_{0-}^{\infty} \varepsilon(t') e^{-st'} dt' \\&= \frac{1}{s} e^{-sT}\end{aligned}$$

比较例 15-1 和例 15-4 的结果可以推论, 若任意一个 $f(t)$ 的象函数为 $F(s)$, 则 $f(t-T)$ 的象函数为 $e^{-sT} F(s)$ 。

§15-2 拉普拉斯变换的基本性质

拉氏变换具有许多重要性质, 下面仅介绍一些在分析线性非时变电路时有用的基本性质。利用这些基本性质可以容易地求得一些较复杂的原函数的象函数, 同时通过这些基本性质可以把线性非时变电路在时域内的线性常微分方程变换为 s 域内的线性代数方程。

性质 1 唯一性 由式(15-1)所定义的象函数 $F(s)$ 与定义在 $[0, \infty)$ 区间上的时域函数 $f(t)$ 存在着——对应的关系。

唯一性这一性质对于拉氏变换的所有应用都是有用的。正是这个性质才使我们有可能把线性非时变电路的时域分析变换为较易处理的复频域分析, 并使在复频域内获得的结果有可能再返回时域中去。

唯一性的证明从略。

性质 2 线性性质 令 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是 2 个任意的时间函数, 且它们的象函数分别为 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$, A_1 和 A_2 是 2 个任意

常数,于是

$$\begin{aligned} L[A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)] &= A_1 L[f_1(t)] + A_2 L[f_2(t)] \\ &= A_1 F_1(s) + A_2 F_2(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{证 } L[A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)] &= \int_{0_-}^{\infty} [A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)] e^{-st} dt \\ &= A_1 \int_{0_-}^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt + A_2 \int_{0_-}^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt \\ &= A_1 F_1(s) + A_2 F_2(s) \end{aligned}$$

例 15-5 设 $f_1(t) = \sin \omega t$ 和 $f_2(t) = K(1 - e^{-at})$ 的定义域都是 $[0, \infty)$, 应用线性性质求它们的象函数。

$$\begin{aligned} \text{解 (a) } L[\sin \omega t] &= L\left[\frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right] \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right] \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } L[K(1 - e^{-at})] &= L[K] - L[Ke^{-at}] \\ &= \frac{K}{s} - \frac{K}{s+a} \\ &= \frac{Ka}{s(s+a)} \end{aligned}$$

例 15-6 求图 15-1 所示矩形脉冲的象函数。

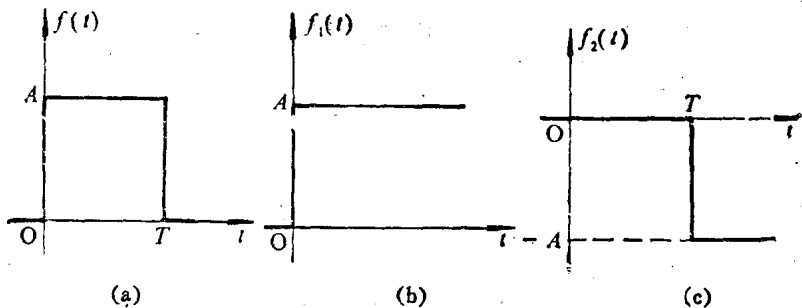


图 15-1 例 15-6 用图

解 图 15-1 a 所表示的矩形脉冲函数

$$f(t) = \begin{cases} A & 0 < t < T \\ 0 & T < t \end{cases}$$

由于可把 $f(t)$ 视为同图 b、c 所示的 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的叠加, 即

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = Ae(t) - Ae(t-T)$$

所以

$$L[f(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t)] = \frac{A}{s} - \frac{A}{s} e^{-sT}$$

性质 3 (时域) 导数性质 原函数 $f(t)$ 的象函数与其导数 $f'(t) = df(t)/dt$ 的象函数之间有如下关系

$$L[f'(t)] = sF(s) - f(0_-)$$

式中 $f(0_-)$ 为原函数 $f(t)$ 在 $t=0_-$ 时的值。

$$\text{证 } L[f'(t)] = \int_{0_-}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt$$

利用分部积分公式, 设 $e^{-st} = u$, $f'(t) dt = dv$, 则 $du = -se^{-st} dt$, $v = f(t)$, 由于 $\int udv = uv - \int vdu$, 所以

$$\begin{aligned} \int_{0_-}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt &= f(t) e^{-st} \Big|_{0_-}^{\infty} - \int_{0_-}^{\infty} f(t) (-se^{-st}) dt \\ &= -f(0_-) + s \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

为要保证 $F(s)$ 存在, 必须有 $\text{Re}(s)$ 足够大, 以使 $t \rightarrow \infty$ 时 $f(t) e^{-st} \rightarrow 0$, 这样得出了上式等号右边第一项为 $-f(0_-)$; 而第二项为 $sF(s)$ 。于是性质 3 得证。

例 15-7 应用导数性质求 $f_1(t) = \cos \omega t$ 和 $f_2(t) = \delta(t)$ 的象函数。

解 (a) 由于 $d(\sin \omega t)/dt = \omega \cos \omega t$, 则 $\cos \omega t = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} (\sin \omega t)$, 所以

$$L[\cos \omega t] = L\left[\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} (\sin \omega t)\right] = \frac{1}{\omega} \left(s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - 0\right)$$

$$= \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

(b) 由于 $\delta(t) = \frac{d}{dt} e(t)$, 所以

$$L[\delta(t)] = s \frac{1}{s} - 0 = 1$$

顺便指出, 重复应用导数性质, 可以推论二阶, 直至 n 阶导数的象函数为

$$L[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0_-) - f'(0_-)$$

.....

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0_-) - s^{n-2} f'(0_-) - \dots - f^{(n-1)}(0_-)$$

性质 4 (时域)积分性质 原函数 $f(t)$ 的象函数与其积分

$\int_{0_-}^t f(\xi) d\xi$ 的象函数之间有如下关系

$$L\left[\int_{0_-}^t f(\xi) d\xi\right] = \frac{F(s)}{s}$$

利用分部积分公式, 令 $u = \int_{0_-}^t f(\xi) d\xi$, $dv = e^{-st} dt$, 则 $du = f(t) dt$, $v = -e^{-st}/s$, 所以

$$\begin{aligned} & \int_{0_-}^{\infty} \left[\left(\int_{0_-}^t f(\xi) d\xi \right) e^{-st} dt \right] \\ &= \left(\int_{0_-}^t f(\xi) d\xi \right) \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{0_-}^{\infty} - \int_{0_-}^{\infty} f(t) \left(-\frac{e^{-st}}{s} \right) dt \\ &= \left(\int_{0_-}^t f(\xi) d\xi \right) \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{0_-}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

只要 $\text{Re}(s)$ 足够大, 等式右边第一项, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 因 $e^{-st} \rightarrow 0$ 而趋于零; 当 $t=0_-$ 时, 也等于零, 所以有

$$L\left[\int_{0_-}^t f(\xi) d\xi\right] = \frac{F(s)}{s}$$

例 15-8 利用积分性质求单位斜坡函数 $r_a(t)=t$ 的象函数。

解 由于 $r_a(t)=t=\int_0^t e(\xi) d\xi$, 所以

$$L[r_a(t)] = \frac{1}{s} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

在 §7-9 中介绍了卷积积分(见式 (7-7) 和式 (7-8))。设有 2 个时间函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$, 在 $t < 0$ 时为零。则数学上 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积可以用符号 $f_1(t) \otimes f_2(t)$ 来表示, 且定义为

$$f_1(t) \otimes f_2(t) = \int_{0-}^{t+} f_1(t-\xi) f_2(\xi) d\xi \quad \textcircled{1}$$

性质 5 卷积定理 设 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的象函数分别为 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$, 则卷积 $f_1(t) \otimes f_2(t)$ 的拉氏变换为 $F_1(s) F_2(s)$, 即

$$L\left[\int_{0-}^{t+} f_1(t-\xi) f_2(\xi) d\xi\right] = F_1(s) F_2(s)$$

证 $L[f_1(t) \otimes f_2(t)] = \int_0^\infty \left[\int_{0-}^{t+} f_1(t-\xi) f_2(\xi) d\xi \right] e^{-st} dt$

上式中的 $f_1(t-\xi)$ 是延迟时间 ξ 的 $f_1(t)$, 即

$$f_1(t-\xi) e(t-\xi) = \begin{cases} f_1(t-\xi) & \xi < t \\ 0 & \xi > t \end{cases}$$

故

$$\int_{0-}^{t+} f_1(t-\xi) f_2(\xi) d\xi = \int_{0-}^\infty f_1(t-\xi) f_2(\xi) d\xi$$

若又令 $t' = t - \xi$, 则 $e^{-st} = e^{-s(t'+\xi)} = e^{-st'} e^{-s\xi}$, 于是有

$$\begin{aligned} L[f_1(t) \otimes f_2(t)] &= \int_0^\infty \int_{0-}^\infty f_1(t') f_2(\xi) e^{-st'} e^{-s\xi} dt' d\xi \\ &= \int_{0-}^\infty f_1(t') e^{-st'} dt' \int_0^\infty f_2(\xi) e^{-s\xi} d\xi \\ &= F_1(s) F_2(s) \end{aligned}$$

以上我们介绍了对电路分析有用的拉氏变换的一些基本性

① 这里积分下限取 $0-$, 上限取 $t+$ 是为了便于把在原点的冲激函数考虑在内。

质。根据拉氏变换的定义和上述基本性质，能方便地求得一些常用的时间函数的象函数。表 15-1 中，给出了一些常用的时间函数及其象函数。

表 15-1

象函数 $F(s)$	原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$	原函数 $f(t)$
1	$\delta(t)$	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$
$\frac{1}{s}$	$e(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$
$\frac{1}{s^2}$	$r_a(t)=t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{\omega}{(s+b)^2+\omega^2}$	$e^{-bt}\sin\omega t$
$\frac{1}{s^n+1}$	$\frac{1}{n!}t^n$	$\frac{s+b}{(s+b)^2+\omega^2}$	$e^{-bt}\cos\omega t$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$	$\frac{1}{n!}t^n e^{-at}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}		

§15-3 拉普拉斯反变换

用拉氏变换法求解线性电路的时域响应时，要求把响应的拉氏变换式反变换为时间函数，这就是拉氏反变换。拉氏反变换固然可以用式(15-3)来求得，但涉及到计算一个复变函数的积分，一般说来是比较复杂的。求拉氏反变换最简单的方法就是利用拉氏变换表。但求解线性电路时求得的象函数并非都正好为表中列出的形式，所以只靠查表求原函数是不行的。不过电路响应的象函数通常表示为两个实系数的 s 的多项式之比，也就是 s 的一个有理

分式

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n} \quad (15-4)$$

式中的 m 和 n 为正整数, 且 $n \geq m$ ①。

有一个通用的方法, 可以把任一有理函数分解成许多简单项之和, 而这些简单项都可以在拉氏变换表中找到, 这种方法称为部分分式展开, 或称为分解定理。这是用拉氏变换法求解线性电路时, 进行反变换的主要方法。

用部分分式展开有理分式 $F(s)$ 时, 第一步是把有理分式化为真分式。若 $n > m$, 则 $F(s)$ 为真分式; 若 $n = m$, 则

$$F(s) = A + \frac{N_0(s)}{D(s)}$$

于是, 余项 $N_0(s)/D(s)$ 便是一个真分式。上式中的 A 是一个常数, 其对应的时间函数为 $A\delta(t)$ 。所以在下面的讨论中都假定 $F(s)$ 为真分式。

用部分分式展开有理分式 $F(s)$, 首先必须求出 $D(s) = 0$ 的根。下面就这些根的不同情况分别讨论 $F(s)$ 的展开。

1. 设 $D(s) = 0$ 有 n 个单根的情况。设 n 个单根分别为 p_1, p_2, \cdots, p_n 。于是 $F(s)$ 可以展开为

$$F(s) = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{k_n}{s-p_n} \quad (15-5)$$

式中 k_1, k_2, \cdots, k_n 等是待定系数。这些系数可以按下述方法确定, 把上式两边都乘以 $(s-p_1)$, 得

$$(s-p_1)F(s) = k_1 + (s-p_1)\left(\frac{k_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{k_n}{s-p_n}\right)$$

令 $s = p_1$, 则等式除第一项外都变为零, 这样就求得

$$k_1 = [(s-p_1)F(s)]_{s=p_1}$$

① 在电路分析中, 一般不出现 $n < m$ 的情况。

同理可求得 k_2, k_3, \dots, k_n 。所以确定式(15-5)中各待定系数的公式为

$$k_i = [(s-p_i)F(s)]_{s=p_i} \quad i=1, 2, 3, \dots, n$$

由于 $F(s) = N(s)/D(s)$, 所以

$$k_i = [(s-p_i)F(s)]_{s=p_i} = (p_i-p_i) \frac{N(p_i)}{D(p_i)}$$

因为 p_i 是 $D(s)=0$ 的一个根, 故上面关于 k_i 的表达式为 $0/0$ 的不定式, 可以用洛比特法则来确定 k_i 的值如下

$$\begin{aligned} k_i &= \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{(s-p_i)N(s)}{D(s)} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{(s-p_i)N'(s) + N(s)}{D'(s)} \\ &= \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} \end{aligned}$$

所以确定式(15-5)中各待定系数的另一公式为

$$k_i = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} \quad i=1, 2, \dots, n$$

于是 $F(s)$ 所对应的原函数 $f(t)$ 便可求得, 为

$$f(t) \mathbf{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^n k_i e^{p_i t} = \sum_{i=1}^n \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} e^{p_i t}$$

例 15-9 求 $F(s) = \frac{4s+5}{s^2+5s+6}$ 的原函数 $f(t)$ 。

解 $D(s) = s^2+5s+6=0$ 的根为 $p_1 = -2, p_2 = -3$, 于是有

$$k_1 = \left[(s+2) \frac{4s+5}{s^2+5s+6} \right]_{s=-2} = \frac{4s+5}{s+3} \Big|_{s=-2} = -3$$

或

$$k_1 = \frac{N(s)}{D'(s)} \Big|_{s=p_1} = \frac{5s+5}{2s+5} \Big|_{s=-2} = -3$$

$$k_2 = \left[(s+3) \frac{4s+5}{s^2+5s+6} \right]_{s=-3} = \frac{4s+5}{s+2} \Big|_{s=-3} = 7$$

或