

科學圖書大庫

速成微積分自習手冊

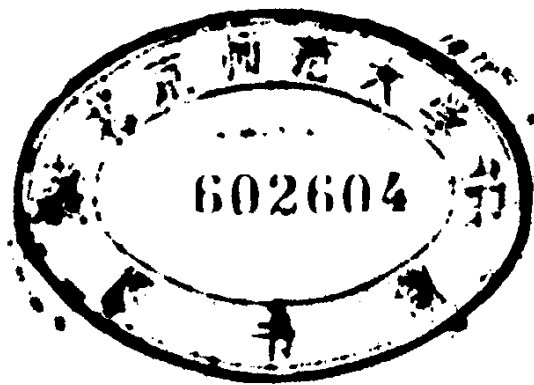
譯者 林宜禧 校閱 江德曜

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

速成微積分自習手冊

譯者 林宜禧 校閱 江德曜



徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人 徐銘信 科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人 林碧銓 科學圖書編譯委員會編譯委員

版權所有

不許翻印

中華民國六十七年六月六日八版

速成微積分自習手冊

基本定價 1.20

譯者 林宜禧 成功大學數學系教授
校閱 江德曜 台灣大學電機系教授

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(63)局版臺業字第0116號

出版者 財團法人 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686 號
發行者 財團法人 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第 1 5 7 9 5 號
承印者 江淮彩色印刷股份有限公司 電話：5413269 • 5416842

刊 1224/18

我們的工作目標

文明的進度，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認為若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，允爲社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能爲蔚爲大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尚有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員林碧鏗氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。爲欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本或實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大眾閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尚在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，廣續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會即擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

茲特掬誠呼籲：

自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；

大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。尙祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

徐氏基金會 敬啓

中華民國六十四年九月

序

在你開始讀這本“速成微積分”以前，我們應該告訴你怎樣讀牠，速成微積分教給你微分和積分的基本算法，使你花費最少的心力就可以學會。這本書的設計完全是靠自修的，因為學習微積分最好的方法是多做習題，所以你在這書裡會看到很多題目，你做完每一個題目，就可以查對答案，下一步該做的事就決定於答案的正誤了。如果答案正確，就進一步讀新的教材，要是答錯了，那就該讀關於那一題的解答或是更多做一兩個題目加強練習。

我們希望這本書對多數人都能有用，寫這書的動機是使大學一年級學生讀了牠，就可有足够的微積分方面的運用以開始物理學的研習，不必等到學完整學年的微積分課程之後。然而，不久發現這本書的用處不只這一點，譬如，凡屬於經濟，商學，醫學，和社會科學各系，大學部的或研究院的學生需用一些初等微積分的智識者，他們大多數都未曾學過微積分，或雖學過而需要一次簡要的複習的，那麼這本書就是一本很適宜的書。對於那些有雄心的中學生，想快一步接觸大學課程的人，這“速成微積分”也就是他們的讀物。不像一般微積分教本那樣的著重嚴密的理論，“速成微積分”只是著重算法和應用，因此對於入門者特別適用。初學者欲求微積分這一課程的簡捷之途，也將發現這本書不論自修或做教本用兩皆適宜。最後，我們特別希望那些只為興趣而學微積分的人，這書會對他們有用。

因為用這本書的各階層人的不同背景，我們開始時有幾段

代數和三角的複習——這些材料和微積分很有關聯的。假如你於這些中學課程已經有良好的準備，這一段複習可以很快過去。假如你從前所學不多，或是已經有一段長時間生疏了，那末這一段複習就需要花費一點時間。不久你會發現這本書的一個特點——就是牠具有彈性——每一部分，各人所需的時間，基於各自特殊的情況。總之，我們希望你讀牠時能為你節省時間，這樣的效果和書的稱謂也就名符其實了。

哈 佛 大 學
劍 橋；麻 州

Daniel Kleppner

Noman F. Ramsey

目次

第一章 一些基本觀念

1. 函數.....	1
2. 圖形.....	5
3. 一次和二次函數.....	10
4. 三角.....	17
5. 指數和對數.....	30

第二章 微分學

1. 極限.....	39
2. 速度.....	50
3. 導數.....	59
4. 函數的圖形和導數.....	63
5. 導數求法.....	72
6. 求導數的幾個法則.....	78
7. 三角函數的導數.....	88
8. 對數和指數函數的導數.....	94
9. 高階導數.....	102
10. 極大和極小.....	105
11. 微分.....	112
12. 複習題.....	116
13. 第二章總結.....	120

第三章 積分學

1. 不定積分.....	121
2. 積分.....	124
3. 曲線下的面積.....	134
4. 定積分.....	144
5. 積分的應用.....	151
6. 重積分.....	157
7. 結語.....	168

第四章 總複習

	第一章複習，一些基本觀念.....	170
	第二章複習，微分學.....	173
	第三章複習，積分學.....	177
附錄 A	公式和定理的推演	
A 1.	兩角和的三角函數.....	182
A 2.	極限定理.....	183
A 3.	含三角函數的極限.....	185
A 4.	x^n 的導數.....	187
A 5.	三角函數求導數.....	189
A 6.	相乘兩函數求導數.....	190
A 7.	鏈鎖法則的導數公式.....	191
A 8.	e 這個數.....	191
A 9.	$\ln x$ 的導數.....	192
A 10.	兩個變數都決於第三個變數時的微分.....	193
A 11.	$\frac{dy}{dx} = 1 / \frac{dx}{dy}$ 的證明.....	194
A 12.	兩函數的導數相等，則兩函數的差為一常數.....	195
附錄 B	補充題材	
B 1.	函數定義的更換.....	196
B 2.	偏導數.....	197
B 3.	隱函數.....	199
B 4.	反三角函數的導數.....	201
B 5.	微分方程式.....	203
B 6.	主要參考書.....	205
總複習題		
	總複習題.....	207
	總複習題答案.....	212
表		
	表 1. 導數公式.....	214
	表 2. 積分公式.....	216

第一章 一些基本觀念

§ 1. 函數

- 1 微積分不是一門難學的科目。當然，你不可能在一夜之間成為專家，但是只要肯下工夫，你就可以將基本觀念很正確地，很迅速地把握住。

這本書，如果你從頭開始看過，做過一遍，那你就能够解決很多題目，並且讀完這本書，你算是有了良好的基礎足以去學習更深入的東西，如果你需要的話。但是，你必須知道：最重要的一個字是做。

你最要做的事是答問題和做習題。學習的時間和路徑的長短，決定於你所做的答案對不對。你將一個題做對了，那末，你可以走捷徑進入另一新課題。相反地，你做錯了題，你就得細讀答案的解釋（多數答案，都有解釋）。此外，你還得多做幾個題目，以明白是否真懂了。你做完每一個題目，都立刻可以查到答案。

大多數的題目，都是用選擇法，寫做〔 $a \mid b \mid c \mid d$ 〕。在上式中，圈出你所要的答案。正確的答案列在次一欄的下端。有些問題是要用文字解答的，把文字填在題目中的橫線上，這一類問題的正確答案，必須在另一欄裏才能找到。

假使你答案是對了，可是感到還需要多練習，那末，就按做錯題一樣的規定，去加強一些練習。記住，快讀是沒有報酬的。

現在讀第 2 欄

2 速成微積分

2 假使你先要知道這本書講些甚麼，這就是牠的大綱：第一章是基本概念的總預習，準備以後各章應用的；第二章是微分學，第三章是積分學，第四章（最後一章）再把前面各章所講過的，來一次重點複習。另外有兩個附錄：附錄甲、將書中所用及的某些定理，予以正式證明；附錄乙、則討論某些補充論題。還有一組附有解答的補充題，和你用得着的一些表。

有一句須提醒你注意：因為這個課程是由一些定義開始，所以在第一節裏的幾欄的寫法，要比書中其他部份來得正式。

首先，我們來溫習函數的定義。假如你已熟知這定義，於自變數和因變數的觀念都已清楚，那末，你可以略過以下各欄，直接由第二節（第 14 欄）讀起。不過，第一節裏，可能有一些教材對你來說還是新的，那你花一點時間讀牠，是很好好處的。

讀第 3 欄

3 函數的定義用集合 (set) 的觀念。你知道集合是甚麼嗎？假如你已經知道，那麼請讀第 4 欄，若不知道，請讀下面。

一堆東西都可以稱做一個集合，甚至這些東西不一定是具體的物質。我們可以將構成一個集合的那些東西，一一列出，稱之為構成集合的元素。例如：23, 7, 5, 10 是一個數的集合。又如：火星，羅馬，和法蘭西又是另一種集合。

有時，確定一個集合，不必列舉牠的元素，只須敘述構成集合的原則，例如：偶正整數的全體（這集合含有無窮個元素）。又如：太陽系中的所有行星。

最常用的集合是全體實數的集合，包含正，或負實數如 5, -4, 0, $\frac{1}{2}$, -3.482, $\sqrt{2}$, 等等；但不包括含 $\sqrt{-1}$ 的各數。

“集合”一義的數學用法，和日常談話所說的如：“一套打高爾夫球的用具”相似。

讀第 4 欄

- 4 將比 10 小的奇正整數的集合的元素，列在下面的橫線上。

答案在第 5 欄

- 5 比 10 小的正奇整數的集合的元素是：

1、3、5、7、9。

讀第 6 欄

- 6 現在我們來談函數。因為函數的嚴密的定義比較正式，故此先由一個簡明的事例開始。

在有些新聞紙的氣象報告欄中，我們可以發現一天裏每一小時的氣溫一覽表。由是可知表中所例的氣溫，和時間有關聯。在數學裡，這種存在於兩組不同的物質，或是數量之間的關聯，叫做函數（function）。

我們所用函數的正式的定義寫在下面。（假如你已學過的函數的定義，和下面所寫的很不相同的話，那末請看附錄 B 1。）

假設 A 集合的每一元素，都可以在 B 集合裡尋出惟一的元素和牠相關聯，那末，這種關聯叫做由 A 到 B 的函數。 A 集合叫做函數的定義域（domain）。

讀第 7 欄

- 7 我們常用某些記號，如字母 x ，表示 A 集合（函數的定義域）裡的任意元素。於是將 x 叫做自變數（independent variable）。假如 y 表示因 x 和函數所給的關係，而在 B 集合裡求到的對應元素，那末稱 y 為因變數（dependent variable）。這兩個定義的採用，是十分合理的： x 之所以叫做自變數，因為牠的值可以先在 A 集合裡“自”由選取，然後通過函數關係， y 的值就“因”此在 B 集合裡決定了，所以 y 叫做因變數。

-
- 8 現在來看看，怎樣把這些定義用在第 6 欄中所舉溫度和時間的例子。請將正確的用字填在下面的橫線上。

氣溫和時刻之間的關聯，是從時刻到氣溫的____。假如用 h 表示一天裡的每一個小時， t 表示氣溫，那末自變數是____，因變數是____。

答案在第 9 欄

-
- 9 你必定已經寫下這其間的關聯，是從時刻到氣溫的函數。自變數是 h ，因變數是 t 。

你如果全做對了，你已經把握住這些定義，就可以直接讀第 11 欄。假使你有任何一個錯誤，應該讀第 10 欄。

-
- 10 由第 6 欄中的定義，可知這中間的關聯，自然是由時刻到氣溫的函數，因為你任意指定一天裡的某一小時，就有一個，並且只有一個溫度的數字，和該一小時對應。由一天中的 24 小時所組成的集合（各個小時就是構成這集合的元素）相當於定義中的 A 集合。因為 h 是表示這集合裡的元素，所以 h 是自變數，而氣溫 t 則是因變數。這種命名是很合理的，因為我們可以自由指定任一小時 h ，然後通過函數，就求得了該一小時的溫度 t ，所以 t 是因所選擇的時間而決定下的。

假如現在你很清楚地明白了這些觀念，就接下去讀 11。假使你還不太了然，那就應該重讀第 3 欄到第 10 欄，然後，再讀 11。

-
- 11 現在看怎樣來表明一個函數。有一種方法是把兩個集合之間的對應元素完全列出。另一種方法是提供由自變數求因變數的法則，通常這種法則都是由方程式來表示。譬如，存在於自變數 t ，和因
-

變數 S 之間的函數，由方程式

$$S=2t^2+6t$$

表示。這方程式確定一個函數，因為當變數 t 的值給予，就有一個並且僅有一個 S 的值和牠對應。

更具體地說，當自變數所可能有的變化範圍（也就是所謂函數的“定義域”）還沒有確定以前，函數的定義還不算完全表明。請看下列的說明：除非天然的限制，或許人爲的限制，自變數應可以是任意實數，而對應的因變數也是實數。所以上例中的 t 可以是任意實數。但是，設一函數由 $y=\sqrt{x}$ 確定，那末這裡的 x 顯然只限於非負的實數。

在多數數學問題裡，自變數和因變數都是單純的實數，像 5.1 或 $\sqrt{7}$ 等。但是，在應用上，變數常常帶有單位，像 5.1 秒或 $\sqrt{7}$ 哩等。

讀第 12 欄

- 12 我們常用字母 f 表示函數。假設自變數是 x ，因函數 f 所關聯的因變數通常就寫做 $f(x)$ ，念做“ x 的函數”。所以 $f(3)$ 就是表示當自變數 $x=3$ 時的因變數的值。讀者千萬不要把這個記號看做 f “乘以” 3，因為你們以前對括弧所熟知的用法是 $5(3+2)=25$ 。

讀第 13 欄

- 13 在數學問題中， x 常常表示自變數， f 常常表示函數，而 $y=f(x)$ 則常常表示因變數。當然，也可以有用其他符號表示的例子，如 $z=H(r)$ ，或如在第 11 欄中 $S=2t^2+6t$ ，也可以寫做 $F(t)=2t^2+6t$ ，甚至更簡單的 $S=F(t)$ 。

函數抽象的定義既然已經明白，下面我們開始討論函數的圖示。

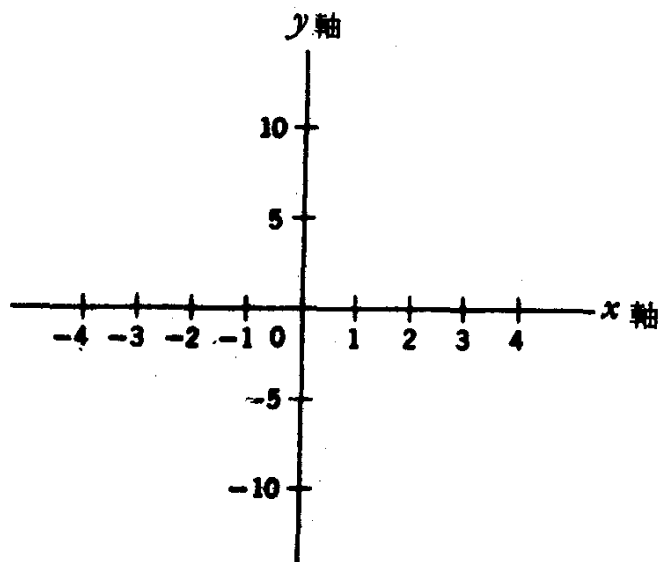
看第 14 欄

§ 2. 圖形

- 14 如果你已經懂得怎樣作函數的圖，你可以直接讀第 19 欄，不然，應該讀第 15 欄。

6 速成微積分

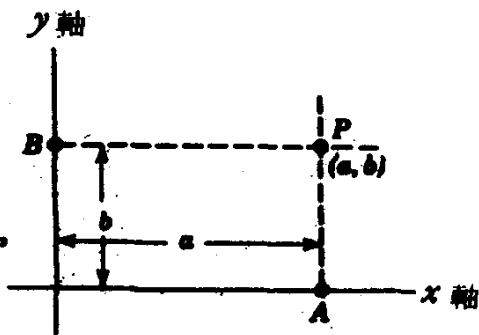
- 15** 表示函數 $y=f(x)$ 最便利的方法是畫牠的圖形。讀者先由坐標軸畫起。首先，畫兩條正交的直線，其一鉛直方向，另一水平方向。水平線通稱為橫軸 (horizontal axis)，或 x 軸，鉛直線通稱為縱軸 (vertical axis)，或 y 軸。兩直線的交點叫做原點 (Origin)，和兩軸合稱做坐標軸 (coordinate axis)。



其次，我們選定一單位的長度，並且以原點作為 0 開始度量，在 x 軸上向右為正，向左為負。在 y 軸上是向上為正，向下為負。 y 軸上的單位長度，和 x 軸上的單位長度可以不必一樣。事實上， x 和 y 可以表示不同的單位，譬如距離和時間。

讀第 16 欄

- 16** 由函數決定的每一對數值，都可以由下面的方法來表示：令 a 表自變數 x 的值， b 表 $y=f(x)$ 的對應值。於是 $b=f(a)$ 。在 x 軸上標出一點，使牠和原點的距離等於 a 倍的單位長度，牠的位置如右圖中的 A 點。在 y 軸上如法畫出表示 b 值的 B 點。現在，過 A 點畫一直線垂直於 x 軸，過 B 畫一線垂直 y 軸。這二直線的交點 P ，就用以表示數對 (a, b) 。



我們把 a 值稱為 P 點的 x 坐標，或橫標 (*abscissa*)， b 值叫做 y 坐標，或縱標 (*ordinate*)，通常規定 x 坐標寫在括號中撇點之前， y 坐標在後，也就是說，表示某一點的兩個坐標，應該寫做 (x, y) 的形式。

考驗讀者對這些名詞認識的情形，請圈出下列兩題的正確答案：

由 $(5, -3)$ 所表示的點，牠的

橫標是 $\{-5 \mid -3 \mid 3 \mid 5\}$

縱標是 $\{-5 \mid -3 \mid 3 \mid 5\}$

請記住凡是選擇題的答案都是列在下一欄的

完結的地方，在往讀新的一欄以前，先看答案對不對。

讀第 17 欄

- 17 函數 $y=f(x)$ 作圖最直接的方法是把 x 和 y 的對應值列成一表。每一數對 (x, y) ，都可以得到像前一欄所描述的 P 點那樣的一點表示之。然後，將此等點用“光滑的”曲線連繫起來。當然，這樣的畫法所得到的只是曲線近似的形狀。假如要畫得比較正確，那只有多計算幾個數對，並且使每一數對所代表的點的位置，畫得盡可能的正確。在大多數的問題裡，所需要的都只是曲線的草圖罷了。

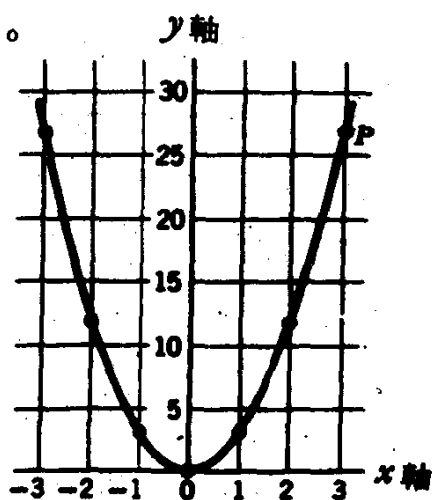
答(16): $5, -3$

讀第 18 欄

- 18 請看這一例：畫函數 $y=3x^2$ 的圖形。

求得一組 x 和 y 的對應值見下表

x	y
-3	27
-2	12
-1	3
0	0
1	3
2	12
3	27



8 速成微積分

試把 P 的坐標在下列三個答案裡圈出：

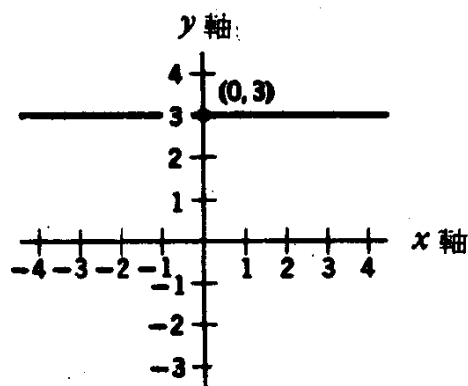
$((3, 27) | (27, 3) | \text{前兩者都不是})$

查正確的答案。假如不錯，可以讀第 19 欄。若是錯了，應該重讀 16 欄，而後開始讀 19 欄。

- 19** 下面討論一個比較特別的函數。這種函數叫做常數函數 (constant function)。就是說，所有自變數 x ，都只對應一個數值 C ，也就是 $f(x) = C$ 。

這個函數特別的地方是自變數的值有數個或無窮個，可是因變數的值只有一個。雖然這樣，但牠沒有不合於函數的定義的地方：因為給予一個固定的 x 值，立刻有一個並且只有一個 $f(x)$ 和牠相應的緣故。所謂“特別”，不過是指當 x 變動時， $f(x)$ 沒有改變就是了。

請看常數函數 $y = f(x) = 3$ 的圖形。這是一根通過 $(0, 3)$ 點，平行於 x 軸的直線，如下圖所示



讀第 20 欄

答18: $(3, 27)$

- 20** 另外一個簡單的函數叫做絕對值函數 (absolute value function)。 x 的絕對值記做 $|x|$ 。一實數 x 的絕對值的意思是不考慮牠的正、負號。因此

$$|-3| = |3| = 3.$$

在確立 $|x|$ 的定義之前，先提一下不等式的符號：