

高等学校教学参考书

高等数学

(基础部分)

上册

清华大学数学教研组编

人民教育出版社

出版前言

本书是按 1964 年 8 月第一版重印的,重印前由清华大学数学教研组作了一次勘误。

本书分上下两册出版,上册内容是平面解析几何与一元函数的微积分学。

本书可作为高等工业院校的教学参考书,也可供有关的工程技术人员参考。

高等数学

(基础部分)

上册

清华大学数学教研组编

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

北京新华印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012·0184 开本 850×1168 1/32 印张 15

字数 333,000 印数 199001—369000 定价(5)¥1.40

1964 年 8 月第 1 版

1978 年 12 月第 6 次印刷

出版前言

本书是按 1964 年 12 月第一版重印的，重印前由清华大学数学教研组作了一次勘误。

本书分上、下两册出版，下册内容是矢量代数、空间解析几何、多元函数微积分学、常微分方程与级数。

本书可作为高等工业院校的教学参考书，也可供有关的工程技术人员参考。

高等数学

(基础部分)

下 册

清华大学数学教研组编

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

北京新华印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012·0185 开本 850×1168 $\frac{1}{32}$ 印张 12 $\frac{5}{16}$

字数 335,000 印数 39,001—189,000 定价(5)¥1.20

1964 年 12 月第 1 版 1978 年 9 月第 3 次印刷



高等学校教学参考书



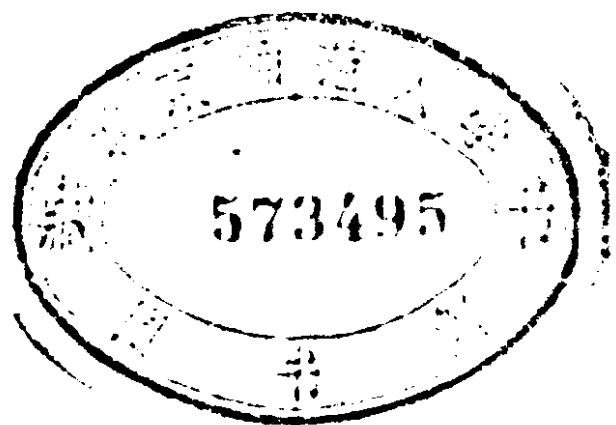
高等数学

(基础部分)

19162/13

下 册

清华大学数学教研组编



人民教育出版社



上册目录

預备知識.....	1
§ 1. 实数与数軸(1) § 2. 绝对值(4) § 3. 变量及变量的变化范围(6)	
§ 4. 充分条件与必要条件(10)	
第一章 平面解析几何.....	14
§ 1. 軸上的有向綫段(14) § 2. 平面上的直角坐标及其基本問題(20)	
§ 3. 曲綫与方程. 圓的方程(25) § 4. 直綫的方程(37) § 5. 关于直綫的一些問題(42)	
§ 6. 橢圓的标准方程及其性质(51) § 7. 双曲綫的标准方程及其性质(57)	
§ 8. 抛物綫的标准方程及其性质(62) § 9. 坐标的变换(66)	
§ 10. 一般二次曲綫的研究(72) § 11. 极坐标(81) § 12. 曲綫的参数方程(92)	
第二章 函数.....	103
§ 1. 函数概念(103) § 2. 函数表示法(108) § 3. 反函数. 多值函数(114)	
§ 4. 初等函数(119) § 5. 双曲函数(126)	
第三章 极限.....	133
§ 1. 极限概念导引(133) § 2. 整标函数的极限(数列的极限)(138) § 3. 連續自变量的函数的极限(150)	
§ 4. 无穷大量. 无穷小量. 有界函数(162) § 5. 关于无穷小量的运算定理. 极限运算法則(169)	
§ 6. 极限存在的准則. 两个重要的极限(179) § 7. 无穷小量的比較(191)	
第四章 函数的連續性.....	199
§ 1. 函数在一点处的連續性. 間断点(199) § 2. 連續函数及其运算(206)	
§ 3. 初等函数的連續性(208) § 4. 閉区間上連續函数的性质(214)	
第五章 导数与微分.....	217
§ 1. 函数的变化率. 导数概念(217) § 2. 导数的几何解釋(226) § 3. 求函数的导函数的方法——函数的微分法(229)	
§ 4. 微分概念及其性质(248) § 5. 微分在近似計算中的应用(258) § 6. 高阶导数(265)	
§ 7. 由参数方程所确定的函数的微分法(270)	
第六章 导数与微分的应用.....	276
§ 1. 几个基本定理(276) § 2. 求未定型的极限(288) § 3. 台劳公式(297)	

(v)

§ 4. 函数研究及函数作图(311) § 5. 曲率, 渐屈綫与渐伸綫(336) § 6.
方程的近似解(351)

第七章 不定积分.....360

§ 1. 原函数与不定积分概念(360) § 2. 基本积分表, 不定积分的简单性质(364) § 3. 变量置换法(372) § 4. 分部积分法(378) § 5. 有理函数的不定积分(385) § 6. 三角函数有理式的不定积分(393) § 7. 一些含有根式的不定积分(396) § 8. 补充說明(400)

第八章 定积分及其应用, 旁义积分402

§ 1. 定积分概念(402) § 2. 定积分的性质(413) § 3. 定积分与原函数的关系(418) § 4. 定积分的变量置换法則及分部积分法則(425) § 5. 定积分的近似計算法(431) § 6. 定积分的几何应用(437) § 7. 定积分的物理及力学应用(454) § 8. 旁义积分(461)

下册目录

第九章 空間解析几何·矢量代数.....475

§ 1. 二阶行列式·两个三元一次齐次方程(475) § 2. 三阶行列式·高阶行列式(482) § 3. 空間直角坐标及其基本問題(497) § 4. 矢量·矢量的加减法(501) § 5. 数量与矢量的积(504) § 6. 矢量在一軸上的投影(506) § 7. 矢量在坐标軸上的投影·矢量的投影表示式(510) § 8. 用矢量在坐标軸上的投影来表示矢量的模与矢量的方向余弦(512) § 9. 两个矢量的数积(515) § 10. 两个矢量的矢积(520) § 11. 三个矢量的混合积(524) § 12. 曲面与方程·空間曲綫的方程(527) § 13. 平面的方程(537) § 14. 有关平面的一些問題(542) § 15. 直綫的方程(546) § 16. 有关直綫、平面的一些問題(551) § 17. 关于三个三元一次方程組的解的討論(557) § 18. 二次曲面的标准方程(565)

第十章 多元函数及其微分法.....571

§ 1. 多元函数的基本概念(571) § 2. 二元函数的极限和連續性(580) § 3. 偏导数(584) § 4. 全微分(587) § 5. 复合函数的微分法(599) § 6. 隐函数的微分法(605) § 7. 函数的参数表示法及其微分法(613) § 8. 高阶偏导数(618) § 9. 多元函数的极值(623) § 10. 二元函数的台劳公式(633)

第十一章 常微分方程.....636

§ 1. 基本概念(636) § 2. 一阶微分方程(640) § 3. 一阶方程近似解法(658) § 4. 正交軌綫(663) § 5. 高阶方程的特殊类型(666) § 6. 高阶綫性方程(671) § 7. 常系数綫性方程(681) § 8. 常微分方程組(694)

第十二章 重积分.....703

§ 1. 二重积分的概念(703) § 2. 二重积分的基本性质(707) § 3. 二重积分在直角坐标系中的計算方法——累次积分法(708) § 4. 极坐标系中二重积分的計算方法(718) § 5. 三重积分概念(722) § 6. 三重积分在直角坐标系中的計算方法——累次积分法(723) § 7. 柱坐标系及球坐标系中的三重积分計算法(728) § 8. 二重积分的几何应用(737) § 9. 二重积分与三重积分的物理应用(740)

第十三章 曲綫积分与曲面积分.....746

§ 1. 对弧长的曲线积分(746) § 2. 对坐标的曲线积分(751) § 3. 沿平面闭路的曲线积分·格林定理(762) § 4. 曲线积分与路径无关的条件(766) § 5. 全微分的准则·原函数的求法(773) § 6. 全微分方程的解(778) § 7. 对面积的曲面积分(779) § 8. 对坐标的曲面积分(783) § 9. 奥斯特罗格拉茨基公式(简称奥氏公式)(791) § 10. 斯托克斯公式(794) § 11. 空间曲线积分与路径无关的条件(794)

第十四章 级数.....797

§ 1. 常数项级数概念(797) § 2. 级数的基本性质(800) § 3. 正项级数收敛性的判别法(802) § 4. 任意项级数(808) § 5. 函数项级数的一般概念(811) § 6. 幂级数(823) § 7. 台劳级数(834) § 8. 付立叶级数(853)

預备知識

§ 1. 实数与数軸

数,最初产生于点算物件的个数,最基本的数是自然数: $1, 2, 3, \dots$.

数的运算中,最简单的是加法运算. 事实上,点算物件的个数也体现着一个一个地累加.

由于生产的逐渐发展,人们对客观事物的認識逐渐深入,数的运算扩充为四則运算,数的范围亦由自然数扩充到整数: $0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 再扩充到有理数. 所謂有理数,是指 $\frac{q}{p}$ 这种形式的数, 其中 p, q 都是整数, 且 $p \neq 0$. 有理数当然包括了所有整数, 这是因为, 当 $p=1$ 时, 有理数就簡化为整数.

有理数可以用十进位小数来表示, 这些小数或者是有尽的, 或者是循环的. 例如:

$$\frac{1}{4} = 0.25, \quad \frac{5}{6} = 0.8\dot{3}, \quad \frac{22}{7} = 3.\dot{1}4285\dot{7}.$$

反过来, 任何一个有尽小数或循环小数也都可以化为有理数.

在实际生活中, 常要测量一些物理量, 如长度、面积、時間、溫度、重量等, 取了一定的单位以后, 这些量都可以被测量, 測量的結果用数来表示. 但有些量不能用有理数来表示, 例如, 对于两直角边皆为单位长度的直角三角形, 其斜边的长度为 $\sqrt{2}$ 个单位长度, $\sqrt{2}$ 不是一个有理数, 又如半徑为单位长度的圓, 它的面积是 π 个单位面积(单位长度的平方), π 也不是一个有理数. 像 $\sqrt{2}, \pi$ 这样的数, 如果用十进位小数来表示, 都是不循环的无尽小数:

$$\sqrt{2} = 1.4142135\cdots, \pi = 3.1415926\cdots,$$

这种不循环的无尽小数叫做无理数.

有理数与无理数統称为实数. 在实数範圍內, 可以进行更多种的运算, 如对于正的实数可以进行开方, 取对数, 对于任何实数可以取三角函数等. 在高等数学这一門課程中, 除了个别情况外, 所遇到的都是实数.

大家都知道, 在数学中經常采取数与形相結合的方法来研究問題, 例如, 三角函数这种数量关系与直角三角形紧密联系着, 又如, 数量間的比例关系与相似形有直接的联系. 通过图形我們不仅能直观地認識数量的抽象性质, 并且还可以利用图形解决一些数量的問題(如第六章中将要讲到的方程的图解法); 通过数量关系的研究也能解决一些重要的几何問題(如第五章中将要讲到如何利用数量关系来精密地作出曲綫的切綫). 現在我們研究实数, 也要設法将数与形結合起来.

設有一条无穷长的直綫, 习惯上都把它放在水平的位置, 在这直綫

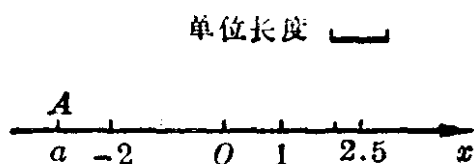


图 0.1

上任取一点 O , 称为原点, 在这直綫上規定好一个正方向 (习惯上規定向右的方向为正方向), 在这直綫上再規定好一个长度的单位. 这种具有原点、

正方向与长度单位的直綫叫做数軸.

对于每一个实数 a , 我們可以在数軸上規定一个点 A 与它对应. 規定的方法是: 若 $a=0$, 則点 A 就是原点; 若 $a>0$, 則点 A 在原点之右, 且点 A 与原点間的距离等于 a 个单位长度; 若 $a<0$, 則点 A 在原点之左, 且点 A 与原点間的距离等于 $-a$ ($-a>0$) 个单位长度.

反过來說, 对于数軸上每一个点 A , 我們可以規定一个实数 a 与它对应. 規定的方法是: 若点 A 是原点, 則 $a=0$; 若点 A 在原点 O 之右, 則 $a=|OA|$ ($|OA|$ 表示点 A 与原点 O 之間的距离); 若点 A 在原点 O 之左, 則 $a=-|OA|$.

这样一来，所有实数与数轴上所有的点形成了一种一一对应的关系，从而实数的性质与数轴上的点的性质就发生了紧密的联系。

总起来说：有理数与无理数统称为实数。每一个实数可用十进位小数来表示，有理数可用有尽小数或循环小数来表示，无理数可用不循环的无尽小数来表示。在所有实数与数轴上所有点之间存在着——对应的关系，也就是说，对于每一个实数 a ，在数轴上有一个点 A 与它对应，对于数轴上每一个点 A ，有一个实数 a 与它对应。这种对应关系可以用下面的数学式子来表示：

$$a = \begin{cases} |OA|, & \text{当点 } A \text{ 在原点 } O \text{ 之右,} \\ 0, & \text{当点 } A \text{ 与原点 } O \text{ 重合,} \\ -|OA|, & \text{当点 } A \text{ 在原点 } O \text{ 之左,} \end{cases}$$

其中 $|OA|$ 表示点 A 与原点 O 之间的距离，也就是线段 $\overline{OA}$ 的长度。

数轴也称为实数轴，也简称为轴。与点 A 相对应的实数 a 称为点 A 在数轴上的坐标。

为了简单计，我们时常不去区分一实数和它的对应点，而用同一符号来表示它们，我们有时说实数 a ，也有时说点 a 。

数轴上与有理数相对应的点叫做有理点，与无理数相对应的点叫做无理点。

显然，如实数 a 小于实数 b ，则点 a 在点 b 的左方，且 $b - a$ 就是点 a 与点 b 间的距离。

现在我们进而提出实数的两个重要性质：

第一，有理数的稠密性。任给两个有理数 $a, b (a < b)$ ，则在 a, b 之间至少可以找到一个有理数。例如， a, b 的算术平均数 $c = \frac{a+b}{2}$ 就是 a, b 之间的一个有理数。同样，在 a, c 之间也至少可找到一个有理数。依次类推，可知 a, b 之间可以找到无穷多个有理数。所谓有理数的稠密性就是指：不论有理数 a, b 相差多么小，在 a, b 之间总可以找到无穷多

个有理数,也就是說,有理点在数軸上是到处稠密的.

用同样的方法可以論证,实数也具有稠密性.

第二,实数的連續性. 既然实数与数軸上的点一一对应,可見实数充滿数軸而沒有“空隙”,这就叫做实数的連續性. 有理数虽然稠密,但并不連續,例如 $\sqrt{2}$, π 这些无理数就是有理数中的“空隙”, 有理点之間有无穷多这种“空隙”.

实数的連續性是实数的一个最根本的性质. 在以后的学习中常要用到这个性质.

§ 2. 絕對值

当我们对一个物理量进行直接測量时, 常常是測不准的, 有时偏大, 有时偏小. 評定測量的准确度时, 經常注意到的是偏离的大小, 而不計較偏大了还是偏小了, 处理这类問題时, 常要用到实数的絕對值. 現在我們来介紹一下絕對值的定义及关于絕對值的一些性质.

定义. 对于实数 a , 定义 a 的絕對值 $|a|$ 为

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{若 } a > 0, \\ 0, & \text{若 } a = 0, \\ -a, & \text{若 } a < 0. \end{cases}$$

例. $|2| = 2$. $|-3.1| = 3.1$. $|0| = 0$.

容易看出, 不論点 a 在原点的右方或左方, 实数 a 的絕對值 $|a|$ 表示点 a 与原点間的距离.

I. 关于絕對值的性质

以下关于絕對值的一些性质都是明显的.

(i) $|a| \geq 0$.

这个不等式表示 $|a| > 0$ 或者 $|a| = 0$.

(ii) $|-a| = |a|$.

这个等式表示 $-a$ 和 a 的絕對值相同,

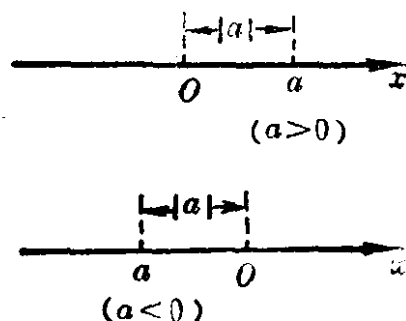


图 0.2

$$(iii) \quad -|a| \leq a \leq |a|.$$

$a > 0$ 时, 右边是等号, 左边是不等号; $a < 0$ 时, 右边是不等号, 左边是等号; $a = 0$ 时, 左边右边都是等号.

(iv) 对于实数 a , 如有一正数 ε , 使

$$(1) \quad |a| < \varepsilon,$$

则必然有

$$(2) \quad -\varepsilon < a < \varepsilon.$$

其逆亦真.

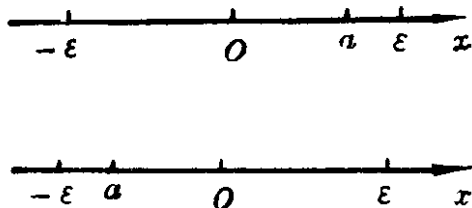


图 0.3

从几何上来看, (1) 表示点 a 与原点间的距离小于 ε , (2) 表示点 a 在点 $-\varepsilon$ 与点 ε 之间, 所以, 它们表示相同的意义.

(v) 对于实数 a , 如有一正数 N , 使

$$(3) \quad |a| > N,$$

则必然有

$$(4) \quad a > N \text{ 或 } a < -N.$$

其逆亦真.

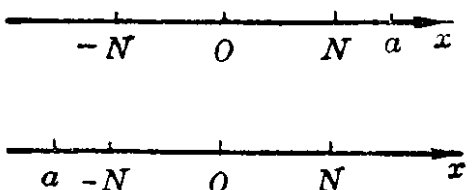


图 0.4

从几何上来看, (3) 表示点 a 与原点间的距离大于 N , (4) 表示点 a 在点 N 之右或在点 $-N$ 之左, 它们也表示相同的意义.

II. 有关绝对值的四则运算

(i) 对于任意两个实数 a, b , 恒有

$$(b) \quad |a+b| \leq |a| + |b|.$$

证明: 根据性质(iii), 有

$$-|a| \leq a \leq |a|,$$

$$-|b| \leq b \leq |b|.$$

二式相加, 得

$$-(|a| + |b|) \leq a+b \leq |a| + |b|.$$

根据性质(iv), 即知

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

证毕.

例. 当 a, b 同号时, (5) 式中等号成立, 如:

$$|3+5| = |3| + |5|,$$

$$|(-3)+(-5)| = |-3| + |-5|.$$

当 a, b 异号时, (5) 式中不等号成立, 如:

$$|3+(-5)| < |3| + |-5|,$$

$$|(-3)+5| < |-3| + |5|.$$

(ii) 对于任意两个实数 a, b , 恒有

$$(6) \quad |a-b| \geq |a| - |b|.$$

证明: 因为

$$|a| = |a-b+b| \leq |a-b| + |b|,$$

故得

$$|a-b| \geq |a| - |b|.$$

证毕.

(iii) 对于任意两个实数 a, b , 恒有

$$(7) \quad |ab| = |a| \cdot |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad (b \neq 0).$$

根据绝对值的定义, 这两个公式显然是正确的.

§ 3. 变量及变量的变化范围

我們考察各种自然現象与技术过程时, 常会遇到各种各样的量, 如水庫中水的深度、丰产田的面积、汽車行駛时汽油的消耗量、机床安全运转的时间、高炉的温度、工厂内工人的名額等等. 这些量都有共同的特征, 即采取了一定的单位以后, 这些量都可以通过度量用数来表示. 这些数就叫做这些量所取的值.

在一定的运动过程中, 有的量变化, 即取不同的值, 有的量則保持一个固定的值而不变, 前者叫做变量, 后者叫做常量. 例如人造卫星与地球间的距离是一个变量; 在一定时期内, 車間里的車床台数是一个常量. 若一个量在所討論的过程中变化很小, 以至对某个实用目的来讲可以忽略不計时, 我們也把它算作是常量. 例如, 在不同的地点, 落体

的重力加速度是不同的,因而它是个变量,但在较小地区中研究落体运动时,通常将重力加速度看成常量。因此,一个量是常量还是变量,要根据具体情况来决定。

为了控制技术过程,使它满足生产实践中所提出的种种要求,就必须把问题中所涉及各个变量的变化情况弄清楚。例如,为了把电压控制在 220 伏左右,或把设备利用率提高到接近 100%,就必须弄清楚电压或设备利用率的变化情况,只有这样,才能拟定出适当的措施以达到上述目的。所以研究变量是数学中重要的课题。

变量的性质与类型是多种多样的,可以从各个不同的角度来加以考察。钟摆与铅垂线间的夹角是个连续变化着的变量,它的值是有界限的,譬如说总是介于 $-\frac{\pi}{6}$ 与 $\frac{\pi}{6}$ 之间。但多边形的边数这个变量则只能取 3, 4, 5... 这些正整数值,它不是连续变化的,它的值可以无限增大,它不是有界的。由此可见,仅就变量的变化状态和变量所能取得的值的范围来说,就有连续、不连续与有界、无界之分。若就变量的变化趋势来说,也有种种不同,例如,火车从出发站开出后与出发站的距离,一般是个不断增大的变量,某个工厂产品中的次品率也许是个不断减小的变量,而地球与太阳间的距离则是时而变大、时而变小的变量。再如就变量变化的速度来讲,也有快慢之别。系统地研究变量的这些特点,找出它们相互联系的规律,以便利用这些规律去解决生产中的问题,这就是我们学习这门课程的目的。

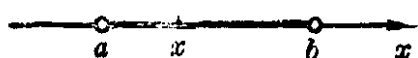
在今后的讨论中,为了叙述的简便起见,经常采用 x, y, z, θ, t 等字母来代表变量, a, b, c 等字母来代表常量。当然,这也不是一成不变的。

变量所能取得的值的范围常可用不等式来表示。例如,若以 θ 代表钟摆与铅垂线间的夹角,则按上面一段所述的情况, θ 的变化范围可以用不等式

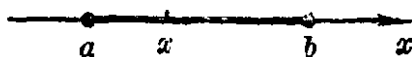
$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$$

来表示。

为了看起来更加清楚，我們还常采用下述的几何表示法。把变量 x 所能取的每一个值都用数軸上的一个点来表示。于是变量就可用变点即通常所說的动点来表示，而常量就相当于数軸上的一个定点了。这时，变量的变化范围也可在数軸上以图形表示出来。例如，若变量 x 的变化范围在 a, b 二数之間，即 $a < x < b$ ，那么，相应的动点就在数軸上的点 a 与点 b 之間变化，这些点构成一个不包括端点在内的綫段，我們称之为开区間，并以記号 (a, b) 来記它。正像我們常把数 a 叫做点 a



开区間 (a, b)



閉区間 $[a, b]$

图 0.5

一样，我們也常把不等式

$$a < x < b$$

叫做开区間。若变量 x 的变化范围在 a, b 二数之間，且能取 a 与 b 二值，即 $a \leq x \leq b$ ，相应的动点就在数軸上构成一个包括端点在内的綫段，我們称之为閉区間 $[a, b]$ 。

我們也常把不等式

$$a \leq x \leq b$$

叫做閉区間。

变量 x 的变化范围也可以是半开区間

$$a < x \leq b,$$

記作 $(a, b]$ (見图 0.6 上图)，或半开区間

$$a \leq x < b,$$

記作 $[a, b)$ (見图 0.6 下图)。

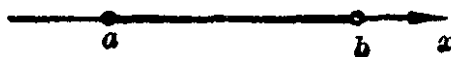
变量 x 的变化范围也可以是无穷区間

$$x > a, x \geq a, x < a \text{ 或 } x \leq a,$$

分別記作 $(a, +\infty), [a, +\infty), (-\infty, a)$ 或

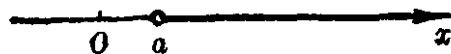


$(a, b]$

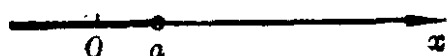


$[a, b)$

图 0.6



$(a, +\infty)$



$(-\infty, a)$

图 0.7

$(-\infty, a]$.

变量 x 也可能取得任何实数值, 在这种情况下, 我们将变量 x 的变化范围记作

$$-\infty < x < +\infty,$$

亦可记作无穷区间 $(-\infty, +\infty)$.

以点 a 为中点且长度为 $2l$ 的开区间叫做点 a 的 l 邻域. 这是以后

经常要讨论到的一种区间. 这种区间的端点是 $a-l$ 与 $a+l$, 因此, 这种区间可用不等式

$$(1) \quad a-l < x < a+l$$

来表示. 这种区间还有一种常见的表示法: 将(1)式改写为

$$(2) \quad -l < x-a < l,$$

根据绝对值的性质(iv), (2)式相当于

$$(3) \quad |x-a| < l.$$

所以, 点 a 的 l 邻域也可用不等式(3)来表示.

不等式(3)本身也有明显的几何意义. 容易看出, 不论 x 和 a 取什么值, $|x-a|$ 总是表示点 a 与点 x 间的距离. 由此可知, 不等式(3)表示动点 x 与定点 a 之间的距离小于 l (参看图 0.8).

例一. 点 2 的 l 邻域 $(l = \frac{5}{2})$, 可表示为

$$2 - \frac{5}{2} < x < 2 + \frac{5}{2} \quad \text{即} \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{9}{2},$$

这个区间也可表示为

$$|x-2| < \frac{5}{2}.$$

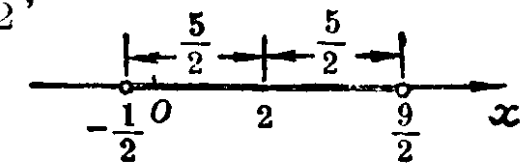


图 0.8

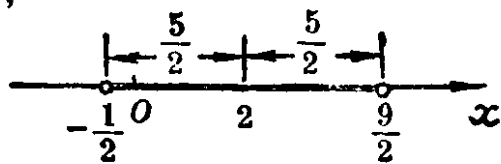


图 0.9

在图 0.9 中画出了这个区间, 动点 x 位于这区间内时, 动点 x 与定点 2 的距离小于 $\frac{5}{2}$, 也就是 $|x-2| < \frac{5}{2}$.