《信号与系统》习题详解

陈天麒　张明友　编

宇航出版社

目　　录

前　　言

本书是 A. V. 奥本海姆等所著《信号与系统》一书中前十章 338 个习题的详细解答。

A. V. 奥本海姆等所著《信号与系统》是作者继其所著《数字信号处理》之后又一本成功之作，颇受欢迎。我国已有部分重点院校直接采用英文原版及中译本作为本科生的教材、该书中的许多习题已被国内最近几年出版的多本《信号与系统》书籍所引用。

本书习题有以下特点：立题具有针对性，目的明确。它们或者要证明一个基本定理和重要结论，或者要建立某个新概念，或者要建立某一类型问题的一般分析方法。因而常常一个习题中包括许多小题，层层深入，耐人寻味。本书习题还作为理论联系实际，拓宽知识面的一种重要手段，其中有许多习题是将近几年来科技成果简化、抽象成基本理论问题而建立的，而且有大量习题的类型和内容都是国内同类书籍中未曾见过的，很有参考价值。本书习题很有启发性，许多习题粗看起来既此又彼，作题时起步较难，但稍加思考，就会发现解法并不难，并在其中得到不少启发。由此可知，本书为读者深化《信号与系统》的概念，掌握基本理论和分析方法，进而培养观察问题、分析和解决问题的能力，以及开拓读者的智力将会起到重要作用。

《信号与系统》是电子工程、无线电技术、通信、自动控制、生物电子学等学科不同专业本科生的主干课程，是硕士研究生、博士生入学考试的主要课程，也是成千上万电大生与成人自学者的主要课程之一。因此，本书将为上述不同学科各专业的教师、工程技术人员、学生以及成人自学者提供一本很有实用价值的参考书。

需要说明，为了节省篇幅，我们在保持原书题号和图号不变的情况下，对原书习题中的一些文字叙述作了改写和删减。由于一个习题的解法往往有多种，考虑到篇幅所限，除个别有代表性的习题外，一般只选一种解法，且对不同小题采用不同解法。再则，个别习题原书引用了正文中的公式和图，为使本书能独立使用，我们将这些公式和图重新编号归在该题中。此外，考虑到为采用不同《信号与系统》书籍的读者使用，所以将原书中的主要公式汇集成第一章(原书第一章无习题)，因而无原书的读者完全可独立使用本习题解答。

原书习题中有疏漏或错误之处，都作了更正。但由于习题量大，类型多，成书时间紧，加之我们水平有限，错误和不妥之处可能有之，恳请广大读者批评指正。

自 1985 年以来，我们在电子工程系不同专业的本科生中一直采用 A. V. 奥本海姆所著《信号与系统》为教材。在整理、加工本书的过程中，我们得到了不少同志的帮助和支持，其中，吕幼新、何述予为本书进行了校对工作，在此谨表谢意。

编　者

第一章　全书主要公式和内容摘要

1. 单位冲激信号 $\delta(t)$ 的基本特性

a. $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+t_0)\delta(t)dt = x(t_0)$

b. $\int_a^b \varphi(t)\delta(t)dt = \begin{cases} \varphi(0) & ab<0 \\ 0 & ab>0 \\ \text{无定义} & ab=0 \end{cases}$

c. $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

d. $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$

e. $\delta(-t)=\delta(t), \delta'(-t) = -\delta'(t), \delta''(-t) = \delta''(t)$

$\delta'''(-t) = -\delta'''(t), \cdots$

f. $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) = u_0(t)$, $\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau = u(t) = u_{-1}(t)$

$\delta'(t) = u_1(t)$, $u_k(t) = \underbrace{u_1(t) * \cdots * u_1(t)}_{k\text{次}}$

$u_{-k}(t) = u_{-1}(t) * \cdots * u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} u_{-(k-1)}(\tau)d\tau, (k>0)$

g. $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

h. $\delta(t-t_1) * \delta(t-t_2) = \delta(t-t_1-t_2)$

i. $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)dt = 0$, $\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)d\tau = \delta(t)$

j. $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta^{(n)}(t)dt = (-1)^n x^{(n)}(0), x(t) * \delta^{(k)}(t) = x^{(k)}(t)$

对于离散时间单位冲激信号（序列）$\delta[n]$ 也有许多类似的性

质，主要有

a. $u_{-1}[n]=u[n]=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta[n-k]$ 或 $u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$

b. $u_0[n]=\delta[n]=u[n]-u[n-1]$

c. $u_1[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$

d. $u_k[n]=\underbrace{u_1[n]*u_1[n]*\cdots*u_1[n]}_{k\text{次}},\quad k>0$

$$u_{-k}[n]=\underbrace{u_1[n]*u_{-1}[n]*\cdots*u_{-1}[n]}_{k\text{次}},\quad k>0$$

e. $x[n]*\delta[n]=x[n],x[n]*u_1[n]=x[n]-x[n-1]$

f. $x[n]*u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]$

g. $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-k]$

2. 线性时不变系统的主要特性

a. 线性

$$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\rightarrow a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$$

$$a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\rightarrow a_1y_1[n]+a_2y_2[n]$$

b. 时不变性

$$x(t-t_0)\rightarrow y(t-t_0),x[n-n_0]\rightarrow y[n-n_0]$$

c. 微(差)分特性

$$dx(t)/dt\rightarrow dy(t)/dt,x[n-k]\rightarrow y[n-k]$$

d. 积分(累加)特性

$$\int_0^t x(\tau)d\tau\rightarrow\int_0^t y(\tau)d\tau,\quad \sum_{k=0}^{N}x[k]\rightarrow\sum_{k=0}^{N}y[k]$$

e. 因果性

若 $t<t_0$ 时，$x(t)=0$，则 $t<t_0$ 时，$y(t)=0$

若 $n<n_0$ 时，$x[n]=0$，则 $n<n_0$ 时，$y[n]=0$

f. 无记忆性

$$y(t)=Kx(t),\ y[n]=Kx[n]\quad K\text{为常数}$$

g. 可逆性

$$h(t)*h_1(t)=\delta(t),h[n]*h_1[n]=\delta[n]$$

式中 $h_1(t)$ 与 $h_1[n]$ 分别为 $h(t)$ 与 $h[n]$ 的逆系统。

h. 稳定性

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)|d\tau<\infty,\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|h[k]|<\infty$$

i. 冲激响应与阶跃响应的关系

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau,h(t)=ds(t)/dt$$

$$s[n]=u[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k],h[n]=s[n]-s[n-1]$$

j. 卷积特性

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau=x(t)*h(t)$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]x[n-k]=x[n]*h[n]$$

$$x(t)*h(t)=h(t)*x(t),x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$$

$$x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]=[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)$$

$$x[n]*(h_1[n]*h_2[n])=(x[n]*h_1[n])*h_2[n]$$

$$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]=[x(t)*h_1(t)]+[x(t)*h_2(t)]$$

$$x[n]*(h_1[n]+h_2[n])=(x[n]*h_1[n])+(x[n]*h_2[n])$$

3. 信号 $x(t)$ 与其偶部 $x_e(t)$ 及奇部 $x_0(t)$ 的关系

a. $x(t)=x_0(t)+x_e(t),x[n]=x_0[n]+x_e[n]$

b. $x_e(-t)=x_e(t), x_0(-t)=-x_0(t)$

$x_e[-n]=x_e[n], x_0[-n]=-x_0[n]$

c. $x_e(t)=\dfrac{x(t)+x(-t)}{2},\ x_0(t)=\dfrac{x(t)-x(-t)}{2}$

$x_e[n]=\dfrac{x[n]+x[-n]}{2},\ x_0[n]=\dfrac{x[n]-x[-n]}{2}$

d. 若 $t<0$ 时 $x(t)=0$，则 $x(t)=2x_e(t)=2x_0(t)$

若 $n<0$ 时 $x[n]=0$，则 $x[n]=2x_e[n]=2x_0[n]$

e. $\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x_e^2(t)dt+\int_{-\infty}^{+\infty}x_0^2(t)dt,\quad t>0$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x^2[n]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_e^2[n]+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_0^2[n],\quad n>0$$

4. 信号的基本运算

a. 相加：任一瞬间的和信号等于同一瞬间相加信号瞬时值之和。

$$y(t)=x_1(t)+x_2(t),\ y[n]=x_1[n]+x_2[n]$$

b. 相乘：任一瞬间的乘信号等于同一瞬间相乘信号瞬时值之积。

$$y(t)=x_1(t)x_2(t),\ y[n]=x_1[n]x_2[n]$$

c. 幅度加权：信号的幅值在每一时刻都乘以常数 a。

$$y(t)=ax(t),\ y[n]=ax[n]$$

d. 反褶：以变量 $-t$（或 $-n$）代替 $x(t)$（或 $x[n]$）中的独立变量 t（或 n）。

$$y(t)=x(-t),\ y[n]=x[-n]$$

e. 时移：以变量 $t-t_0$（或 $n-n_0$）代替 $x(t)$（或 $x[n]$）中的独立变量 t（或 n）。$t_0>0$（或 $n_0>0$）时为右移，$t_0<0$（或 $n_0<0$）时为左移。

$$y(t)=x(t-t_0), y[n]=x[n-n_0]$$

f. 标度变换：以变量 at（或 n/k）代替 $x(t)$（或 $x[n]$）中的独

立变量 t（或 n）。

$$y(t)=x(at)\begin{cases}|a|>1\text{ 时，表示 } x(t)\text{ 在时间轴上被压缩}\\ \quad 1/|a|\text{ 倍，}\\ |a|<1\text{ 时，表示 } x(t)\text{ 在时间轴上被扩展}\\ \quad |a|\text{ 倍}\end{cases}$$

$$x_k[n]=\begin{cases}x[n/k]\text{，若 } n \text{ 是 } k \text{ 的整倍数。}\\ 0 \qquad\quad \text{若 } n \text{ 不是 } k \text{ 的整倍数。}\end{cases}$$

其中 $x_k[n]$ 是从原信号 $x[n]$ 的相继值之间加入$(k-1)$个零点而构成。

g. 微(差)分：

$$y(t)=dx(t)/dt, y[n]=x[n]-x[n-1]$$

h. 积分(累加)：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau, y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

i. 卷积：

$$y(t)=x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau$$

$$y[n]=x_1[n]*x_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_1[n]x_2[n-k]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_2[n]x_1[n-k]$$

j. 相关

$$\phi_{xx}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t+\tau)x(\tau)d\tau=x(t)*x(-t)$$

$$\phi_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t+\tau)y(\tau)d\tau=x(t)*y(-t)$$

$$\phi_{xx}[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]x[n+k]=x[n]*x[-n]$$

$$\phi_{xy}[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]y[n+k]=x[n]*y[-n]$$

5. 几何级数的求值公式

a. $\sum_{n=0}^{n_2}\alpha^n=\begin{cases}\dfrac{1-\alpha^{n_2+1}}{1-\alpha}, & \alpha\neq 1\\ n_2+1, & \alpha=1\end{cases}$

b. $\sum_{n=n_1}^{n_2}\alpha^n=\begin{cases}\dfrac{\alpha^{n_1}-\alpha^{n_2+1}}{1-\alpha}, & \alpha\neq 1,\ 0<n_1\leqslant n_2\\ n_2-n_1+1, & \alpha=1\end{cases}$

c. $\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^n=\dfrac{1}{1-\alpha},\quad |\alpha|<1$

d. $\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha^n=\dfrac{\alpha}{1-\alpha},\quad |\alpha|<1$

e. $\sum_{n=n_1}^{+\infty}\alpha^n=\dfrac{\alpha^{n_1}}{1-\alpha},\quad |\alpha|<1$

6. 傅氏变换、拉氏变换和 $\mathscr{Z}$ 变换

a. LTI 系统*对复指数的响应

(i) $e^{st}\to H(s)e^{st},\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{s_k t}\to\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k H(s_k)e^{s_k t}$

其中

$$H(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

(ii) $z^n\to H(z)z^n,\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k z_k^n\to\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k H(z_k)z_k^n$

其中

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]z^{-n}$$

* LTI 系统——Linear Time Invariant System,(线性时不变系统)。本书中常用此缩写符号。

b. 傅氏级数公式

(i) $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

$$=a_0+2\sum_{k=1}^{+\infty}[B_k\cos k\omega_0 t-C_k\sin k\omega_0 t]$$

其中

$$a_0=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)dt,\quad a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$B_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)\cos k\omega_0 t dt,$$

$$C_k=-\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)\sin k\omega_0 t dt$$

(ii) $x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$

其中

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}{}^{*}x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$$

c. 傅氏变换公式

非周期信号:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$\left(\text{条件: }\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt<\infty\ \text{或}\ \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt<\infty\right)$

周期信号:

$$X(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0),\qquad \omega_0=2\pi/T_0$$

---

* $\sum_{n=\langle N\rangle}$ 表示在一个周期N的区间内求和。

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

d. 拉氏变换公式

双边：$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

单边：$X_l(s) = \int_{0}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X_l(s)e^{st}ds$$

$\left(\text{双边条件：}\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|dt < \infty\right)$

e. *z* 变换公式

双边：$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz$$

$$= \sum_m [X(z)z^{n-1}\text{在 } c \text{ 内极点的留数}]$$

单边：$X_l(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n}$，

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X_l(z)z^{n-1}dz$$

$$= \sum_m [X_l(z)z^{n-1}\text{在 } c \text{ 内极点的留数}]$$

$\left(\text{双边条件：}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty\right)$

f. 典型信号的三种变换公式

(i) $\delta(t)\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}1$，$\delta[n]\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}1$

$$\delta(t) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} 1, \quad -\infty < \mathrm{Re}\{s\} < +\infty$$

$$\delta[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} 1, \quad 0 \leqslant |z| \leqslant +\infty$$

(ii) $\delta(t - t_0) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0}$, $\delta[n - n_0] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\Omega n_0}$

$$\delta(t - t_0) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} e^{-st_0}, \quad -\infty < \mathrm{Re}\{s\} < +\infty$$

$$\delta[n - n_0] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} z^{-n_0}, \quad 0 \leqslant |z| \leqslant +\infty$$

（当 $n_0 > 0$ 时，除去原点）

(iii) $u(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$,

$$u[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\Omega - 2\pi k)$$

$$u(t) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} 1/s, \quad 0 < \mathrm{Re}\{s\}$$

$$u[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad 1 < |z|$$

(iv) $e^{-at}u(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{a + j\omega}$, $\mathrm{Re}\{a\} > 0$

$$a^n u[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}, \quad |a| < 1$$

$$e^{-at}u(t) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s + a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$a^n u[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

(v) $te^{-at}u(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{(a + j\omega)^2}$, $\mathrm{Re}\{a\} > 0$

$$na^n u[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \frac{ae^{-j\Omega}}{(1 - ae^{-j\Omega})^2}, \quad |a| < 1$$

$$te^{-at}u(t) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s + a)^2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$na^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

(vi) $$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\Omega - 2\pi k/N)$$

(vii) $$e^{j\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$e^{j\Omega_0 n} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l)$$

(viii) $$1 \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega)$$

$$1 \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi l)$$

(ix) $$\cos\omega_0 t \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\cos\Omega_0 n \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) + \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l)\}$$

$$\cos\omega_0 t \cdot u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$\cos\Omega_0 n \cdot u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1 - \cos\Omega_0 \cdot z^{-1}}{1 - 2\cos\Omega_0 \cdot z^{-1} + z^{-2}} \quad |z| > 1$$

(x) $$\sin\omega_0 t \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\sin\Omega_0 n \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) - \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l)\}$$

$$\sin\omega_0 t \cdot u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$\sin \Omega_0 n \cdot u[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{\sin \Omega_0 \cdot z^{-1}}{1 - 2\cos \Omega_0 \cdot z^{-1} + z^{-2}}, \quad |z| > 1$$

(xi) $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k/T)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kT] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k/N)$$

(xii) $$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} 2T_1 \sin c\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right) = \frac{2\sin \omega T_1}{\omega}$$

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leqslant N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \frac{\sin[\Omega(N_1 + 1/2)]}{\sin(\Omega/2)}$$

7. 傅氏变换、拉氏变换和$\mathscr{Z}$变换的主要特性

a. 线性

$$ax(t) + by(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} aX(\omega) + bY(\omega)$$

$$ax[n] + by[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} aX(\Omega) + bY(\Omega)$$

$$ax(t) + by(t) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} aX(s) + bY(s),$$
$$\max(R_{x_1}, R_{y_1}) < \mathrm{Re}\{s\} < \min(R_{x_2}, R_{y_2})$$

$$ax[n] + by[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} aX(z) + bY(z),$$
$$\max(R_{x_1}, R_{y_1}) < |z| < \min(R_{x_2}, R_{y_2})$$

b. 时移

$$x(t - t_0) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

$$x[n - n_0] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

$$x(t - t_0) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} e^{-st_0} X(s) \qquad R_{x_1} < \mathrm{Re}\{s\} < R_{x_2}$$

$$x[n - n_0] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} z^{-n_0} X(z), \quad R_{x_1} < |z| < R_{x_2}$$

单边 $\mathscr{Z}$ 变换时

$$x[n-n_0]u[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} z^{-n_0}\left\{X_I(z)+\sum_{k=-n_0}^{-1}x[k]z^{-k}\right\}$$

$$x[n+n_0]u[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} z^{n_0}\left\{X_I(z)-\sum_{k=0}^{n_0-1}x[k]z^{-k}\right\}$$

c. 频移

$$e^{j\omega_0 t}x(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega-\omega_0)$$

$$e^{j\Omega_0 n}x[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega-\Omega_0)$$

$$e^{s_0 t}x(t) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} X(s-s_0) \qquad R_{x_1} < \mathrm{Re}\{s+s_0\} < R_{x_2}$$

$$e^{j\Omega_0 n}x[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X(e^{-j\Omega_0}\cdot z) \qquad R_{x_1} < |z| < R_{x_2}$$

$$z_0^n x[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X(z/z_0) \qquad |z_0|R_{x_1} < |z| < |z_0|R_{x_2}$$

$$a^n x[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X(a^{-1}z) \qquad |a|R_{x_1} < |z| < |a|R_{x_2}$$

$$(-1)^n x[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X(-z)$$

d. 反褶

$$x(-t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(-\omega)$$

$$x[-n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(-\Omega)$$

$$x(-t) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} X(-s) \qquad R_{x_2} < \mathrm{Re}\{s\} < R_{x_1}$$

$$x[-n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X(z^{-1}) \qquad \frac{1}{R_{x_2}} < |z| < \frac{1}{R_{x_1}}$$

e. 标度变换

$$x(at) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|}X(\omega/a)$$

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & n \text{ 为 } k \text{ 的整倍数} \\ 0, & n \text{ 不是 } k \text{ 的整倍数} \end{cases} \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(k\Omega)$$

$$x(at) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X(s/a) \qquad R_{x_1} < \mathrm{Re}\{s/a\} < R_{x_2}$$

$$a^n x[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X(a^{-1}z) \qquad |a| R_{x_1} < |z| < |a| R_{x_2}$$

f. 卷积

$$x(t) * y(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega) Y(\omega)$$

$$x[n] * y[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega) Y(\Omega)$$

$$x(t) * y(t) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} X(s) Y(s)$$

$$\max(R_{x_1}, R_{y_1}) < \mathrm{Re}\{s\} < \min(R_{x_2}, R_{y_2})$$

$$x[n] * y[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X(z) Y(z)$$

$$\max(R_{x_1}, R_{y_1}) < |z| < \min(R_{x_2}, R_{y_2})$$

g. 微分(差分)

$$\frac{d}{dt} x(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} j\omega X(\omega)$$

$$x[n] - x[n-1] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} (1 - e^{-j\Omega}) X(\Omega)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} sX(s) \qquad \text{至少 } R_{x_1} < \mathrm{Re}\{s\} < R_{x_2}$$

$$x[n] - x[n-1] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} (1 - z^{-1}) X(z)$$

单边拉氏变换

$$\frac{d}{dt} x(t) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} sX_I(s) - x(0^-)$$

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} s^n X_I(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} x^{(i)}(0^-)$$

h “频”域微分

$$tx(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} j \frac{d}{d\omega} X(\omega), \quad (-jt)^n x(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \frac{d^n}{d\omega^n} X(\omega)$$