不等式与线性规划初步

吴德风

科学普及出版社

BUDENGSHI YU XIANXINGGUIHUA CHUBU

不等式与线性规划初步

吴 德 风

科 学 普 及 出 版 社

内 容 提 要

本书共分两大部分。第一部分对（初等）不等式做了较为系统的介绍和论证，并通过典型实例讲解如何求解一元一次、一元二次、分式、无理式、指数式、对数式、三角式等许多不等式的方法，以及不等式的一些应用。第二部分介绍了线性规划的初步知识，包括两个变量的线性规划问题的解法，物资调运的两种特殊解法——图上作业法和表上作业法。书中选编了一定数量的习题，并附有答案。

本书内容由浅入深，文字通俗易懂，可作为中学生和数学爱好者的阅读材料，也可作为中学数学教师的参考资料。

不等式与线性规划初步

[illegible]德风

责任编辑：吴之静

封面设计：窦桂芳

*

科学普及出版社出版（北京魏公村白石桥路32号）

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

北京怀柔平义分印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米 1/32　印张：5 3/4　字数：126 千字

1983年11月第1版　1983年11月第1次印刷

印数：1—20,000册　定价：0.56元

统一书号：13051·1343　本社书号：0607

前　言

不等式是初等数学中较为重要的一部分内容。为了帮助中学生和数学爱好者学习、掌握这方面的知识，本书在现行中学数学教材的基础上，较为详细地介绍了不等式的知识以及有关不等式的一些应用。通过学习这些内容，也会有助于对代数式、方程、函数、指数、对数、三角和解析几何等方面知识的加深理解；并且还能为进一步学习数学奠定必要的基础。

介绍线性规划初步知识的目的：一方面是使读者深入了解不等式的一些应用；另一方面是由于这门学科应用广泛，借此可以启发读者的兴趣，了解数学与生产实践的密切关系，从而进一步认识到：努力学好数学，是可以直接地、更好地为四个现代化服务的。

在编写过程中，北京航空学院李心灿和王日爽二位同志对本书作了详细审阅，提出了不少宝贵意见；祝润业同志和陈汉卿同志给了热情帮助，在此谨向他们表示衷心感谢。

由于水平所限，书中难免存有错误或不妥之处，恳希读者批评指正。

1982 年 1 月

目　　录

第一章　不等式

第二章　线性规划初步

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　不　等　式

一、不等式的基本知识

1.1　不等式的几个概念

用不等号“$>$”或“$<$”连结两个代数式所成的式子，叫做不等式.

如果把 $f(x)$、$\phi(x)$表示为 x 的代数式，则 $f(x)>\phi(x)$ 或 $f(x)<\phi(x)$就表示含有未知量 x 的不等式. 不等号同向的两个不等式，叫做同向不等式；不等号异向的两个不等式，叫做异向不等式. 例如，$x^2-2>x+1$ 与 $2x+5>3-x$ 是同向不等式；$3x-2>x+1$ 与 $5-x<x+1$ 是异向不等式.

使不等式两端均有意义的所有未知量的值，叫做不等式的允许值.

例如：

$3x-2>2x+1$ 的允许值为所有实数；

$\dfrac{x}{x-1}>2x-3$的允许值为 $x\neq1$ 的所有实数.

再看下面几个不等式：

(1) $2+x^2>x^2$ 它的允许值为所有实数，而且任何实数均能使不等式成立. 这种不等式叫做绝对不等式.

(2) $2x-1<2+x$它的允许值为所有实数，但是只有$x<3$的数值，才能使不等式成立. 这种不等式叫做条件不等式.

(3) $2+x^2<x^2$ 它的允许值为所有实数，但是没有数值能使不等式成立。这种不等式叫做矛盾不等式。

不等式允许值中的所有使不等式成立的数值，叫做不等式的解。

例如：

$2+x^2>x^2$ 的解为所有实数；

$2x-1<x+2$ 的解为 $x<3$；

$2+x^2<x^2$ 无解。

解不等式，就是在不等式允许值的范围内，经过一定的运算，求出不等式解的过程。

1.2 不等式的基本性质

前面讲到，解不等式要经过运算，使不等式变换形式，但是必须要以不等式的基本性质作为依据，才能保证不等式变换形式的正确性。

不等式有以下一些基本性质：

性质 1 如果 $a>b$，$b>c$，那末 $a>c$。

如果 $a>b$，$b>c$，那末 $a-b$ 和 $b-c$ 都是正数。因为 $a-c=(a-b)+(b-c)$，所以 $a-c$ 是正数。

$$\therefore \quad a>c.$$

性质 2 如果 $a>b$，那末 $a+c>b+c$。

如果 $a>b$，那末 $a-b$ 是一个正数。因为 $(a+c)-(b+c)=a-b$，所以 $(a+c)-(b+c)$ 是一个正数。

$$\therefore \quad a+c>b+c.$$

推论 1 不等式中任何一项可以把它的符号变成相反的符号后，从一边移到另一边。

例如，如果 $a-b>c$，那末 $a>b+c$；如果 $a+b<d$，那末 $a<d-b$。

推论 2 如果 $a>b$，$c>d$，那末 $a+c>b+d$.

这是因为：根据性质 2 可得 $a+c>b+c, b+c>b+d$，再根据性质 1 可得 $a+c>b+d$.

一般地说，如果 $a_1\geqslant b_1$，$a_2\geqslant b_2, \cdots, a_n\geqslant b_n$，那末

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant b_1+b_2+\cdots+b_n.$$

推论 3 如果 $a\geqslant b$，$c<d$，那末 $a-c>b-d$.

这是因为 $c<d$，所以 $d>c$，再根据上面的推论 2 可得 $a+d>b+c$，移项就得 $a-c>b-d$.

必须注意，从 $a>b$，$c>d$，不能推得 $a-c>b-d$. 例如，由 $5>4$，$3>1$，不能推得 $5-3>4-1$.

性质 3 如果 $a>b$，$c>0$，那末 $ac>bc$；如果 $a>b$，$c<0$，那末 $ac<bc$.

如果 $a>b$，那末 $a-b$ 是一个正数，因为 $ac-bc=c(a-b)$，所以当 $c>0$ 时，$ac-bc$ 是一个正数，$\therefore\ ac>bc$；当 $c<0$ 时，$ac-bc$ 是一个负数，$\therefore\ ac<bc$.

推论 1 如果 $a>b>0$，$c>d>0$，那末 $ac>bd$.

这是因为：根据性质 3 可得 $ac>bc$，$bc>bd$，再根据性质 1 可得 $ac>bd$.

一般地说，如果 $a_1\geqslant b_1>0$，$a_2\geqslant b_2>0, \cdots, a_n\geqslant b_n>0$，那末 $a_1\cdot a_2\cdots a_n\geqslant b_1\cdot b_2\cdots b_n$.

推论 2 如果 $a>b>0$，那末 $a^n>b^n$（n 是大于 1 的整数）.

推论 3 如果 $a\geqslant b>0$，$0<c<d$，那末$\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$.

这是因为 $0<c<d$，所以 $d>c>0$，再根据上面的推论 1 可得 $ad>bc$，两边都乘以正数$\dfrac{1}{cd}$，就得$\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$.

必须注意，从 $a>b>0$，$c>d>0$，不能推得 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$. 例如，从 $6>4$，$3>2$，不能推得 $\frac{6}{3}>\frac{4}{2}$.

推论 4 如果 $a>b>0$，那末 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（n 是大于 1 的整数）。

这是因为：$\sqrt[n]{a}$ 和 $\sqrt[n]{b}$ 的大小关系，只有三种可能：$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$，$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$，$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$. 但从 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$，$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$ 分别要得出和已知条件 $a>b$ 矛盾的 $a<b$，$a=b$ 的结论. 因此，$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

这里，必须着重指出：推论 1—4 中的 a、b、c、d 都是正数，如果忽略了这个条件，往往会引出错误的结果. 例如，根据对数的性质，可得 $\lg\frac{1}{4}>\lg\frac{1}{5}$，因为 $2>1$，若把这两个不等式的两边分别相乘，则得

$$2\lg\frac{1}{4}>\lg\frac{1}{5},$$

即
$$\lg\left(\frac{1}{4}\right)^2>\lg\frac{1}{5},$$

$$\lg\frac{1}{16}>\lg\frac{1}{5},$$

从而得出

$$\frac{1}{16}>\frac{1}{5}.$$

这个错误结果的产生正是由于在利用推论 1 时，忽略了 a、b、c、d 都是正数这个条件. 因为 $\lg\frac{1}{4}$ 和 $\lg\frac{1}{5}$ 都是负数.

1.3 同解不等式

在解不等式时，根据不等式的一些基本性质，可以将不

等式变换形式．变换形式后的不等式的解是不是原不等式的解呢？这就需要讨论不等式的同解性．

如果 $f(x)>\phi(x)$ 的所有解，都是 $f_1(x)>\phi_1(x)$ 的解，而 $f_1(x)>\phi_1(x)$ 的所有解，都是 $f(x)>\phi(x)$ 的解，那末把这两个不等式，叫做同解不等式．

同解不等式有以下几个性质：

1．如果对不等式 $f(x)>\phi(x)$ 的允许值，代数式 $G(x)$ 都有意义，那末不等式

$$f(x)>\phi(x) \quad 与 \quad f(x)+G(x)>\phi(x)+G(x)$$

同解．

设 α 为适合 $f(x)>\phi(x)$ 的任意值，即 $f(\alpha)>\phi(\alpha)$，由不等式的基本性质，可知 $f(\alpha)+G(\alpha)>\phi(\alpha)+G(\alpha)$，这就是说，$\alpha$ 也适合 $f(x)+G(x)>\phi(x)+G(x)$；反过来，设 β 是适合 $f(x)+G(x)>\phi(x)+G(x)$ 的任意值，即 $f(\beta)+G(\beta)>\phi(\beta)+G(\beta)$，由不等式的基本性质，可知 $f(\beta)>\phi(\beta)$，这就是说，β 也适合 $f(x)>\phi(x)$，因此这两个不等式

$$f(x)>\phi(x) \quad 与 \quad f(x)+G(x)>\phi(x)+G(x)$$

同解．

由此性质可知，在解不等式的过程中，可以把它的任何一项改变符号后，从不等号的一边移到另一边，这种变换得到的不等式与原不等式同解．例如，不等式

$$4x-2>x+5$$

移项后，得

$$3x-2>5$$

这个不等式 $3x-2>5$ 与 $4x-2>x+5$ 同解．

应用这个性质时，必须注意 $G(x)$ 给定的条件．例如，

不等式$x>1$与$x+\frac{1}{x-3}>1+\frac{1}{x-3}$不是同解的. 因为不等式$x>1$的允许值为所有实数，而$\frac{1}{x-3}$在$x=3$时，却没有意义。

2. 如果对于不等式$f(x)>\phi(x)$的允许值，$G(x)$的值都为正，那末$f(x)>\phi(x)$与$f(x)\cdot G(x)>\phi(x)\cdot G(x)$同解；如果$G(x)$的值为负，那末$f(x)>\phi(x)$与$f(x)\cdot G(x)<\phi(x)\cdot G(x)$同解.

设α为适合不等式$f(x)>\phi(x)$的任意值，则$f(\alpha)>\phi(\alpha)$，而$G(\alpha)$为正，由不等式的基本性质得$f(\alpha)\cdot G(\alpha)>\phi(\alpha)\cdot G(\alpha)$，这就是说，$\alpha$也适合不等式$f(x)G(x)>\phi(x)G(x)$；反过来，设$\beta$为适合不等式$f(x)G(x)>\phi(x)G(x)$的任意值，则$f(\beta)\cdot G(\beta)>\phi(\beta)\cdot G(\beta)$，而$G(\beta)$为正，由不等式的基本性质得$f(\beta)>\phi(\beta)$，这就是说，$\beta$也适合不等式$f(x)>\phi(x)$，因此这两个不等式

$$f(x)>\phi(x) \quad 与 \quad f(x)\cdot G(x)>\phi(x)\cdot G(x)$$

同解。

同理可证得性质的第二部分.

例如，

$$2x-1>x \quad 与 \quad (2x-1)(x^2+1)>x(x^2+1)$$

同解；

$$2x-1>x \quad 与 \quad (2x-1)(-x^2-2)<x(-x^2-2)$$

同解.

而　$2x+1>x$　与　$(2x+1)(x-1)^2>x(x-1)^2$不同解，因为$x=1$时，$(x-1)^2=0$，所以1不是不等式$(2x+1)(x-1)^2>x(x-1)^2$的解，而1却是不等式$2x+1>x$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

的解。

3．不等式 $f(x)\cdot\phi(x)>0$ 与下面两个不等式组同解

(1) $\begin{cases}f(x)>0,\\ \phi(x)>0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}f(x)<0,\\ \phi(x)<0.\end{cases}$

设 α 为适合不等式 $f(x)\cdot\phi(x)>0$ 的任意值，则 $f(\alpha)\cdot\phi(\alpha)>0$，因而 $f(\alpha)$ 和 $\phi(\alpha)$ 都大于零或者都小于零，所以 α 是不等式组(1)或(2)的解；反过来，设 β 为适合不等式组(1)或(2)的任意值，则有

$$\begin{cases}f(\beta)>0,\\ \phi(\beta)>0;\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}f(\beta)<0,\\ \phi(\beta)<0.\end{cases}$$

由不等式的基本性质，均可得 $f(\beta)\cdot\phi(\beta)>0$，这就是说，$\beta$ 也适合不等式 $f(x)\cdot\phi(x)>0$．所以，不等式 $f(x)\cdot\phi(x)>0$ 与不等式组

(1) $\begin{cases}f(x)>0,\\ \phi(x)>0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}f(x)<0,\\ \phi(x)<0.\end{cases}$

同解．

同理可证得不等式 $f(x)\cdot\phi(x)<0$ 与下面两个不等式组

(3) $\begin{cases}f(x)>0,\\ \phi(x)<0;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}f(x)<0,\\ \phi(x)>0.\end{cases}$

同解．

根据上述性质可知：

不等式 $(x+1)(x-3)>0$ 与不等式组

(1) $\begin{cases}x+1>0,\\ x-3>0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x+1<0,\\ x-3<0.\end{cases}$

同解．

不等式 $(2x-1)(x+1)<0$ 与不等式组

(1) $\begin{cases}2x-1>0,\\x+1<0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x-1<0,\\x+1>0.\end{cases}$

同解.

4. 不等式$\dfrac{f(x)}{\phi(x)}>0$与下面两个不等式组同解

(1) $\begin{cases}f(x)>0,\\\phi(x)>;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}f(x)<0,\\\phi(x)<0.\end{cases}$

设α为适合不等式$\dfrac{f(x)}{\phi(x)}>0$的任意值，则$\dfrac{f(\alpha)}{\phi(\alpha)}>0$，因而$f(\alpha)$和$\phi(\alpha)$都大于零或者都小于零，所以$\alpha$是不等式组(1)或(2)的解；反过来，设$\beta$为适合不等式组(1)或(2)的任意值，则有

$$\begin{cases}f(\beta)>0,\\\phi(\beta)>0;\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}f(\beta)<0,\\\phi(\beta)<0.\end{cases}$$

由不等式的基本性质，均可得$\dfrac{f(\beta)}{\phi(\beta)}>0$，这就是说，$\beta$也适合不等式

$$\frac{f(x)}{\phi(x)}>0.$$

所以，不等式$\dfrac{f(x)}{\phi(x)}>0$与不等式组

(1) $\begin{cases}f(x)>0,\\\phi(x)>0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}f(x)<0,\\\phi(x)<0.\end{cases}$

同解.

同理可证得，不等式$\dfrac{f(x)}{\phi(x)}<0$与下面两个不等式组

(3) $\begin{cases}f(x)>0,\\\phi(x)<0;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}f(x)<0,\\\phi(x)>0.\end{cases}$

同解。

根据上述性质可知：

不等式$\dfrac{x-1}{x+2}>0$与不等式组

(1) $\begin{cases}x-1>0,\\x+2>0;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x-1<0,\\x+2<0,\end{cases}$

同解.

不等式$\dfrac{2x+1}{x-1}<0$与不等式组

(1) $\begin{cases}2x+1>0,\\x-1<0;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x+1<0,\\x-1>0.\end{cases}$

同解.

二、不 等 式 的 证 明

证明一个不等式，就是要证明所给的不等式对于其中所含字母的所有允许值都成立．下面介绍几种证明方法.

2.1 比较法

在比较两个实数 a 和 b 的大小时，如果 $a-b$ 为正，那末 $a>b$；如果 $a-b$ 为负，那末 $a<b$；如果 $a-b$ 为零，那末 $a=b$. 在不等式证明中同样可以采用，这种方法叫做比较法.

例 1　已知：$a>0$，$b>0$.

求证：$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

证：由　　$\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$

$$=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

$\because\quad a>0,\ b>0.\ \therefore\quad (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0.$

则 $\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqslant 0$，

所以 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$

这个不等式表明了两个正数 a、b 的算术平均值 $\dfrac{a+b}{2}$ 不小于它们的几何平均值 $\sqrt{ab}$. 这是一个很有用的不等式，希读者注意.

例 2 已知：$a>0$，$b>0$，并且 $a\neq b$.

求证：$a^4+b^4>a^3b+ab^3$.

证：
$$\begin{aligned}&a^4+b^4-(a^3b+ab^3)\\&=a^4-a^3b+b^4-ab^3\\&=a^3(a-b)+b^3(b-a)\\&=(a-b)(a^3-b^3)\\&=(a-b)^2(a^2+ab+b^2).\end{aligned}$$

$\because\quad a>0,\ b>0$，且 $a\neq b$.

$\therefore\quad (a-b)^2>0,\ (a^2+ab+b^2)>0$，

则 $(a-b)^2(a^2+ab+b^2)>0.$

所以 $a^4+b^4>a^3b+ab^3.$

例 3 若两个角 α，β 都是正锐角时，求证：

$$\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta.$$

证：
$$\begin{aligned}&\sin(\alpha+\beta)-(\sin\alpha+\sin\beta)\\&=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta-\sin\alpha-\sin\beta\\&=\sin\alpha(\cos\beta-1)+\sin\beta(\cos\alpha-1).\end{aligned}$$

$\because$ α、β 都是正锐角，

$\therefore$ $\begin{cases}\sin\alpha>0,\\ \sin\beta>0,\end{cases}$ $\begin{cases}\cos\beta-1<0,\\ \cos\alpha-1<0,\end{cases}$

于是 $\sin\alpha(\cos\beta-1)<0$,

$\sin\beta(\cos\alpha-1)<0$,

$\therefore$ $\sin\alpha(\cos\beta-1)+\sin\beta(\cos\alpha-1)<0$.

即 $\sin(\alpha+\beta)-(\sin\alpha+\sin\beta)<0$.

所以 $\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$.

由上面各例题可以看出，用比较法证明不等式，其步骤是先求差，然后变形，最终通过比较做出判断．整个过程关键在于变形，一般常采用分解因式、配方等方法．

2.2 分析法

分析法就是从要证明的结论出发，一步一步地探索下去，最后达到命题的已知条件（或达到一个明显成立的不等式）．

例 4 已知：a、b、c 为互不相等的实数．

求证：$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$.

证：要证 $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$ 成立，

只需证 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca>0$ 成立，

即 $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca>0$ 成立，

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$ 成立．

$\because$ $a\neq b\neq c$,

$\therefore$ $(a-b)^2>0$, $(b-c)^2>0$, $(c-a)^2>0$.

由此逆推，即可证得 $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$.

应当注意，在推导过程中的每一步推导，都必须是可逆的，即由 A 推得 B 的一步推导，如果倒过来也可以由 B 推得 A，那末这个推导过程就是可逆的．

例 5　求证：$\sqrt{5}+\sqrt{7}>1+\sqrt{15}$。

证：要证　$\sqrt{5}+\sqrt{7}>1+\sqrt{15}$

只需证　$12+2\sqrt{35}>16+2\sqrt{15}$，

即　$\sqrt{35}>2+\sqrt{15}$，

$35>19+4\sqrt{15}$，

$4\sqrt{15}<16$，

$\sqrt{15}<4$，

$15<16$。

由此逆推，可证得　$\sqrt{5}+\sqrt{7}>1+\sqrt{15}$。

例 6　已知：a、b、m 均为正数，且 $a<b$。

求证：$\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$。

证：假定 $\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$ 成立，两边都乘以正数 $b(b+m)$，得

$$ab+bm>ab+am,$$

即　$bm>am$，

两边各除以正数 m，得　$b>a$。

由此逆推，可证得　$\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$。

在用分析法证明不等式时，常常会出现一些问题。下面看一个例子：

试证：$\sqrt{6}+\sqrt{7}>\sqrt{5}+\sqrt{8}$。

证：∵　$\sqrt{6}+\sqrt{7}>\sqrt{5}+\sqrt{8}$，

∴　$(\sqrt{6}+\sqrt{7})^2>(\sqrt{5}+\sqrt{8})^2$。

即　$13+2\sqrt{42}>13+2\sqrt{40}$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com