摄动方法

——及其在某些力学问题中的应用

顾德淦

高等教育出版社

摄动方法

——及其在某些力学问题中的应用

顾德淦

高等教育出版社

(京)112号

本书是学习摄动方法的入门书籍。

全书共七章，分别讲述摄动方法的基本概念，坐标摄动与参数摄动，正则摄动与奇异摄动，PLK 方法，渐近展开匹配方法，多重尺度方法及 KBM 方法。

本书可作为高等学校摄动方法课程的教材，亦可供学习摄动方法的大学生、研究生及工程和科研人员参考。

摄 动 方 法

——及其在某些力学问题中的应用

顾德淦

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本850×1168 1/32 印张17.375 字数430 000

1993 年 7 月第 1 版 1993 年 7 月第 1 次印刷

印数 0001— 1 171

ISBN 7-04-002275-3/TB·126

定价 10.80元

前　言

摄动方法是一种古老的计算方法。其中心思想是，设法按某种人为的特定步骤，构造出一个渐近的解析表达式，以代替难于求出的微分方程定解问题的精确解。对于构造出的解析表达式希望满足两点基本要求：第一，能反映出微分方程问题解的主要性质；第二，在数值上与欲求的解十分接近。当然，能不能构造出这样的表达式？需要采取什么具体步骤？计算量是否可以接受？构造出的表达式在形式上是否简单可用？能在多大程度上满足上述两点基本要求，等等，是一系列必须考虑的问题。然而，无论在历史上还是在今天，这种方法都表现出是行之有效的，能帮助人们解决许多用其它方法难以解决的问题，甚至有些在科学史上占有极重要地位的问题，也是用摄动方法解决的，如海王星和冥王星的发现便是重要的例证。

随着现代科学技术的迅速发展，过去靠略去高阶小量而把问题线性化的作法，在新的课题中往往不符合需要，大量的研究工作都面临着解决非线性问题的任务，因此需要得力的数学工具。而摄动方法正为解决此类问题提供了一种比较有效的手段。所以，近年来这种有着较长历史的定量方法又受到国际学术界的重视，且应用范围越来越广，从传统的正则摄动方法发展到各种类型的奇异摄动方法，并逐步形成较完整的理论，成为应用数学中的重要方法。

为了使更多的人掌握和应用这种方法，很多学校都感到需要在有关专业高年级学生及研究生中开设“摄动方法”课程。但是现在在高等工科院校讲授这样一门课程的主要困难之一，是缺少适用的教材。目前有关摄动方法的中文版书籍比较少，适宜教学用

的书就更少。因此，笔者尝试编写这部教材，作为学习摄动方法入门之用。

本书共分七章。第一章摄动方法的基本概念，介绍常用符号和渐近，渐近展开等基本概念。第二章坐标摄动与参数摄动，讲述两种摄动方法的提法。其中参数摄动法是全书的主要内容，坐标摄动法只在本章内讲述。第三章正则摄动与奇异摄动，主要讲正则摄动法及其应用，并引出奇异摄动问题。第四、五、六三章是全书的重点。主要讲解变形坐标法、渐近展开匹配法和多重尺度法这三种奇异摄动方法。第七章对重要的KBM方法作简要介绍。需要的总学时数（包括讲授和讨论课等）为40左右。

目前摄动方法在流体力学中的应用成果特别丰富和引人注目，但是为了适应各类专业的需要，书中有意增加了固体力学方面的例子。我国学者在板的计算方面有比较突出的贡献，所以特别增加了板的计算方面的例题。介绍这些内容的目的，是为了帮助学生能够在学过本课程以后，顺利阅读这方面的文献和专著。

北京大学力学系周起钊同志，在百忙中挤出宝贵的时间仔细校阅了书稿，提出许多中肯的意见，仅致深切的谢意。

顾德淦

1986年8月

目　录

第一章　摄动方法的基本概念

§1·1　概述

一个物理问题或工程问题，在抽象成可以用基本定律讨论的简单模型以后，下一步工作就是建立与求解微分方程。所遇到的微分方程绝大多数是很难求得精确解的。在常微分方程里，变系数线性常微分方程以及非线性常微分方程，都只有极少数情况能得到精确解。至于偏微分方程，遇到变系数、非线性或复杂的边界条件，求得实用的精确解就几乎是不可能的。但是有许多方法可以得到近似解，摄动方法就是其中之一。

为了对摄动方法有一个初步的了解，先以简单的代数方程为例，来说明怎样用摄动方法求方程的近似解。

例 1. 考虑二次方程

$$x^2+\varepsilon x-1=0, \tag{1·1·1}$$

式中ε是一个参数。此方程有精确解

$$x_e=-\frac{\varepsilon}{2}\pm\sqrt{\varepsilon^2+4}\text{。} \tag{1·1·2}$$

设有近似解

$$x=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\cdots, \tag{1·1·3}$$

这是一个按参数ε的幂次构造成的展开式。可以只有有限项，也可以有无穷多项。其中$x_0, x_1, x_2, \cdots$是待定常数。为了确定待定常数，把(1·1·3)式代入方程(1·1·1)，得到

$$(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\cdots)^2+\varepsilon(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\cdots)$$

$$-1=0。\quad (1\cdot1\cdot4)$$

把(1·1·4)式展开，并把ε同次幂的系数合并，可以得到

$$(x_0^2-1)+\varepsilon(2x_0x_1+x_0)+\varepsilon^2(x_1^2+x_1+2x_0x_2)+\cdots=0。\quad (1\cdot1\cdot5)$$

如果ε带有一定的任意性，那么ε各次幂的系数必须都是零。因此有

ε^0: $$x_0^2-1=0, \quad (1\cdot1\cdot6)$$

ε^1: $$2x_0x_1+x_0=0, \quad (1\cdot1\cdot7)$$

ε^2: $$2x_0x_2+x_1^2+x_1=0, \quad (1\cdot1\cdot8)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由此解得 $x_0=\pm1$, $x_1=-\dfrac{1}{2}$, $x_2=\pm\dfrac{1}{8}$, $\cdots$。

如果我们只取两项，把方程(1·1·6)、(1·1·7)的解代入(1·1·3)式，便得到

$$x=\pm1-\frac{\varepsilon}{2}+\cdots。\quad (1\cdot1\cdot9)$$

不难看出，如果取无穷多项，即用一个无穷级数的和当作方程的近似解，那么ε必须是一个小量。另一方面，如果ε是一个小量，也无须取很多项，便会得到良好的近似解。

例如，当$\varepsilon=0$时，$x=x_0=\pm1$，这就是精确解。当$\varepsilon=0.1$时，根据(1·1·2)式，x的两个精确解为

$$x_e=-\frac{0.1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4.01}\approx0.95124922,$$

$$x_e=-\frac{0.1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{4.01}\approx-1.05124922。$$

而由(1·1·9)式得到的两个近似解为

$$x=1-\frac{0.1}{2}=0.95,$$

$$x=-1-\frac{0.1}{2}=-1.05。$$

当$\varepsilon=0.05$时，x的两个精确解为 0.97531325，-1.0253125。而两个近似解为 0.975， -1.025 。所以 ε 很小时，误差是很小的。

如果$\varepsilon>1$，例如取$\varepsilon=2$，则x的两个精确解分别是 0.4142 和 -2.4142；而两个近似解分别为 0 和-2。这时近似解的误差就很大了。但是如果取三项，$x=\pm1-\frac{1}{2}\varepsilon\pm\frac{1}{8}\varepsilon^2$，则两个近似解分别为 0.5 和$-2.5$，与精确解又靠近了。这并不是说在$\varepsilon>1$时，项数取得越多越好，只是表明在$\varepsilon$大的时候，项数要很恰当才能有较好的结果。其实，如果$\varepsilon>1$，则只要作变换，令$\varepsilon=\frac{1}{\lambda}$，$\lambda$就是一个小于 1 的量。看下例。

例 2. 考虑方程

$$\varepsilon x^2+x-1=0。\tag{1·1·10}$$

精确解

$$x_\varepsilon=-\frac{1}{2\varepsilon}\pm\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{1+4\varepsilon}。\tag{1·1·11}$$

设近似解为

$$x=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2x_2+\cdots,\tag{1·1·12}$$

把(1·1·12)式代入方程(1·1·10)，得到

$$\varepsilon(x_0+\varepsilon x_1+\cdots)^2+(x_0+\varepsilon x_1+\cdots)-1=0。\tag{1·1·13}$$

把(1·1·13)式展开，合并ε的同次幂的系数使之等于零，得到

$$\varepsilon^0: \qquad x_0-1=0, \qquad x_0=1,\tag{1·1·14}$$

ε^1: $\qquad x_0^2+x_1=0, \qquad x_1=-1, \qquad (1\cdot1\cdot15)$

$\cdots\cdots\cdots$

则只取两项的近似解为

$$x\approx1-\varepsilon, \tag{1·1·16}$$

如果$\varepsilon=0.05$，则近似解为 $x=0.95$，而根据(1·1·11)式求出的精确解为$x_e=0.954451$ 和$x_e=-20.954451$。

显然，用这个方法求近似解，尽管误差不大，却丢掉了一个根。原因是参数ε在方程的最高次项上，当$\varepsilon=0$时，方程的次数要降低，二次方程降为一次方程，$\varepsilon=0$ 是精确解的奇点。而构造的近似解却没有奇点，方程解的奇异性，在近似解中没有得到反映。

对于上述简单方程，只有$\frac{1}{\varepsilon}$这种奇异性，可以作变换，令

$$x=\frac{y}{\varepsilon}。 \tag{1·1·17}$$

把(1·1·17)式代入方程(1·1·10)，得到

$$\frac{y^2}{\varepsilon}+\frac{y}{\varepsilon}-1=0, \qquad 或者 \qquad y^2+y-\varepsilon=0。 \tag{1.1.18}$$

令

$$y=y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2y_2+\cdots。 \tag{1·1·19}$$

把(1·1·19)式代入方程(1·1·18)，有

$$(y_0+\varepsilon y_1+\cdots)^2+(y_0+\varepsilon y_1+\cdots)-\varepsilon=0。 \tag{1·1·20}$$

把(1·1·20)式展开，合并ε的同次幂的系数使之等于零，得到

ε^0: $\qquad y_0^2+y_0=0, \qquad y_0=-1,\ y_0\neq0, \qquad (1\cdot1\cdot21)$

ε^1: $\qquad 2y_0y_1+y_1-1=0, \qquad y_1=-1, \qquad (1\cdot1\cdot22)$

$\cdots\cdots\cdots\cdots。$

只取两项的近似解为

$$y=-1-\varepsilon, \tag{1·1·23}$$

把(1·1·23)式代入(1·1·17)得到

$$x=-\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}。 \tag{1·1·24}$$

在$\varepsilon=0.05$时，得到的近似解为$x=-\frac{1+0.05}{0.05}=-21$，与精确解$-20.954451$很接近。这样丢掉的一个根便又找回来了。

通过这两个简单的代数方程，我们至少可以看出以下几点：

1．对于含有参数ε的方程，当ε是一个小量时，可以用一个ε的幂级数作为近似解。ε越小，则所取的项可以越少，便能获得一定近似程度的结果。

2．如果ε这个小参数在最高次项上，方程就会有奇异性，这时用上述方法求近似解就会丢掉根。为把失去的根找回来，就要作一些变换，或辅以某种技巧。但这种求近似解的方法仍旧是可用的。

3．近似解是由含ε各次幂项构造成的，即

$$x=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\cdots。$$

因为$|\varepsilon|<1$，所以后一项是比前一项高一级的小量。第一项x_0是近似解的基本部分。后边每增加一项，便是增加一项高一级小量的修正项。只要当项数无限增加时和式有极限，并且收敛到精确解，那么近似解便应该是取的项数越多越好。

对于微分方程是否也可以用类似的方法构造出形式相近的近似解？回答是肯定的。只是构造出的解中ε的各次幂前的“系数”是解析表达式，而不是具体的数值，即$x_0, x_1, x_2, \cdots$都是待定函数。为确定这些待定函数，需要解一系列微分方程，因此步骤要烦得多，但是基本的思路和作法却是一样的。我们把这种构造微分方程近似解的方法叫做摄动方法（或渐近方法）。构造出的近似解

表达式，称为微分方程的摄动解(或渐近解)。

随着计算机科学与技术的迅速发展，差分法、有限元法等数值方法得到广泛的应用，成为解决力学问题和各种工程问题的有力工具，但是有时我们仍然希望得到解析解。因为数值方法给出的结果是一个一个孤立的解，不便于分析和比较，不太容易对物理现象得出规律性的认识。又由于数值解对误差难于估计与控制，所以不太可能以数值解作依据进行严格的理论分析。用摄动方法得到的解有清楚的解析结构，因此比较便于作理论分析之用。但是摄动方法能够成为一种行之有效的渐近方法同样与计算机的发展密切相关。在电子计算机得到实际使用以前，一般摄动级数只算到前一、两项，用来对解的性质作初步了解。那时只是把摄动方法当作一种纯解析方法来使用。一旦要进一步考虑级数的更多的项，问题就大大复杂起来，因此很少有算到五项、十项的。例如，1847 年 Stokes 计算了深水中平面周期行波波形的前三项，二十五年以后才算到第五项，又过了四十二年，直到 1914 年 Wilton 才算到第十项。但是 Schwartz 用计算机一下子就算到第一百一十七项，并且纠正了 Wilton 算出的第八项的错误。又例如圆球的 Oseen 阻力公式，Stokes 于 1851 年首先求得第一项，Oseen 于 1910 年得到第二项，Goldstein 于 1929 年算到第六项。Van Dyke 用计算机算到第 24 项，时间为一分钟。所以只有用计算机才能计算出摄动展开式的高阶项，摄动方法才真正成为一种实用的求微分方程近似解的方法。所以摄动方法是解析法和数值法相结合的产物。

摄动方法也有其局限性，使用时也会遇到困难或完全失败。一种常见的情况是小参数选择得不合适。例如复合载荷作用下的弹性薄圆板大挠度问题，在集中力P和均布载荷q反向时，当P与q满足某种条件，可能使中心挠度$w_0=0$(如图 1·1·1 所示)。在这种情况下如果我们选中心挠度w_0作为摄动参数，把挠度按中心挠度

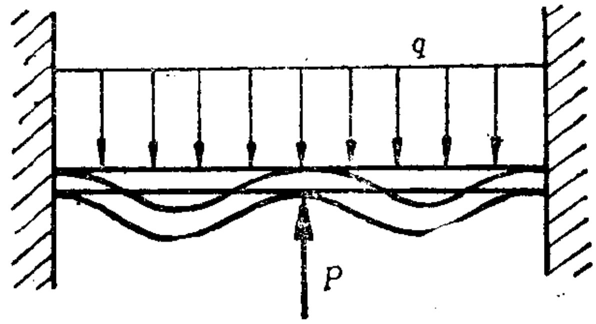

图 1·1·1

的幂次展开，将得不到正确的结果，摄动方法失效。

另一种常见的情况是展开式挑选得不恰当，或者对展开式使用不当。例如函数

$$\sin(\omega+\varepsilon)t,$$

它具有周期$\dfrac{2\pi}{\omega+\varepsilon}$；当$\varepsilon$很小时可以将它展开为级数

$$\sin(\omega+\varepsilon)t=\sin\omega t+\varepsilon t\cos\omega t-\frac{\varepsilon^2t^2}{2!}\sin\omega t$$

$$-\frac{\varepsilon^3t^3}{3!}\cos\omega t+\cdots, \qquad (1\cdot1\cdot25)$$

展开式右端 $t^m\sin\omega t$、$t^m\cos\omega t$ 一些项，称为长期项或永年项，这时展开式的周期性就很难确定了。从考虑函数是否具有周期性的角度看，展开式(1·1·25)的挑选和使用都存在问题。如果采用摄动法时挑选了形如(1·1·25)式的展开式，就必须取无穷多项。如果只取有限项，εt就必须是一个小量，而这就缩小了t的适用范围，往往又不符合所要研究问题的要求。

上述两种情况中出现的困难不是内禀性的，而是因为使用不当。但是有一种情况，摄动方法根本不能使用。例如设有两个浸在水中的气泡，气泡的半径是R，气泡中心间的距离是L，取摄动参数为

$$\varepsilon=\frac{L-2R}{2R}>0,$$

气泡的定常解符合力的平衡条件：

$$R=\frac{2\sigma}{\Delta P}。$$

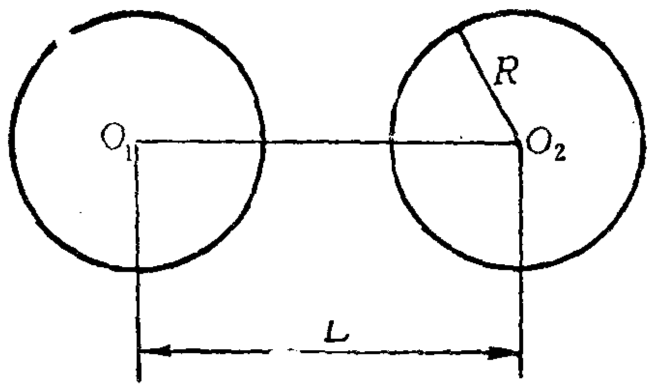

图 1·1·2

式中 σ 是表面张力，ΔP 是气泡的内压力。当 $\varepsilon=0$ 时，两个气泡合成一个。在短时间内会发生两个气泡变成一个气泡的非定常过程，上述 $R=\frac{2\sigma}{\Delta P}$ 这一平衡关系已不存在，因此不能用摄动法。一般地说，当小参数 $\varepsilon\to0$ 时状态发生突跃变化，我们又无法选择另外的无量纲量作为小参数以描述这一过程时，就不可以使用摄动法。

在力学中至少可以指出以下问题，摄动方法有其应用的先例和可能。

1. 在一般力学中

(1) 天体力学(包括行星的有摄运动，三体问题和多体问题，月理问题，等等)；

(2) 非线性振动；

(3) 重刚体定点运动动力学；

(4) 陀螺的理论和应用；