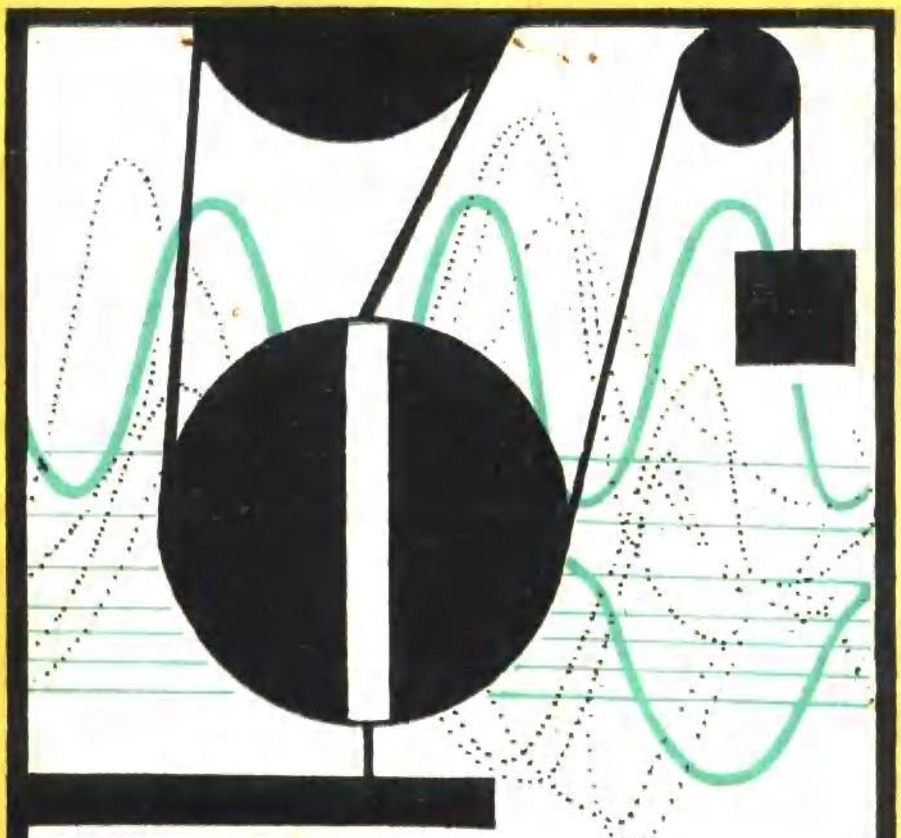
# 大学物理实验

DAXUE WULI SHIYAN

· 张立 主编

· 上海交通大学出版社



# 大学物理实验

张 立 主编

上海交通大学出版社

## 内 容 提 要

本书系根据全国工科物理实验课程指导组1986年制订的教学基本要求编写的。

全书共分六章。第一章诸论，讲述实验误差理论和数据处理的基本知识；第二章介绍八个常用物理量及其测量方法；第三章至第五章编入力学、热学和声学，电磁学，光学和近代物理学共二十五个实验；第六章安排了十三个设计性实验；书末的附录、附表介绍了实验常用仪器设备和有关的物理常数表。

本书可作为工科院校各专业的实验教材，也可供职工大学、业余大学、函授大学、夜大学等选用。

**大 学 物 理 实 验**

张 立 主编

★

上 海 交 通 大 学 出 版 社

（淮海中路1984弄19号）

上海交通大学出版社发行

上海交通大学印刷厂印装

开本 787×1092 毫米 1/16 印张17.5 字数 438,000

1988年2月第1版 1988年2月第1次印刷

印数：1——9,500册

ISBN7-313-00090-1/O4 科目：165-220

定价：2.95 元

# 前　　言

本书是在总结了以往物理实验教学改革经验的基础上，遵照全国工科物理实验课程指导组1986年制订的基本要求，并结合一般工科院校专业设置特点和实验室仪器设备情况而编写的。本书可供工科院校各专业作物理实验课程的教材使用，也可供其他院校有关课程作教学参考。

全书共分六章，第一、二章属于共性的基础知识，这部分内容包括误差理论、有效数字运算、数据处理和作图要求等，以及八个常用物理量的测量。第三章到第五章为基本实验，共选编了二十五个力学、热学、声学、电磁学、光学和近代物理学实验，其中，有些实验并列了两种测量方法和装置，以供选择。第六章为设计性实验，这是在学生做了一定数量的基本实验，能对实验方法、仪器使用等方面作出恰当评价后，为了培养学生独立自主地进行科学实验研究工作的能力而设置的。设计性实验只提出研究对象、要求以及给予适当的提示，主要让学生自行考虑、确定实验原理、方法、选择合适的仪器设备和设计一定的实验程序；或者让学生自行综合已掌握的知识，解决某一实际问题。本书共设置二十七个附录和十个附表，集中介绍了实验中涉及的主要仪器设备和物理常数表。这样做的目的是进一步使有关内容系统化，同时培养学生查阅资料的习惯。

考虑到物理实验课的独立性和特点，我们在编写时力求做到：实验目的精练突出，使学生明确实验要求，完全预定任务；实验原理叙述清楚、计算公式推导完整，使学生在实验预习时掌握理论依据；实验步骤按由详到简的顺序编写，旨在逐步提高学生的实验技能和动手能力；部分实验还安排了一些选做实验，供学有余力的优秀学生选做。每个实验前都附有一段提要，概述本实验的主要内容以及扩充有关知识面。每个实验后均列有预习思考题和讨论思考题，预习思考题供学生在实验前预习用，讨论思考题引导学生在实验后进一步分析讨论、巩固提高。

本书由上海交通大学张立副教授主编。参加编写的具体分工是：第一章诸论、第二章常用物理量的测量由张立编写；第三章力学、热学和声学实验(包括有关附录和附表)由屈统明编写；第四章电磁学实验（包括有关附录和附表）由钟洪孙编写；第五章光学和近代物理学实验（包括有关附录和附表）由梁华翰副教授编写；第六章设计性实验分别由钟洪孙、梁华翰、屈统明、张立编写。实验教学是一件集体的事业，无论是实验教材的编写，还是实验的开设准备等都是实验室全体任课教师和工作人员历年来辛勤劳动、不断改进、充实提高的结果。本书编写期间还得到了校内外许多同志的帮助，参阅了许多兄弟院校的有关教材，借此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，编写时间仓促，实践经验不足，书中难免有粗疏谬误之处。恳请批评指正。

编　者

1986年12月

# 目　　录

# 第一章　绪　　论

## 第一节　物理实验课的作用、目的和要求

科学实验是研究自然规律与改造客观的"基本手段"．自然科学的理论要靠实验来验证，新的现象和新的规律要靠实验来发现，工程设计和生产要靠实验来推动和完善．物理学本身就是在实践基础上发展起来的，不论是理论的建立还是对于理论的检验，都离不开实验．而实验应在已被确立的理论指导下，作为人们探索科学规律的强有力的杠杆，在新的领域里发挥作用．坚持实验与理论相互结合，相互促进，这是物理学发展所走过的道路．任何轻视实验或轻视理论的思想都是错误的，实验研究和理论研究同样是科学研究的重要手段．要把基础研究、应用研究、开发研究和生产实践这四方面很好地有机地结合起来，必须有一条贯线，这条贯线就是科学实验．重要的是实验科学本身有自己一整套理论、方法和技能，要掌握好这套实验知识是很不容易的，需要由浅入深和由简到繁地逐步学习、训练和提高．

实验的目的，在于了解各因素之间的关系及其所遵循的规律等．实验课的主要目的是使学生能独立进行科学实验研究．物理实验是理工科院校各专业第一门必修的独立设置的基础实验课程，是学生进入大学受到系统实验技能训练的开端．它在培养学生用实验手段去发现、观察、分析和研究问题、最终解决问题的能力方面起着重要的作用，也为学生独立地进行科学实验研究，设计实验方案，选择、使用仪器设备和提出新的实验课题；为进一步学习后继的实验课程打下良好的基础．

本课程的目的与要求是：

(1) 学习和掌握运用实验原理、方法去研究某些物理现象和进行具体测试，得出某些结论（着重具体测试）．

(2) 初步培养学生进行科学实验的能力，即如何从测量目的（研究对象）或课题要求出发，依据哪项原理，通过什么方法，选用哪种合适的仪器与设备，确定合理的实验程序去获取准确的实验结果（着重获取准确的实验结果）．

(3) 进行实验技能的基本训练，熟悉常用仪器的基本原理、结构性能、调整操作、观测分析和排除故障等（着重调整操作）．

(4) 学习处理实验结果数据的方法，以及分析实验方法、测量仪器、周围环境、测量次数和操作技能等对测量结果的影响（着重处理实验数据的方法）．

(5) 通过实验培养严肃认真、细致踏实、一丝不苟、实事求是的科学态度和克服困难、坚韧不拔的工作作风(着重三严，即操作要认真严格，态度要踏实严谨，思维要活跃严密)．

在整个物理实验教学过程中，学生必须主动、自觉、创造性地获得知识和技能，决不是仅仅通过实验获取几个数据，而是要通过实验去探索研究问题．因此，在观察实验现象时，要事先明确做什么，应该怎样去做，而且还要懂得为什么要这样去做．在做实验过程中，要正确简明、有条有理地记录数据，要做到在做第一百次测试时仍像第一次测试那样认真，并对测

试结果完全负责．在写报告时，要确切地分析评定自己的工作．

请记住：我们不是要一个塞满东西的脑袋，而是要一个善于分析的头脑！我们不仅要有知识，更重要的是将知识转化为能力！

著名科学家培根有一句名言："知识就是力量"，社会实践告诉我们，在世界的进步和发展中，起决定作用的不只是我们具有的知识，更重要的是如何去运用知识．我们相信，经过认真、刻苦、勤奋地学习和努力，大家一定能获得成功．

## 第二节　测量与误差

### 1．测量

在科学实验中，一切物理量都是通过测量得到的．所谓测量，就是用一定的工具或仪器，通过一定的方法，直接或间接地与被测对象进行比较．著名物理学家伽利略有一句名言："凡是可能测量的，都要进行测量，并且要把目前无法度量的东西变成可以测量的"．物理测量的内容很多，大至日、月、星辰；小到原子、分子．现在人们能观察和测量到的范围，在空间方面：已小到 $10^{-14}$～$10^{-15}$cm，大到百亿光年，大小相差在 $10^{40}$ 倍以上；在时间方面：已短到 $10^{-23}$～$10^{-24}$s 的瞬间，长到百亿年，二者相差也在 $10^{40}$倍以上．在定量地验证理论方面，也需要进行大量的测量工作．因此可以说，测量是进行科学实验所必不可少的极其重要的一环．在测量工作中，要充分熟练地掌握一些基本的实验技能，如长度怎么"量"？天平怎么"称"？仪表怎么"用"？望远镜、显微镜怎么"看"？量值怎么"读"？数据怎么"记"？电路怎么"联"？……，这些都是最基本的东西，看来也是很容易的东西，但必须引起足够重视，实际上，它是非常重要的，是进行科学研究工作的"基本功"．基本功是学习和掌握高、精、尖技术的基础，没有这个牢固的基础，就不可能达到高水平．所以，一定要从低年级开始，就重视和掌握好这些基本功．

一个测量数据不同于一个数值，它是由数值和单位两部分组成的．一个数值有了单位，便具有了一种特定的物理意义，这时，它才可以称之为一个物理量．也就是说，测量数据只有赋予了单位，才能有具体的物理意义．

测量所得的值（数据）应包括数值（大小）和单位，二者缺一不可！

### 2．误差

从测量的要求来说，人们总希望测量的结果能很好地符合客观实际．但在实际测量过程中，由于测量仪器、测量方法、测量条件和测量人员的水平以及种种因素的局限，情况是比较复杂的．因此，不可能使测量结果与客观存在的真值完全相同，我们所测得的只能是某物理量的近似值．也就是说，任何一种测量结果的量值总会或多或少地存在一定的差值，称为该测量值的测量误差，简称"误差"，即

$$\text{测量值}-\text{真值}=\text{误差}. \qquad (\text{I}-1)$$

测量总是存在着一定的误差，但实验应该根据要求和误差限度来制订或选择合理的方案和仪器．不能盲目要求仪器总是越高级越好，环境条件总是恒温、恒湿越稳定越好，测量次数总是越多越好，这样的要求是不切合实际的，一个优秀的实验工作者，应该是在一定的要求

下，以最低的代价来取得最佳的结果．要做到：既保证必要的实验精度，又合理地节省人力与物力．请记住：误差存在于一切测量之中，而且自始至终贯穿于整个测量过程之中．

测量结果应包括数值、误差和单位，三者缺一不可！

### 3． 误差的分类

误差的产生有多方面的原因，从误差的性质和来源上可分为"偶然误差"和"系统误差"两大类．

（1）偶然误差

在同一条件下对某一量进行多次测量时，每次测量时还会有差异，从表面上看差异大小即观测误差的大小和正负没有任何规律性，纯属偶然发生，这种误差称为"偶然误差"，也称"随机误差"．

偶然误差主要来自下述三个方面：

① 主观方面．由于人们的感官灵敏程度和仪器的精密程度有限，操作不熟练，估计读数误差等．

② 测量仪器方面．测量器具精度不够高，指针或向左或向右偏转，不固定．

③ 环境方面．气流扰动，温度的微小起伏，杂散电磁场的不规则脉动等均会影响测量的精度．

偶然误差的存在使每次测量值偏大或偏小，它是无规则的．但如大量增加测量次数，则能发现在一定的观测条件下，它具有一定的规律，服从一定的统计规律．常见的规律是比真值大或比真值小的测量值出现的几率相等；二是误差较小的数据比误差较大的数据出现的几率要大得多；三是在多次测量中绝对值相等的正误差或负误差出现的机会是相等的，全部可能的误差总和趋于零．因此，增加测量次数，可以减小偶然误差．

$$\text{测量值} \pm \text{偶然误差}^{①} = \text{真值}. \qquad (\text{I}-2)$$

（2）系统误差

系统误差的特点是：在同样条件下，对同一量进行多次测量时，误差的大小和正负总保持不变，或按一定的规律变化，或是有规律的重覆．

系统误差主要来自三个方面：

① 仪器误差．这是由于测量仪器本身的缺陷或没有按规定使用而引起的．如尺子本身长了或短了一点，等臂天平不等臂或使用的是叁等砝码等．按国家计量局规定，50g 的砝码允许有 ±2mg 的误差，当一个砝码的实际量值为 49.998g 时，它是符合国家叁等砝码规定的，是合格品．但当实验者使用这一标称值为 50g 的砝码进行称量时，它将引入的系统误差是

$$\text{系统误差} = 50.000 - 49.998 = +0.002\text{g} = +2\text{mg}.$$

所以，凡用该砝码称量时，均有 +2mg 的系统误差．在使用时，需经高一级仪器对该砝码进行校验之后，引入一个校正量来消除该砝码的系统误差．

又如秒表指针没有准确地按装在盘中心，会使秒表指示值出现周期性误差．再如某测角仪，转动时的读数标线 $c'$ 没有正确地通过角度盘的中心 $c$，当读数标线向上时，它不指零而右偏，读数值大于零，系统误差为 $+\theta$，如图 I-1 所示；读数标线水平右指时，读数值准确地为 90°，系统误差为零；读数标线向下时，读数标线不指 180°而仍右偏，读数将小

① 偶然误差前的"±"为不确定符号，表示偶然误差的特征，指偶然误差可能出现的范围．

于180°，系统误差为$-\theta$；读数标线水平向左时，读数值准确地为270°，系统误差也为零。可见，由于仪表装置的偏心（即角度标中心与读数标线的转轴不同心），将造成周期性变化的系统误差。这种测量仪器的系统误差可采用在径方向同装一个读数装置来加以消除，称为"对径测量法"，在光学分光计实验中将详加讨论。

② 方法误差．这是由于测量所依据的实验理论、实验方法或实验条件不合要求而引起的．如用伏安法测电阻，采用不同的联接方法，电表内阻的影响，环境条件的影响，均会带来一定的误差．如电阻与温度的关系为

$$R=R_{20}+\alpha(t-20)+\beta(t-20)^2,$$

式中$R$为温度$t$时的电阻，$R_{20}$为温度20℃时的电阻，$\alpha$和$\beta$分别为电阻的一次及二次温度系数．在实验中不测温度或温度未加控制就用20℃时的电阻值作为任意温度下的电阻值，则将带来系统误差$\Delta=-\alpha(t-20)-\beta(t-20)^2$，它是一种多项式误差，又称"抛物线误差"．消除它的方法是进行温度修正．

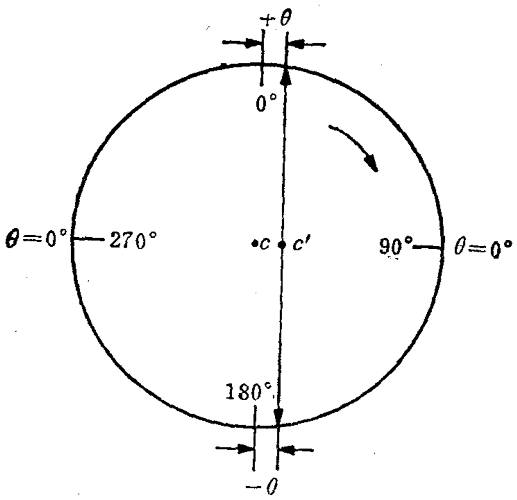


图 Ⅰ-1 周期性系统误差

③ 人员误差．这是由于观测人员生理或心理特点所造成的．通常与观测人员的反应速度或固有习惯等有关．如记录信息或计时的滞后，对准目标时始终偏左或偏右，估计读数时始终偏大或偏小等．

除上述各种系统误差外，很多系统误差的变化是极其复杂的．如刻度盘刻得不准确而引起的测量示值的误差，就是一种规律比较复杂的系统误差．对于系统误差，一般要在实验前对测量设备仪器进行校正，在实验时对实验方法、观测数据的系统误差加以补偿或消除，使其对实验结果的影响尽量降低到最小．请注意：当没有考虑到会有系统误差存在时，系统误差是最危险的！

总上所述，偶然误差与系统误差的性质不同、来源不同、处理方法也不同．影响测量结果的精确度，有时主要因素是偶然误差，有时主要因素是系统误差．因此，对每个实验要作具体分析，但实验结果的总误差是偶然误差和系统误差的总合．

$$\text{测量值}-\text{系统误差}\pm\text{偶然误差}=\text{真值}. \qquad (\text{Ⅰ-3})$$

在精密测量时，对偶然误差与系统误差必须加以区别，分别处理．有时为了说明总误差的限度，就不加以区别，有时也难于划分或区别它们．请注意：在基本实验中，一般我们仅要求考虑偶然误差，而把系统误差的初步分析放在第六章的设计性实验中．

需要强调指出的是：在整个测量过程中，除了上述两种性质的误差以外，还可能发生读数、记录上的错误，仪器损坏、操作不当等造成的测量上的错误．错误不同于误差，它是不允许存在的，同时，也是完全可以事先发现和避免的．

要求：**实验人员必须一丝不苟、严格过细地操作，及时发现错误，保证在实验过程中不发生错误！**

记住：错误不是误差。

## 第三节　偶然误差的处理①

### 1. 单次测量结果与误差估算

在物理实验中，若对某一物理量的测量精确度要求不高，只需进行一次测量时，可按仪器出厂检定书或仪器上注明的仪器误差作为单次测量的误差．如果没有注明，也可取仪器最小刻度的一半作为单次测量的误差（一般根据实际情况，对测量值的误差进行合理的估算，取仪器最小刻度的 1/10，1/5 或 1/2 均可）．

### 2. 多次测量结果与误差计算

当对某一物理量进行测量时，最好不依赖于对一个量的一次测量，而宁可进行多次重覆测量．如果仪器选择得适当，这种多次测量将不会得到完全相同的数值，根据多次测量之间的变化，就有可能获得一个最接近真值的最佳值，并对这组测量值进行误差分析与计算．

在相同条件下对某物理量$N$进行了$K$次重复测量，如每次测量值分别为 $N_1$、$N_2$、…、$N_K$，用$\overline{N}$表示算术平均值，则

$$\overline{N}=\frac{1}{K}(N_1+N_2+\cdots+N_K)=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}N_i. \qquad (\text{I}-4)$$

算术平均值的有效数字位数，一般与原来测量值的位数相同，但在各测量值较接近时，可考虑多取一位数．根据误差理论，在一组$K$次测量的数据中，算术平均值$\overline{N}$最接近于真值，称为“测量的最佳值”．当测量次数无限增加时，算术平均值将无限接近于真值．在这种情形下，多次测量值的最佳值可用算术平均值$\overline{N}$表示，多次测量值的误差可用算术平均值与测量值之差表示，称为“平差”：

$$\varDelta N_i=N_i-\overline{N}. \qquad (\text{I}-5)$$

把各次测量值的平差 $\varDelta N_i$ 平方的平均值再开方，称为“方均根误差”：

$$\sigma_K=\sqrt{\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}(N_i-\overline{N})^2}\ . \qquad (\text{I}-6)$$

当测量次数有限时，$K$次测量中只有 $K-1$ 次是独立的，故

$$\sigma_{K-1}=\sqrt{\frac{1}{K-1}\left[\sum_{i=1}^{K}(N_i-\overline{N})^2\right]} \qquad (\text{I}-7)$$

根据统计误差理论，表示偶然误差范围的方法有很多种，我国采用方均根误差$\sigma$作为精密度的评定标准，因此，也可称为“标准误差”．为了计算方便起见，上式可直接用测量值

① 本节假定在没有系统误差存在的情况下，讨论偶然误差的处理过程和方法．

来表示测量列的标准误差①.

$$\sigma_{K-1}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{K}N_i^2-(\sum_{i=1}^{K}N_i)^2/K}{K-1}}. \qquad (\text{I}-8)$$

上述结果与一般函数型电子计算器说明书中所用的公式完全相同.

**例 1** 将某一物体用一般毫米尺测量五次长度，得到的测量值分别为3.42、3.43、3.44、3.44 和 3.43cm，求其算术平均值，各次测量值的平差和标准误差.

**解**

利用算术平均值计算公式：

$$\overline{l}=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}l_i=\frac{1}{5}(3.42+3.43+3.44+3.44+3.43)=3.432，取\ 3.43\text{cm}.$$

各次测量值的平差：

$$\Delta l_i=l_i-\overline{l}.$$

$$\Delta l_1=l_1-\overline{l}=3.42-3.43=-0.01\text{cm},$$

$$\Delta l_2=l_2-\overline{l}=0.00\text{cm},$$

$$\Delta l_3=l_3-\overline{l}=0.01\text{cm},$$

$$\Delta l_4=l_4-\overline{l}=0.01\text{cm},$$

$$\Delta l_5=l_5-\overline{l}=0.00\text{cm}.$$

标准误差：

$$\sigma_l=\sqrt{\frac{1}{K-1}\left[\sum_{i=1}^{K}(l_i-\overline{l})^2\right]}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{5-1}[(-0.01)^2+0.01^2+0.01^2]}$$

$$=0.00866025403，取\ 0.01\text{cm}.$$

| 次　数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 长度 $l$(cm) | 3.42 | 3.43 | 3.44 | 3.44 | 3.43 |
| 平均值 $\overline{l}$(cm) | 3.43 | | | | |
| 平差 $\Delta l_i$(cm) | −0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.00 |
| 标准误差 $\sigma_l$(cm) | 0.01 | | | | |

① 式(Ⅰ-8)的推导过程如下所示：

$$\sigma_{K-1}^2=\frac{\sum_{i=1}^{K}(N_i-\overline{N})^2}{K-1}=\frac{\sum_{i=1}^{K}[N_i^2-2N_i\overline{N}+\overline{N}^2]}{K-1}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{K}N_i^2-2\overline{N}\sum_{i=1}^{K}N_i+K\overline{N}^2}{K-1}=\frac{\sum_{i=1}^{K}N_i^2-(\sum_{i=1}^{K}N_i)^2/K}{K-1},$$

故

$$\sigma_{K-1}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{K}N_i^2-(\sum_{i=1}^{K}N_i)^2/K}{K-1}}.$$

多次测量的结果，一般用$\overline{N} \pm \sigma_N$表示，平均值$\overline{N}$的取位，必须与$\sigma_N$的末位对齐．上例结果应写成

$$\overline{l} \pm \sigma_l = 3.43 \pm 0.01\text{cm}；或\ 3.432 \pm 0.009\text{cm}.$$

也可用函数型电子计算器直接求算标准误差．现以CASIO, fx-140型计算器为例进行计算．

① 函数模式选择开关放“SD”位置；

② 依次按 $\boxed{\text{INV}}$ 和 $\boxed{\text{AC}}$ 键；

③ 把上例数据输入，按3.42 $\boxed{M_+}$、3.43 $\boxed{M_+}$、3.44 $\boxed{M_+}$、$\boxed{M_+}$、3.43 $\boxed{M_+}$；

④ 按 $\boxed{\overline{X}}$ 键，得$\overline{l} = 3.432$，取3.43；

⑤ 按 $\boxed{\sigma_{n-1}}$ 键，得$\sigma_l = 8.3666002-03$，取0.009或0.01（误差一般取一位，最多取两位），其测量结果可表示为：

$$\overline{l} \pm \sigma_l = 3.43 \pm 0.01\text{cm},$$

或

$$\overline{l} \pm \sigma_l = 3.432 \pm 0.009\text{cm}\ (\overline{l}\ 取位与\ \sigma_l\ 误差末位对齐).$$

按上例测得同一物体的另一组数据为3.48、3.41、3.43、3.43和3.41cm，求其算术平均值与标准误差．得到

$$\overline{l'} \pm \sigma'_l = 3.43 \pm 0.03\text{cm},$$

或

$$\overline{l'} \pm \sigma'_l = 3.432 \pm 0.029\text{cm}.$$

两次测量得到的结果，其算术平均值$\overline{l} = \overline{l'} = 3.43$cm或3.432cm是相同的；然而两组数据的标准误差$\sigma_l \neq \sigma_l'$，并不相等．$\sigma_l = \pm 0.01$cm，而$\sigma'_l = \pm 0.03$cm，显然，第一组数据的测量精密度要比第二组高．但如果是测量两个不同长度的物体：$l$是1cm长；$l'$是1m长，分别得到$l = 1.0 \pm 0.1$cm和$l' = 100 \pm 1$cm．从表面看，$\sigma_l = 0.1$cm比$\sigma'_l = 1$cm小十倍，实际上在100cm的测量中，误差只有1cm，即占总长的1/100；而在1cm的测量中，误差为0.1cm，却占总长的1/10．因此，相对说来$l'$的准确度要比$l$为高．由于这个原因，我们通常用相对误差来表示误差的严重程度（即表示误差数值在测量结果中所占的比重），而标准误差仅反映测量进行的好坏（即测量重覆性的优劣）．

相对误差$E_N$的定义：

$$E_N = \frac{\sigma_N}{\overline{N}} \times 100\%. \qquad (\text{I-9})$$

上例的相对误差为

$$E_l = \frac{0.01}{3.43} \times 100\% = 0.29\%(或0.3\%).$$

一般情况下，相对误差最多取一至两位．

有时被测量的量值有公认值或理论值，则用百分误差加以比较：

$$百分误差=\frac{|测量值-理论值|}{理论值}\times 100\%. \quad (\mathrm{I}-10)$$

### 3. 间接测量结果与误差计算——误差传递和合成

在大量的物理实验中，几乎所有的测量都属于将一些直接测量的物理量，通过一定的公式，将需要的待测量计算出来的所谓“间接测量”。由于每次直接测量都有误差，因此，间接测量的结果也一定会有误差，这就是误差的传递。

设待测量$N$和各直测量$x$、$y$、…，有下列函数关系

$$N=f(x,\ y,\ \cdots).$$

对上式求全微分，得

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\cdots.$$

上式表示，当$x$、$y$、…有微小改变$\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、…时，$N$也将改变$\mathrm{d}N$。通常误差远小于测量值，故可把$\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、…和$\mathrm{d}N$看作误差，这就是误差的传递公式。

由各部分的误差组合成总误差，就是误差的合成。设在实验中对各直测量$x$，$y$，…作了$n$次测量，则可算出$n$个待测量，如

$$\begin{aligned}N_1&=f(x_1,\ y_1,\ \cdots),\\N_2&=f(x_2,\ y_2,\ \cdots),\\&\cdots\cdots\\N_n&=f(x_n,\ y_n,\ \cdots).\end{aligned}$$

根据误差传递公式，每次测量的误差为

$$\mathrm{d}N_i=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathrm{d}x_i+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}y_i+\cdots,$$

上式两边各自平方，得

$$\mathrm{d}N_i^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x_i^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\mathrm{d}y_i^2+\cdots+2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_i+\cdots.$$

将$n$次测量的$\mathrm{d}N_i^2$相加，得

$$\sum_{i=1}^{K}\mathrm{d}N_i^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sum_{i=1}^{K}\mathrm{d}x_i^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sum_{i=1}^{K}\mathrm{d}y_i^2+\cdots+2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\sum_{i=1}^{K}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_i+\cdots.$$

若$N=f(x,\ y,\ \cdots)$中，各直测量$x$、$y$、…的误差彼此无关，即直测量$x$、$y$、…彼此独立（如果不是独立量，误差传递公式更复杂），则各测量中的$\mathrm{d}x_i$、$\mathrm{d}y_i$、…可正可负，可大可小，其交叉乘积项的和如$\sum\limits_{i=1}^{K}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_i$将等于0。则

$$\sum_{i=1}^{K}\mathrm{d}N_i^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sum_{i=1}^{K}\mathrm{d}x_i^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sum_{i=1}^{K}\mathrm{d}y_i^2+\cdots.$$

将上式两边同乘以$\frac{1}{n}$，得标准误差的平方

$$\sigma_N^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2+\cdots. \quad (\mathrm{I}-11)$$

最后得函数$N$的合成标准误差为

$$\sigma_N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2+\cdots}. \qquad (\text{I}-12)$$

函数$N$的相对标准误差为

$$E_N=\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\frac{\sigma_x^2}{N^2}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\frac{\sigma_y^2}{N^2}+\cdots}. \qquad (\text{I}-13)$$

这里可把$\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$、…看作是各直测量$x$、$y$、…的误差传递系数，因此，可把常用函数的误差传递公式列成表Ⅰ-1所示的形式。

**表Ⅰ-1　常用函数的标准误差传递公式**

| 测量关系式 $N=f(x,y,\cdots)$ | 标准误差传递公式 |
|---|---|
| $N=x+y$ | $\sigma_N=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$ |
| $N=x-y$ | $\sigma_N=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$ |
| $N=kx$ | $\sigma_N=k\sigma_x,\quad \frac{\sigma_N}{N}=\frac{\sigma_x}{x}$ |
| $N=\sqrt[k]{x}$ | $\frac{\sigma_N}{N}=\frac{1}{k}\frac{\sigma_x}{x}$ |
| $N=xy$ | $\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$ |
| $N=\frac{x}{y}$ | $\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$ |
| $N=\frac{x^k y^m}{z^n}$ | $\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{k^2\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+m^2\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2+n^2\left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2}$ |
| $N=\sin x$ | $\sigma_N=\lvert\cos x\rvert\sigma_x$ |
| $N=\ln x$ | $\sigma_N=\frac{\sigma_x}{x}$ |

由表Ⅰ-1可知，测量函数关系式为加减法时，用各自标准误差的平方和；为乘除法时，用各自相对标准误差的平方和，同时请注意都取正号①。

① 根据误差传递公式，在误差合成时起主要作用的常常是少数几项分误差．当分误差占总合成误差的1/10以下时，就可略去不计．由于总误差来自各项分误差的平方相加再开方，所以某一分误差小于最大分误差的1/3以下时就可以略去不计．这样便大大地简化了计算合成总误差时的繁复运算．