理科数学

数学物理方程

欧维义　编

吉林科学技术出版社

数学物理方程

欧维义 编

吉林科学技术出版社出版 吉林省新华书店发行
中国人民解放军装甲兵技术学校印刷厂印刷

*

850×1168毫米大32开本 17.5印张 413,500 字
1985年12月第1版 1985年12月第1次印刷
印数：册1—4710册

统一书号：13376.32 定价3.60元

序

本书是根据我们多年来为数学力学专业、物理系、无线电电子科学系，以及化学系开设的《数学物理方法》课程中的方程部分内容修改而成的．内容包括三类典型方程（热传导方程，波动方程，位势方程）的典型定解问题的各种经典解法（分离变量法，积分变换法，格林函数法，变分方法和行波法等）．

根据理科特点，本书在编写中，注重实效，突出方法．在表述上，注重物理和数学的渗透，注重运用常识性的物理、力学模型，把方法讲得直观、形象．在结构上，力争做到层次清晰，结构严谨，深入浅出，通俗易懂．总之，通过这本教材的学习，可使读者在获得解题方法的同时，还能获得严格的数学能力和素质的训练．

本书讲授时间约60—64学时．但是本书的结构是积木式的，容易组织成若干个独立单元．因此各专业可根据自己专业的需要和学时多少进行删减．又书中各章都配备了一定数量的习题（书后附有提示和答案），供读者练习．

本教材在试用和改写过程中得到同事陈维钧、赵为礼、王毅、金德俊、卢喜观、高玉环、苗树梅以及通化师范学院的林昆治等同志的热情帮助和支持．在此，谨向他们致以谢意．

由于编者水平所限，错误和不妥之处，敬请读者指正和批评．

编　者

于吉林大学

目　　录

引　言

1.什么是数学物理方程

含有未知多元函数u的偏导数的关系式，例如

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \quad \text{(位势方程)} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f(x,y,z,t). \quad \text{(热传导方程)} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+g(x,y,z,t) \quad \text{(波动方程)} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad \text{(冲击波方程)} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sigma u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \quad \text{(KDU 方程)} \qquad (5)$$

等等都称为偏微分方程。连续物质的运动变化规律，如弦、杆的振动、粒子浓度分布、温度分布以及电磁场的变化等许多物理规律和状态都是用偏微分方程来描述的.

数学物理方程，通常都是指从物理问题导出的偏微分方程.最常见的是下面三个方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u \quad \text{(热传导方程)} \qquad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u \quad \text{(波动方程)} \qquad (7)$$

$$\Delta u=0 \quad \text{(位势方程)} \qquad (8)$$

描写热量在物体内部从高温向低温处的传导，溶液中的溶质

由浓度较大处向较小处的扩散等运动过程就是**热传导方程**（扩散方程）．声波在空气中的传播，弹性体的振动，电磁波在真空中的传播等过程导出的就是**波动方程**．热传导方程，波动方程所描述的物理过程都是随时间而发展的过程．所以，又把它们统称为**发展方程**．如果它们进入稳定（定常）状态，即表示运动过程的物理量u不再随时间而改变，这时

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0 \quad , \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

由方程（6）、方程（7）都得到**位势方程**（8）．所以位势方程描写的是稳定（定常）的物理过程，如稳定流场的分布，稳定温度场的分布，静电场的分布等等．

实际中碰到的许多方程，或者只要经过简单的变换就可以化为以上三个方程中的一个，或者虽然不能直接化为这三种类型的方程，但是可仿效关于它们的研究方法来处理、分析和解决其它的问题．因此关于这三个方程的研究一直是（作为偏微分方程基础课程的）数学物理方程课程的基本内容．

2.偏微分方程中的有关名称

偏微分方程的阶．是指方程中所含偏导数的最高阶阶数．比如前面举例的方程（4）是一阶偏微分方程，方程（1）、（2）、（3）都是二阶偏微分方程，方程（5）是三阶偏微分方程．一般地，如设$F(x,y,\cdots)$是表示所依赖变量的一种关系式，那么含自变量x,y的未知函数$u=u(x,y)$的一阶偏微分方程的通式是

$$F(x,y,u,u_x,u_y)=0.$$

二阶偏微分方程的通式是

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})=0.$$

余此类推．

线性方程、非线性方程．一个偏微分方程，如果线性地包含未知函数及其各阶偏导数，我们就把它叫做线性偏微分方程；不是线性的偏微分方程，统称为非线性偏微分方程．

方程（1），方程（2），方程（3）是二阶线性偏微分方程；方程（4）是一阶非线性偏微分方程；方程（5）是三阶非线性偏微分方程．

含有变量x, y的未知函数$u=u(x, y)$的一阶线性偏微分方程的一般形式是

$$a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x, y)u=f(x, y),$$

二阶线性偏微分方程的通式是

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$+D(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+E(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+F(x, y)u+G(x, y)$$

$$=0,$$

等等．

偏微分方程的解．设

$$F(x, y, \cdots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \cdots)=0 \tag{9}$$

是含未知函数$u=u(x, y, \cdots)$的偏微分方程，$v=v(x, y, \cdots)$是区域Ω上的已知函数，具有方程（9）中所含的各阶偏导数．如果在方程（9）中以v代替u，有

$$F(x, y, \cdots, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \cdots)\equiv 0 \quad 当 (x, y, \cdots)\in\Omega$$

则称函数$v(x, y, \cdots)$是方程（9）在Ω上的解．

比如，容易验证，除去点(x_0, y_0, z_0)外，函数

$$u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2}}$$

是三维位势方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

的解；除去点（x_o，y_o）外，函数

$$u(x,y)=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}}$$

是二维位势方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

的解。

3.偏微分方程和常微分方程的比较

和使用常微分方程解决实际问题一样，偏微分方程解决问题也是分为两步：一是列方程和定解条件，一是解定解问题（包括解的性质、解的适定性的研究等等）。

和常微分方程不同的，就是偏微分方程发展到现阶段，还没有一个适用于一切线性偏微分方程的统一理论（比如适用于一切线性方程的解的结构定理）。这个不同，反映在偏微分方程的研究中，只能就具体的方程和具体的定解问题，一类一类地解决问题。

4.数学物理方程的研究方法

在数学中，我们解决每个问题时，总是先要对那个问题进行尽可能详细的考察，取得感性认识，从中找出规律性的东西，然后使用判断和推理的方法，得出数学结论，这叫分析过程。而从数学上严格论证结论的正确性，叫做综合过程。就结论是否（在数学上）确实成立来说，综合过程是不可缺的，但对探求新结论

来说，分析过程尤为重要.

在数学物理方程中，我们将特别强调通过分析过程推测可能得到的结论，而对结论的严格论证则常予以略去. 这种做法，并不表明可以取消综合过程，而只是意味着分析过程从方法到结论都能给予我们一些新的东西，而验证结论的正确性，原则上一般没有什么困难(不排除技术上可能存在的颇大的困难)，这个特点，希望大家特别注意.

正是因为分析过程的任务只在于探求新结论，而结论的确实成立与否还须另行验证，所以，在分析过程中的推理，并不要求十分严格，特别地，不要由于某些定理的条件限制，而束缚了自己的思路. 这是在学习数学物理方程中应该注意的.

5.课程的基本内容和要求

本课程不可能对各种数学物理问题进行普遍的探讨. 只能就前面提到的三种典型方程的典型定解问题作些介绍. 期望通过这些介绍，使读者初步了解怎样把物理学、力学和科学技术中的一些实际问题表达为偏微分方程的定解问题，掌握求解偏微分方程定解问题的一些基本方法，以及获得从物理上解释某些数学结果的初步训练.

数学物理方程是一门同实际联系比较密切的数学学科，因而也是综合性比较强的学科. 它以解决实际问题为唯一目标，广泛运用物理学、力学和数学的各个领域知识. 这对基础知识有所遗忘的读者来说无疑是一个困难，但只要我们对不熟悉的内容加强复习，这个困难是完全可以克服的.