高等学校教学参考书

数学分析

第二册

何琛 史济怀 徐森林 编

高等教育出版社

高等学校教学参考书

数 学 分 析

第 二 册

（多元微积分）

何 琛 史济怀 徐森林 编

高等教育出版社

内容简介

本书系参照1980年5月在上海举行的高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会(扩大)会议上审订的综合大学数学、计算数学专业“数学分析教学大纲”编写的、全书共分三册、第一册为一元微积分. 该册除传统内容外，还讨论了一般的映射和逆射概念、凸函数、上极限和下极限，并较详细地讨论了实数的连续性. 第二册为多元微积分. 这部分内容与传统内容有较大的差异. 它讨论了映射的微分、隐射和逆射定理，并严格地讨论了平面上的 Riemann 积分，直观地介绍了R^3中的外微分运算. 第三册为无穷级数和广义积分. 该册详细地讨论了无穷级数、广义积分和求导次序交换的问题，还讨论了 Weierstrass 逼近定理和处处连续而处处不可导的例子，以及 Fourier 分析初步等内容.

本书可作为数学专业的教学参考书.

高等学校教学参考书

数学分析

第二册

(多元微积分)

何琛 史济怀 徐森林 编

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷三厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.25 字数 223,000
1985年1月第1版 1985年3月第1次印刷
印数 00,001—8,200
书号 13010·01020 定价 2.30元

目　录

第五章　R^2 中的拓扑知识

第一节　集合和映射

§1.1　集合运算和欧氏空间

我们在第一册的开头已经提出了"集合"的概念和表示方法，这里就不再重复．集合与集合是可以作运算的．在定义集合运算之前，我们先回顾一下集合关系"$\subset$"和"$=$"的意义．若 A, B 是两个集合，$A\subset B$ 意指，若 $a\in A$，则 $a\in B$．即

$$a\in A\Longrightarrow a\in B.$$

也就是 A 中的元素均是 B 中的元素．$A=B$ 意指，若 $a\in A$，则 $a\in B$，且反之亦然．即

$$a\in A\Longleftrightarrow a\in B.$$

若 $A\subset B$，但 $A\neq B$，则 A 是 B 的"真子集"．

关系"$\subset$"显然具有下列性质：

1°　$A\subset A$（自反性）．

2°　$A\subset B, B\subset A\Longrightarrow A=B$（反对称性）．

3°　$A\subset B, B\subset C\Longrightarrow A\subset C$（传递性）．

在这些性质中，我们常常要用性质 2° 来证明两个集合相等．

下面我们来介绍集合运算．

定义1　设 A 和 B 是两个集合，则 $A\cup B$ 是一个集合，是 A 和 B 两集中全体元素所成之集（图1），即　$A\cup B=\{a:\quad a\in A$ 或 $a\in B\}$，

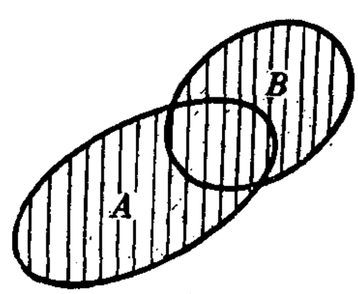

图　1

叫做 A 和 B 的**并集**.

这个概念自然可以推广到任意多个集合. 设 $A_1, A_2, \cdots$ 都是集合, 则定义

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$$= \{x: \quad x \in A_i \text{ 对某个 } i=1, \cdots, n \text{ 成立}\},$$

$$\bigcup_{i \in N} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

$$= \{x: \quad x \in A_i \text{ 对某个自然数 } i \text{ 成立}\}.$$

一般地, 若 I 是一个集合, 如果对于每一个 $\alpha \in I$ 相应有一个集合 A_α, 则定义

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x: \quad x \in A_\alpha \text{ 对某个 } \alpha \in I \text{ 成立}\}.$$

显然

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$A \cup A = A, \qquad A \cup \varnothing = A,$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C,$$

$$A \cup B = A \Longleftrightarrow B \subset A.$$

例 1 看一些例子:

$$[0, 2] \cup [1, 3] = [0, 3].$$

$$[0, 2) \cup [0, 1] = [0, 2).$$

$$(0, 1) \cup \{0\} \cup \{1\} = [0, 1].$$

$$\{(x, y): \quad x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

$$= \{(x, y): \quad x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y): \quad x^2 + y^2 = 1\}.$$

$$R = \bigcup_{n \in N} (-n, n) = \bigcup_{n \in N} [-n, n].$$

$$\{x \in R: \quad x > 0\} = \bigcup_{n \in N} \left\{x \in R: \quad x > \frac{1}{n}\right\}.$$

$$\{x\in R:\quad f(x)>0\}$$

$$=\bigcup_{n\in N}\left\{x\in R:\quad f(x)>\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\bigcup_{\alpha\in(0,+\infty)}\{x\in R:\quad f(x)>\alpha\}.$$

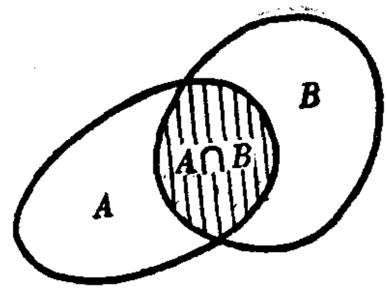

图 2

定义 2 设 A 和 B 是两个集合，则 $A\cap B$ 是一个集合，是 A 和 B 两集的全体公共元素所成之集(图 2)，即

$$A\cap B=\{a:\quad a\in A \text{ 和 } a\in B\},$$

叫做 A 和 B 的**交集**．若 $A\cap B=\varnothing$，即 A 和 B 无公共元素，则称 A 和 B **不相交**．同样定义

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x:\quad x\in A_\alpha \text{ 对一切 } \alpha\in I \text{ 成立}\}.$$

显然

$$A\cap B=B\cap A,$$

$$A\cap A=A,\qquad A\cap\varnothing=\varnothing,$$

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C,$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

$$A\cap B\subset A,$$

$$A\cap B=A\Longleftrightarrow A\subset B.$$

例 2 看几个例子：

$$[0,2]\cap[1,3]=[1,2].$$

$$[0,2]\cap(0,1)=(0,1).$$

$$\{(x,y):\quad x<2,y<1\}=\{(x,y):\quad x<2\}\cap\{(x,y):\quad y<1\}.$$

$$\{0\}=\bigcap_{n\in N}\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right].$$

$$\bigcap_{n\in N}\left(0,\frac{1}{n}\right)=\varnothing.$$

$$\{x\in R:\quad f(x)=0\}=\bigcap_{n\in N}\left\{x\in R:\quad |f(x)|<\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\bigcap_{\alpha>0}\{x\in R:\quad |f(x)|<\alpha\}.$$

定义 3 固定一个集合 X，考虑 X 的子集. X 常常称做“空间”，其中的元素也称做“点”. 设 $A\subset X$，定义

$$A^c=\{x\in X:\quad x\overline{\in}A\},$$

叫做 A(在 X 中)的**余集**或**补集**(图 3).

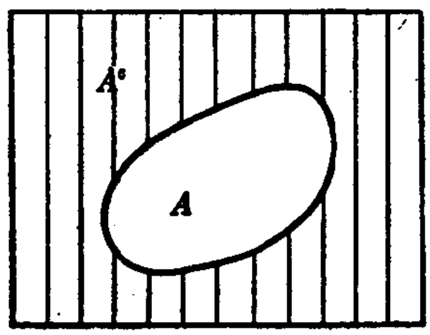

图 3

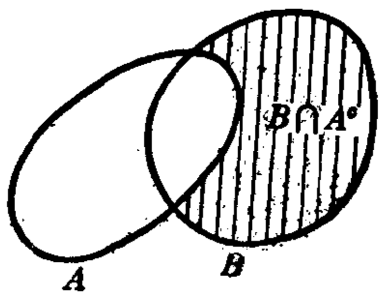

图 4

例 3 取 $X=R$，则$[0,+\infty)^c=(-\infty,0)$，

$$\{0\}^c=\{x\in R:\quad x\neq 0\},\ Q^c=\{x\in R:\quad x\text{ 为无理数}\},$$

$$(0,1)^c=(-\infty,0]\cup[1,+\infty).$$

若 $A\subset X$, $B\subset X$，则

$$B\cap A^c=\{x\in X:\quad x\in B,\ x\overline{\in}A\}$$

(图 4). 这个集合也叫做 A 在 B 中的余集，即从 B 中去掉 A 的元素所得之集. 显然

$$X^c=\varnothing,\qquad\qquad \varnothing^c=X,$$

$$(A^c)^c=A,$$

$$A\cap A^c=\varnothing,$$

$$A\cap B=\varnothing\Longleftrightarrow A\subset B^c.$$

较为重要的是下列二式:

$$A\subset B\Longleftrightarrow A^c\supset B^c.$$

$$A\cup B=A\cup(B\cap A^c)$$

(图 4). 最后一式表示，任意二集之并可以表示为两个不相交的集合之并.

定理 1(对偶律, DE Morgan 律)

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,$$

$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c.$$

$$(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c,\quad (\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c.$$

证明 证第三个等式.

$$x\in(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^c\Longleftrightarrow x\overline{\in}\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\Longleftrightarrow x\overline{\in}A_\alpha \text{ 对一切 } \alpha\in I \text{ 成立}$$

$$\Longleftrightarrow x\in A_\alpha^c \text{ 对一切 } \alpha\in I \text{ 成立}$$

$$\Longleftrightarrow x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c.$$

同理可证明其余三个等式. □

定义 4 设有集合 A 和 B. 在 A 中取一元素 a 放在第一个位置上，在 B 中取一个元素 b 放在第二个位置上，得一有序的元素对 (a,b). 全体这种元素对所成之集记为 $A\times B$, 叫做 A 和 B 的 Cartesian 积，即

$$A\times B=\{(a,b):\quad a\in A,b\in B\}.$$

例 4 若 $A=\{a,b,c\}$, $B=\{\alpha,\beta\}$, 则

$$A\times B=\{(a,\alpha),(b,\alpha),(c,\alpha),(a,\beta),(b,\beta),(c,\beta)\}.$$

又如

$$[0,1]\times[0,1]=\{(x,y):\quad 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

今后我们记

$$R^2=R\times R=\{(x,y):\quad x\in R,y\in R\},$$

$$R^3=R\times R\times R=\{(x,y,z):\quad x,y,z\in R\},$$

$$R^n=R\times\cdots\times R=\{(x_1,\cdots,x_n):\quad x_i\in R,\ i=1,\cdots,n\}.$$

我们看到，R^2 中的元素(x,y)就是平面坐标系中的点，R^3 中的元素(x,y,z)就是空间坐标系中的点．我们也把这种点记成 $\boldsymbol{p}=(x,y)$和 $\boldsymbol{p}=(x,y,z)$．平面和空间中的点也就是“向量”，它们有下列运算：

1° 若 $\boldsymbol{p}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{p}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2).$$

2° 若 $\boldsymbol{p}=(x,y,z)$，$c\in R$，则

$$c\boldsymbol{p}=(cx,cy,cz).$$

3° 记

$$\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2=\langle\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2\rangle=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

叫做 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 的“内积”或“点乘”．又记

$$p=\|\boldsymbol{p}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

叫做向量 $\boldsymbol{p}$ 的“范数”或“模”，即 $\boldsymbol{p}$ 的长度（$\boldsymbol{p}$ 点到原点的距离）．在 R^3（或 R^2）中引进了上述运算以后，R^3 便叫做“三维欧氏空间”．

特别记

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),\ \boldsymbol{j}=(0,1,0),\ \boldsymbol{k}=(0,0,1),$$

这是坐标轴上三个相互正交的单位向量．于是，任一向量 $\boldsymbol{p}=(x,y,z)$可以表示为

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

在R^3 中还可以定义“外积”或“叉乘”：

$$\boldsymbol{p}_1\times\boldsymbol{p}_2=[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}.$$

以上这些运算的几何意义大家都早已熟悉，这里不再赘述．

这些运算（除外积外）也可依样推广到 R^n中．记 R^n 中的点（向量）为 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，定义

$$x+y=(x_1,\cdots,x_n)+(y_1,\cdots,y_n)$$

$$=(x_1+y_1, \cdots, x_n+y_n),$$

$$cx=c(x_1, \cdots, x_n)=(cx_1, \cdots, cx_n),$$

其中 $c\in R$. 又

$$x\cdot y=\langle x, y\rangle=x_1y_1+\cdots+x_ny_n,$$

叫做向量 x 和 y 的“内积”或“点乘”，这是一个数. 又数

$$\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$$

叫做向量 x 的“范数”. 引进了这些运算以后，R^n 便叫做“n 维欧氏空间”. 多元微积分就是在二维、三维和 n 维欧氏空间中研究微分和积分问题的.

在 n 维欧氏空间 R^n 中我们也可以选出 n 个相互正交的单位向量

$$e_1=(1, 0, \cdots, 0), e_2=(0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_n=(0, \cdots, 0, 1),$$

则 R^n 中的一切向量可以表示为

$$x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n.$$

关于内积和范数有以下关系式:

$$\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle.$$

$$\langle cx, y\rangle=c\langle x, y\rangle, c\in R.$$

$$\langle x+y, z\rangle=\langle x, z\rangle+\langle y, z\rangle.$$

$$\|x\|\geqslant 0; \quad \|x\|=0\Longleftrightarrow x=0.$$

$$\|cx\|=|c|\|x\|, c\in R.$$

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|. \tag{1}$$

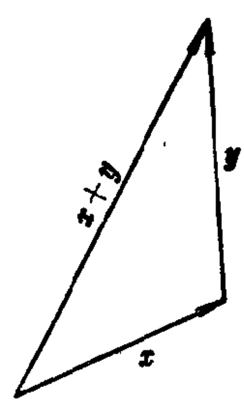

图 5

最后这个不等式叫做“三角形不等式”，它的几何意义是三角形两边之和大于第三边(图 5). 这个不等式来源于 Schwarz 不等式

$$|\langle x, y\rangle|\leqslant\|x\|\|y\|. \tag{2}$$

除了向量范数以外，今后我们还需要矩阵范数. 设有矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

我们定义

$$\|A\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2}, \tag{3}$$

叫做矩阵 A 的"范数". 矩阵范数的定义方法实际上就是把矩阵 A 看作 mn 维向量, 因此向量范数的基本性质对矩阵范数都成立: 设 A 和 B 同为 $m\times n$ 阶矩阵, 则

$$\|A\|\geqslant 0; \qquad \|A\|=0\Longleftrightarrow A=0.$$

$$\|cA\|=|c|\,\|A\|,\ c\in R.$$

$$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|.$$

此外, 若 A 为 $m\times n$ 阶矩阵, B 为 $n\times l$ 阶矩阵, 则

$$\|AB\|\leqslant\|A\|\,\|B\|. \tag{4}$$

事实上, 设 A 中的行向量为 $a_1, \cdots, a_m$, B 中的列向量为 $b^1, \cdots, b^l$. 由 Schwarz 不等式(2),

$$\begin{aligned}\|AB\|&=\|(a_ib^j)\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}(a_ib^j)^2}\\&\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}\|a_i\|^2\|b^j\|^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\|a_i\|^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{l}\|b^j\|^2}\\&=\|A\|\,\|B\|.\end{aligned}$$

最后指出, 以后在作矩阵运算时, 我们经常把 R^n 中的点同时也表为列向量

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

并且把列向量和行向量都看作矩阵来运算, 请读者注意.

上面这些知识我们假定读者都是已知的, 提出来只不过是为统一语言和符号罢了. 下面我们再回到集合运算.

定义 5 设 $D\subset A\times B$, $a\in A$. 记

$$D_a=\{b\in B:\quad (a,b)\in D\}\subset B,$$

叫做 D 在点 a 的**截**. 同样,若 $b\in B$, D 在点 b 的截记为

$$D^b=\{a\in A:\ (a,b)\in D\}\subset A.$$

例 5 在例 4 中, 设

$$D=\{(a,\alpha),(b,\alpha),(a,\beta),(c,\beta)\}\subset A\times B,$$

则

$$D_a=\{\alpha,\beta\},$$

$$D_c=\{\beta\},\ D^\beta=\{a,c\}.$$

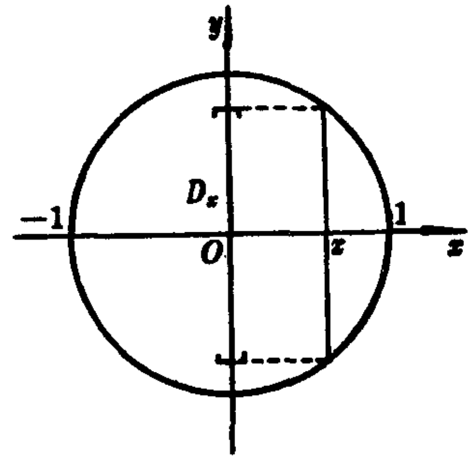

图 6

例 6 设

$$D=\{(x,y)\in R^2:\quad x^2+y^2\leqslant 1\}\subset R^2$$

(图6). 若 $|x|<1$, 则 $D_x=[-\sqrt{1-x^2},\ \sqrt{1-x^2}]$; 若 $x=\pm 1$, 则 $D_x=\{0\}$; 若 $|x|>1$, 则 $D_x=\varnothing$.

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 集合有哪几种运算, 是怎样定义的?

(2) 两集不相交是什么意思? $A\cap B^c$ 是什么意思?

(3) 何谓对偶律?

(4) 集合的 Cartesian 积是什么意思? 集合的截是什么意思? 怎样用几何图形来表示它们?

(5) 何谓欧氏空间? 欧氏空间中的内积和范数有些什么基本性质?

(6) 你能否证明 Schwarz 不等式?

2. 化简下列集合:

(1) $(A\cup B)\cap B^c$;　　(2) $A\cap B\cap(A^c\cup B^c)$;

(3) $(A\cup B^c)\cup B$;　　(4) $(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(5) $(A\cup(B\cup(C\cup D^c)))^c$;　　(6) $((X^c\cup Y)\cap(X\cup Y^c))^c$;

(7) $(A\cap B\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B\cap C^c)$

$\bigcup (A\cap B^c\cap C^c)\bigcup (A^c\cap B\cap C^c)\bigcup (A^c\cap B^c\cap C)$.

3. 证明：$X=\varnothing \Longleftrightarrow Y=(X\cap Y^c)\bigcup (Y\cap X^c)$.

4. 作出下列点集的图形：

(1) $\{x\in R:\quad |x|>1\}$；

(2) $\{x\in R:\quad x^2-x-2<0\}$；

(3) $[a, b]\times[c, d]$；

(4) $\{(x, y)\in R^2:\quad |x|<1\}$；

(5) $\{(x, y)\in R^2:\quad x+y\leqslant 1, x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$；

(6) $\left\{(x, y)\in R^2:\quad x^2-\frac{y^2}{2}\geqslant 1\right\}$；

(7) $\{(x, y)\in R^2:\quad y>x^2, 2x-y<2\}$；

(8) $\left\{(x, y)\in R^2:\quad x^2+\frac{y^2}{2}\leqslant 1, x\leqslant y\right\}$；

(9) $\{(x, y, z)\in R^3:\quad x+y+z=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\}$；

(10) $\{(x, y, z)\in R^3:\quad y^2=x\}$；

(11) $\{(x, y, z)\in R^3:\quad z^2\geqslant x^2+y^2, 0\leqslant z\leqslant 1\}$；

(12) $\{(x, y, z)\in R^3:\quad x^2+y^2+z^2\leqslant 1, x^2+y^2\leqslant x, y\geqslant 0, z\geqslant 0\}$.

5. (1) 设 $B=\{(x, y):\quad x^2+y^2\leqslant 1\}$. 问 $B\times[0, 1]$的体积为何？

(2) 设 $l\subset R^2$ 是一条平面曲线，问 $l\times R$ 为何？

6. $(A\times B)^c$ 为何？

7. (1) $\bigcap\limits_{n\in N}\left[0, 1+\frac{1}{n}\right)=?$　　(2) $\bigcup\limits_{n\in N}\left(0, 1-\frac{1}{n}\right]=?$

8. 设 $B=\{(x, y)\in R^2:\quad x+y\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$. 问 B_x 为何？

9. 设 $\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}\in R^3$，证明

$$\|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}\|^2+\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\|^2=2\|\boldsymbol{p}\|^2+2\|\boldsymbol{q}\|^2,$$

并解释其几何意义.

§1.2 映射

在第一章§1.2中我们已经直观地定义了映射(函数)，现在我们要进一步把这一概念严格化. 我们知道，给定了一个一元函数 f，则其图象，即曲线 $y=f(x)$是 R^2 中的一个点集. 这个点集就是

$$\{(x,y)\in R^2:\quad y=f(x)\}.$$

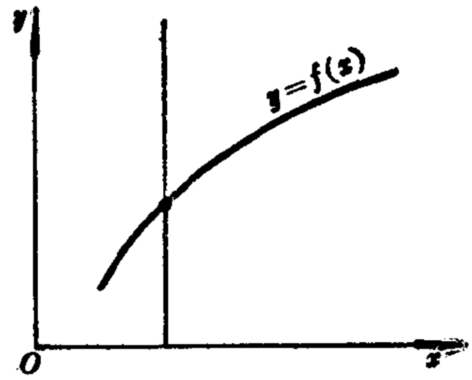

图 7

其特点是它与 y 轴的平行直线相交最多只有一点(图 7)，即对于每一个 x 最多只有一个 y 使 (x,y) 属于这个点集. 这个事实启发我们可以用集合来定义函数，即用函数的图象来定义函数.

定义 1 设 X 和 Y 是两个集合，又集合 $f\subset X\times Y$. 如果对于每一个 $x\in X$ 最多只有一个 $y\in Y$ 使 $(x,y)\in f$，则说集合 f 有**单值性**. 如果 $f\subset X\times Y$ 有单值性，则集合 f 叫做一个函数(映射、变换). 集合

$$\mathrm{dom}f=\{x\in X:\quad 存在\ y\in Y\ 使\ (x,y)\in f\}\subset X$$

叫做 f 的**定义域**；集合

$$\mathrm{rng}f=\{y\in Y:\quad 存在\ x\in X\ 使\ (x,y)\in f\}\subset Y$$

叫做 f 的**值域**. 若 $(x,y)\in f$，则记 $y=f(x)$，叫做 f 在 x 的**值**或 x 关于 f 的**像**.

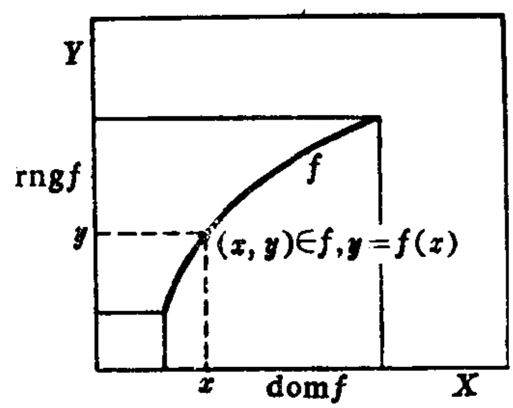

图 8

图 8 是函数概念的一个示意图. 在此图中我们把集合 X 和 Y 设想为正交的坐标轴，这当然是很特殊的，只是为了形象化.

按上述定义，如果我们知道了一个函数(点集) f 的定义域 $A=\mathrm{dom}f$，又知道了对于每一个 $x\in A$ 的函数值 $y=f(x)$，则就完全知道了点集 f. 所以，一个函数 f 仍然是由定义域 A 和函数值 $f(x)$ $(x\in A)$ 二者来确定的. 因此这个函数概念与我们在第一章 §1.2 中的函数概念完全一致. 用集合定义函数是一个比较严格的概念. 既然函数是集合，就可以对函数作集合运算，函数与函数就可

以有"$\subset$"的关系，因此在某些数学领域中表达和证明命题时就会很方便.

我们过去(在第一章第一节中)约定的函数表示方法以及一切有关概念和术语都继续适用. 现在再约定一个表示方法: 若函数f的定义域为A,则f可以表示为

$$x \longmapsto f(x), \quad x \in A.$$

例如

$$x \longmapsto x^2, \quad x \in R;$$

$$(x, y) \longmapsto x^2 + y^2, (x, y) \in R^2,$$

$$(x, y, z) \longmapsto \ln xyz, \quad x, y, z > 0$$

等都是函数. 在无须用专门符号f, g等去表示一个函数时就可以使用这个表示方法.

我们在第一册中已经约定的关于函数和映射的区分也继续适用: 若$\mathrm{rng} f \subset R$,则f是函数,否则称做映射. 这只是本书的约定. 按定义,函数,映射,变换还有算子等都是同一概念,只不过在不同场合人们的习惯叫法不同而已.

本册讨论的对象是多元函数和由R^n中到R^m中的映射（即$\mathrm{dom} f \subset R^n$, $\mathrm{rng} f \subset R^m$）. 上面第二个例子是二元函数，第三个例子是三元函数. 若$\mathrm{dom} f \subset R^2$,则$f$是二元函数;若$\mathrm{dom} f \subset R^3$,则$f$是三元函数. 例如,若

$$f(x, y) = x \sin y + y \cos x, \quad (x, y) \in R^2,$$

$$g(x, y, z) = \sqrt{1 - xy}, \quad xy \leqslant 1,$$

则f是二元函数,g是三元函数. 当然，二元函数也可以看作三元函数;一元函数也可以看作二元函数和三元函数.

一个二元函数f，根据定义，是$R^2 \times R = R^3$中的单值性点集(图 9)，就是说,与平行于z轴的直线相交最多一点. 这是一个空