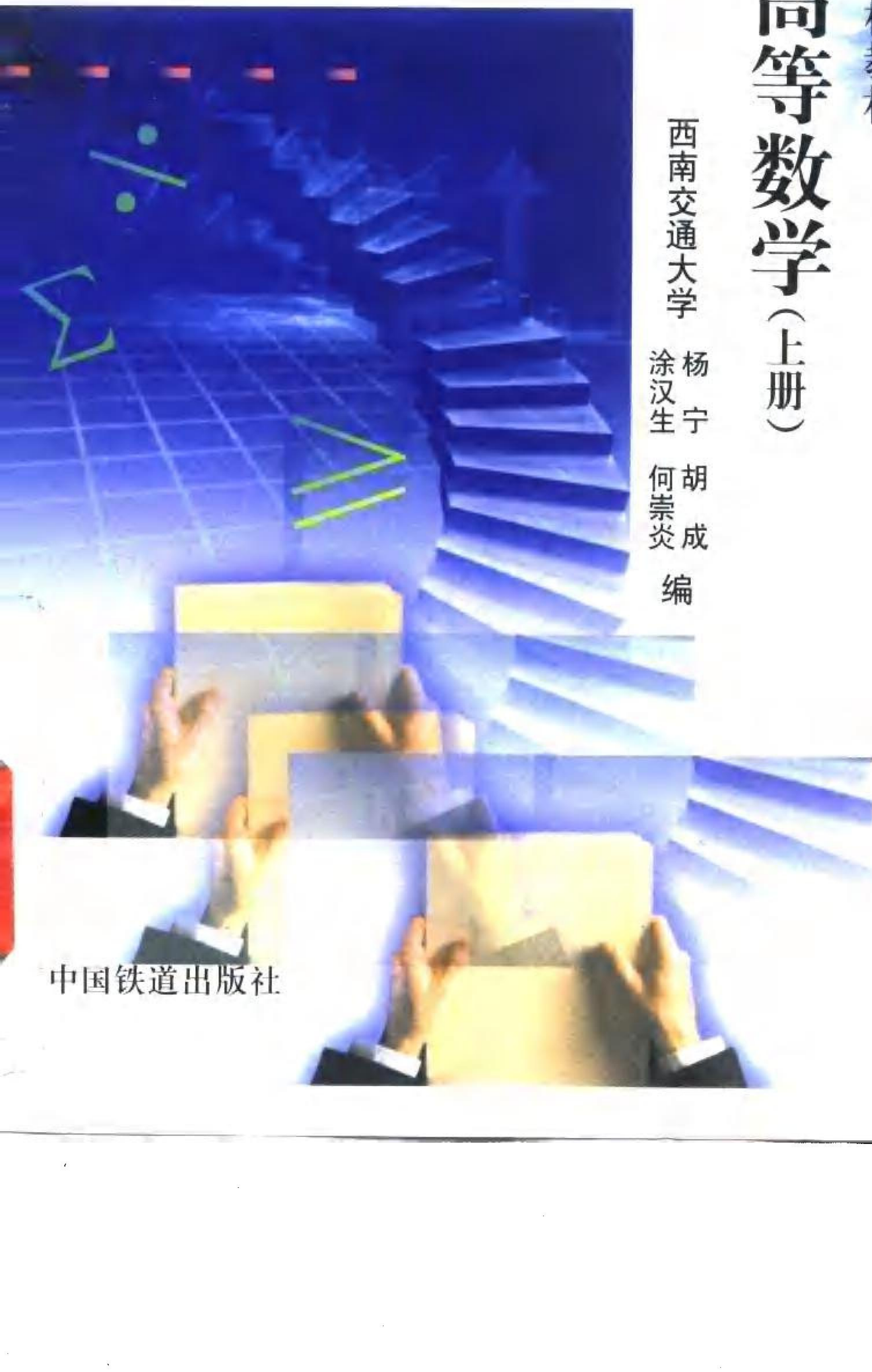
高等学校教材

高等数学（上册）

西南交通大学
杨宁 胡成
涂汉生 何崇炎 编



中国铁道出版社

（京）新登字 063 号

内 容 简 介

本书是在西南交通大学黄盛清主编的《高等数学》（上、下册）教材的基础上，结合近年来的教学实践，在保持原书主要特色的原则下，根据高等数学课程教学基本要求，重新编写的。

本书分上、下册两册。本册为上册，内容包括函数的极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分应用等。本书附有积分表和习题答案。

本书可作为高等学校工科高等数学课程的教材或教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册/杨宁等编．—北京：中国铁道出版社，1999
高等学校教材
ISBN 7-113-03295-8

Ⅰ．高…　Ⅱ．杨…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材
Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 14209 号

书　　名：高等学校教材**高等数学**（上册）
著作责任者：西南交通大学　杨　宁　胡　成　涂汉生　何崇炎
出版·发行：中国铁道出版社（100054，北京市宣武区右安门西街 8 号）
责任编辑：程东海
封面设计：马　利
印　　刷：北京市燕山印刷厂
开　　本：850×1168 1/32　印张：10.5　字数：277 千
版　　本：1999 年 8 月第 1 版　　1999 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1～8000 册
书　　号：ISBN7-113-03295-8/O·64
定　　价：16.60 元

前　　言

本书是在西南交通大学黄盛清主编的《高等数学》（上、下册）基础上，结合近年来的教学实践，在保持原书主要特色的原则下，根据“高等数学课程教学基本要求”，重新编写而成。

改编后的教材中，删去了“向量代数与空间解析几何”一章，其内容纳入《线性代数》教材中。本书体现微积分与线性代数的渗透与结合。可与我校韩流冰等编写的《线性代数》（中国铁道出版社 1998 年 12 月版）教材配套使用。

鉴于近年来高等理工科院校教学学时的压缩，本书在内容上作了进一步取舍，吸取了西南交通大学高等数学教研室近年来开展教学研究活动的成果，并对部分章节顺序作了调整，使之更便于教学和读者自学。

全书分上、下两册，上册内容包括函数的极限与连续，导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用，下册内容包括微分方程、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、级数。本书可作为全日制普通高校四年制本科理工科学生的教材或教学参考书，也可作为理工类高等教育自学考试、函授、夜大的教学参考书。

参加本书编写工作的有：杨宁（第一、二、三章），胡成（第四、五、六、十一章），涂汉生（第七、八章），何崇炎（第九、十章）。本书由黄盛清教授主审。

在本书编写过程中，得到西南交通大学应用数学系老师的帮助与指导，提出了许多很好的修改意见，在此一并致谢，对于书中错误及不妥之处，恳请读者批评指正。

编者

1999 年 1 月

目　　录

第一章　函数的极限与连续

微积分是以函数作为主要的研究对象，是中学数学中对函数研究的继续与发展。在微积分中，继承了中学数学的结果与方法，研究函数所采用的基本方法是极限方法。本章首先扼要总结函数的概念及其性质，提出几个有关函数的基本问题以揭示中学数学内容有待于发展的几个问题，然后介绍函数极限和连续性等概念及它们的一些性质。

第一节　函　　数

一、函数的定义

函数是不断发展的一个数学概念，在早期，它产生于变量之间相依关系的研究。

定义 1-1-1　设在某变化过程中有两个变量 x 与 y。如果对于 x 在其变化范围内的每一个数值，变量 y 都有唯一确定的数值和它对应，那末，称 y 是 x 的函数。记作 $y=f(x)$。又称 x 为自变量，y 为因变量。

函数的这个早期定义用于描述变量间的相依关系，比较方便，至今仍采用。但是，定义 1-1-1 的缺陷在于函数与因变量这两个概念混淆不清，也不便于函数概念的推广。随着集合概念的出现和对函数研究的深入，提出如下函数定义。

定义 1-1-2　设有两个非空实数集合 X 与 Y，如果对于 X 中任何一个数 x，按照某一确定的规则 f，在 Y 中都有唯一的数 y 与 x 对应，则称 f 是定义在 X 上而在 Y 内取值的函数。

X 称为函数 f 的定义域，记作 $D(f)$；与 x 对应的实数 y，记作 $y=f(x)$，y 的取值范围，即数集 $\{y|y=f(x),x\in D(f)\}$ 叫做

函数 f 的值域，记作 $Z(f)$。显然，$Z(f)\subseteq Y$。

习惯上，x 称为自变量，y 称为因变量，与 x 的特定值 x_0 相对应的数 $y_0=f(x)|_{x=x_0}=f(x_0)$ 叫做函数 f 在 x_0 处的函数值。

有时会出现对于自变量 x，有几个 y 值与之对应的情形，此时，这是不符合函数定义 1-1-2 的。为了研究变量 y 多值的情形，主要采用限制 y 的范围使之成为单值，符合定义 1-1-2 再进行研究。例如，$y=\mathrm{Arcsin}x$ 是多值的，当 y 限制在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，就是单值（这时反正弦函数记为 $y=\arcsin x$）。

我们知道，一对有序实数 (x,y) 可以表示直角坐标平面 xOy 上一点 P，记作 $P(x,y)$，依次称 x、y 为点 P 的横坐标与纵坐标。

设 f 是一个函数，由 f 得到的下列点 $P(x,y)$ 的集合

$$G(f)=\{P(x,y)\,|\,x\in D(f),y=f(x)\}$$

叫做函数 f 的图形。通常，函数 f 的图形 $G(f)$ 是 xOy 平面上一条曲线（图 1-1）。

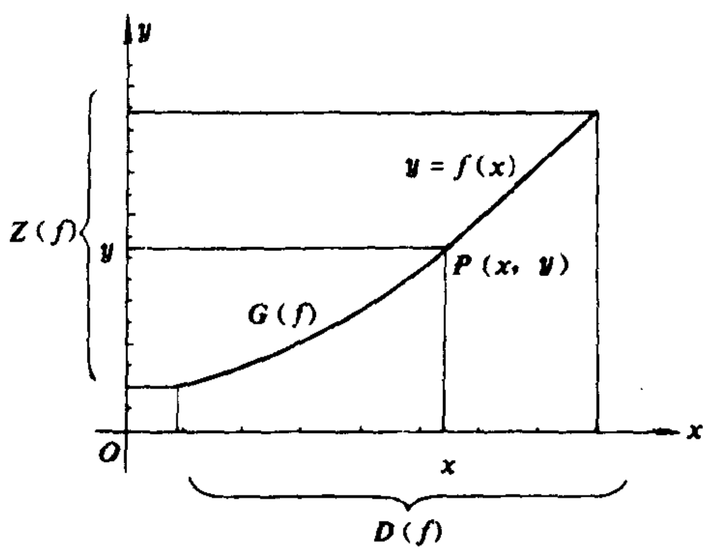


图 1-1

在微积分中，变量的取值范围限于实数集合 **R** 或 **R** 的子集。最为常见的是自然数集合 **N** 及区间。

定义 1-1-3 设 a、$b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，那末，满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 所组成的集合，叫做以 a、b 为端点的闭区间，记

作$[a,b]$。简记为$[a,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x\leqslant b\}$。类似地，$(a,b)\overset{def}{=}\{x\in\mathbf{R}\mid a<x<b\}$，叫做以 a、b 为端点的开区间；这里符号“$\overset{def}{=}$”表示“按定义相等”。

$[a,b)\overset{def}{=}\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x<b\}$ 及 $(a,b]\overset{def}{=}\{x\in\mathbf{R}\mid a<x\leqslant b\}$ 叫做以 a、b 为端点的半开区间。

以上这些区间都称为有限区间，数 $b-a$ 称为这些区间的长度，从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段（图 1-2）。

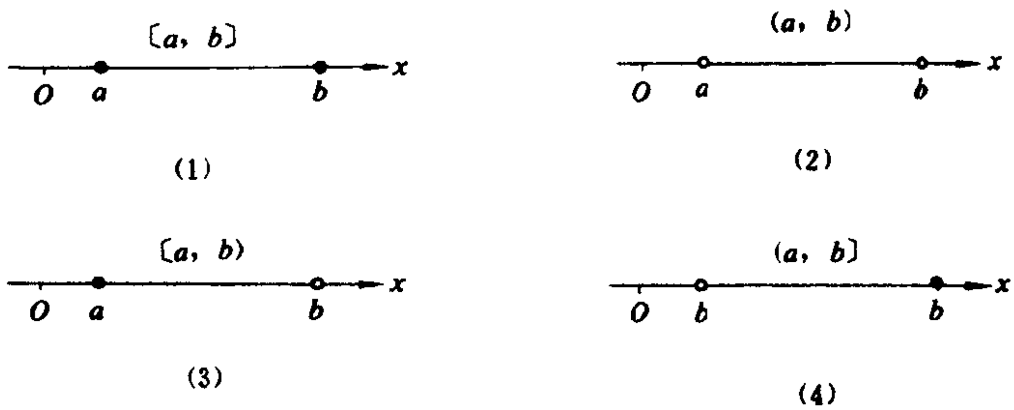


图 1-2

此外，还有所谓无限区间，引进记号“$+\infty$”与“$-\infty$”，依次读作“正无穷大”与“负无穷大”，则对 $a\in\mathbf{R}$，有

$$[a,+\infty)\overset{def}{=}\{x\in\mathbf{R}\mid x\geqslant a\};(a,+\infty)\overset{def}{=}\{x\in\mathbf{R}\mid x>a\}$$

$$(-\infty,a]\overset{def}{=}\{x\in\mathbf{R}\mid x\leqslant a\};(-\infty,a)\overset{def}{=}\{x\in\mathbf{R}\mid x<a\}$$

$$(-\infty,+\infty)\overset{def}{=}\mathbf{R}$$

定义 1-1-4 设 $a\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，那末开区间$(a-\delta,a+\delta)$叫做点 a 的 δ 邻域，且称$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$为点 a 的去心邻域（图 1-3），分别记作 $\mathrm{U}(a,\delta)$与$\mathrm{U}(\dot{a},\delta)$。

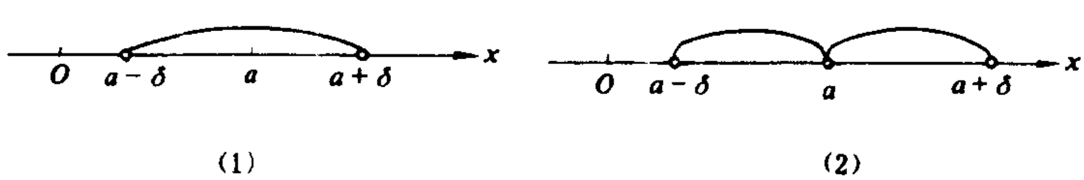


图 1-3

按开区间定义，点 a 的 δ 邻域为 $(a-\delta,a+\delta)=\{x\in\mathbf{R}\mid a-\delta<x<a+\delta\}$。由于 $a-\delta<x<a+\delta\Leftrightarrow-\delta<x-a<\delta\Leftrightarrow|x-a|<\delta$，所以 $\mathrm{U}(a,\delta)=\{x\in\mathbf{R}\mid|x-a|<\delta\}$

$$\mathrm{U}(\hat{a},\delta)=\{x\in\mathbf{R}\mid0<|x-a|<\delta\}$$

这里 $0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$。

二、函数的几种特性

1. 单射性与反函数

设函数 f 的定义域为 $D(f)$，值域为 $Z(f)$，$\forall\ y\in Z(f)$，必定有 $x\in D(f)$ 使 $f(x)=y$ 成立，这样的 x 可能不止一个。

定义 1-1-5 $\forall\ y\in Z(f)$，方程 $f(x)=y$ 只有唯一的根 $x\in D(f)$，则称 f 是单射函数，简称 f 单射。这里记号“$\forall\ y$”表示“对于任意 y”。

例如，当 n 是奇数时，幂函数 x^n 单射；当 n 是偶数($n\neq0$)时，x^n 不是单射，指数函数 a^x 单射；正弦函数 $\sin x$ 不是单射。

如果函数 f 不是单射，可以采用缩小定义域的办法使之化为单射。例如，$\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$；当 n 是正偶数时，x^n，$x\in[0,+\infty)$，均是单射。

定义 1-1-6 当函数 f 单射时，$\forall\ y\in Z(f)$，方程 $f(x)=y$ 有唯一确定的根 $x\in D(f)$。因此，此处由 y 到 x 的对应也是函数，我们称这个函数为 f 的反函数，记作 f^{-1}。显然，$D(f^{-1})=Z(f)$，且 $Z(f^{-1})=D(f)$。

根据定义 1-1-5 与定义 1-1-6 立即可得定理 1-1-1。

定理 1-1-1 如果 f 是单射函数，则

(1) f^{-1} 也是单射函数，且 $(f^{-1})^{-1}=f$；

(2) $\forall\ x\in D(f)$，$f^{-1}(f(x))=x$，且 $\forall\ x\in Z(f)$，$f(f^{-1}(x))=x$。

例 1-1 判断函数 $f(x)=\sqrt[3]{3x+2}$ 是否单射。如果是单射，求 $f^{-1}(x)$。

解 $\forall\, y\in\mathbf{R}$，由方程$\sqrt[3]{3x+2}=y$

即 $3x+2=y^3$ 解得 $x=\frac{1}{3}(y^3-2)$

此解唯一，所以，函数 $f(x)$单射，得 $x=f^{-1}(y)=\frac{1}{3}(y^3-2)$，

于是，将 x 与 y 互换得 $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x^3-2)$

如果 f 单射，则 $G(f)$与 $G(f^{-1})$之间在位置上有如下关系。

定理 1-1-2 如果函数 f 单射，那末函数 f 及其反函数 f^{-1}的图形 $G(f)$与 $G(f^{-1})$在 xOy 平面上对称于直线 $y=x$（图 1-4）（此定理中学已证明过）。

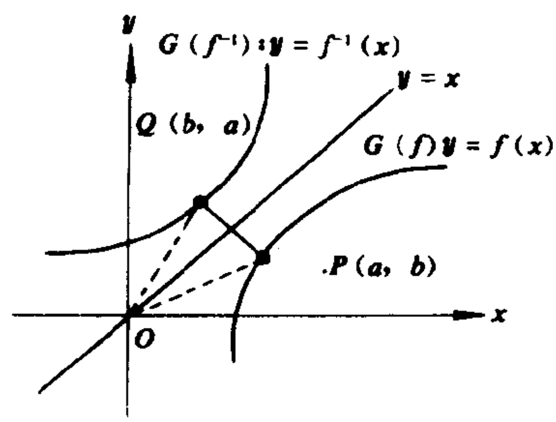


图 1-4

2. 单调性

定义 1-1-7 设 f 是函数，$I\subset D(f)$。则

(1) f 在 I 单调增加$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall\, x_1,x_2\in I: x_1<x_2, f(x_2)-f(x_1)\geqslant 0$。这里记号“$\overset{def}{\Leftrightarrow}$”表示“按定义等价”或“定义为”。

(2) f在 I 单调减少$\overset{def}{\Leftrightarrow}\forall\, x_1,x_2\in I: x_1<x_2, f(x_2)-f(x_1)\leqslant 0$。

(3) f 在 I 严格单调增加$\overset{def}{\Leftrightarrow}\forall\, x_1,x_2\in I: x_1<x_2, f(x_2)-f(x_1)>0$。

(4) f 在I 严格单调减少$\overset{def}{\Leftrightarrow}\forall\, x_1,x_2\in I: x_1<x_2, f(x_2)-f(x_1)<0$。

当函数 f 在 $D(f)$上单调增加或单调减少时，称 f 是单调函数。同样，当 f 在 $D(f)$上严格单调增加或减少时，就说 f 是严格单调函数。

下列定理是显然的。

定理 1-1-3 设 f 是严格单调函数，那末（1）f 是单射函数，（2）f^{-1}是严格单调函数，且

f 严格单调增加，则 f^{-1}严格单调增加；

f 严格单调减少，则 f^{-1}严格单调减少。

如何判断一个函数是否单调呢？这可以利用我们已经熟悉的函数图形从直观上来加以考察，也可以利用定义 1-1-7 证明不等式成立，但这样做往往不容易。能否给出判断函数是否单调的一种相当有效而又简便的方法，这是本书所要解决的问题之一。

3．奇偶性

定义 1-1-8 设 f 是函数，则

（1）f 是偶函数$\overset{def}{\Leftrightarrow}\forall\, x\in D(f), -x\in D(f)$，且 $f(-x)=f(x)$；

（2）f 是奇函数$\overset{def}{\Leftrightarrow}\forall\, x\in D(f), -x\in D(f)$，且 $f(-x)=-f(x)$。

例如，当 n 是偶数时，幂函数 x^n 是偶函数；当 n 是奇数时，x^n 是奇函数。这正是偶函数、奇函数名称的由来。

关于奇、偶函数的图形，有下列几何性质。

定理 1-1-4 （1）f 是奇函数，则 $G(f)$对称于原点；

（2）f 是偶函数，则 $G(f)$对称于 y 轴。

证 （1）点 $P(a,b)$与点 $Q(-a,-b)$对称于原点。

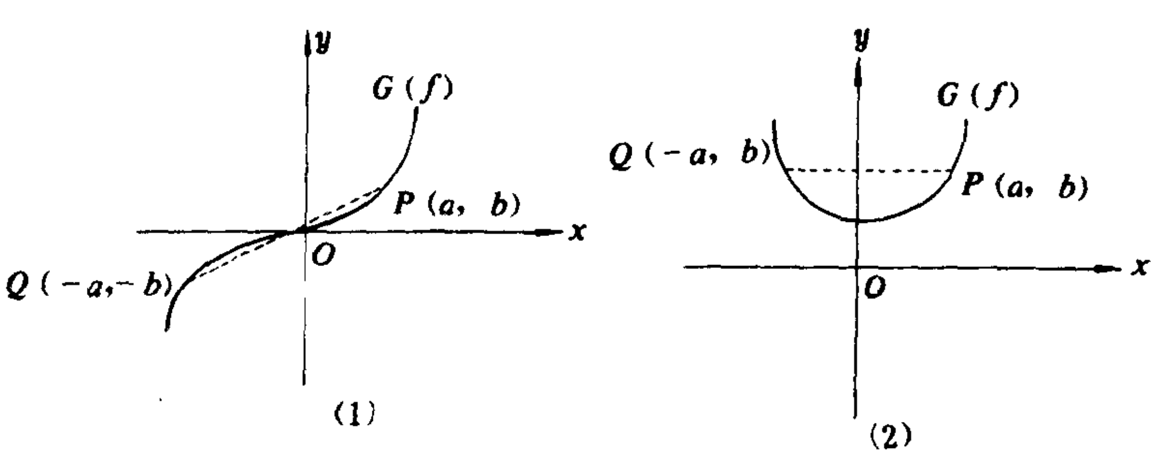


图 1-5

又因为 $P(a,b)\in G(f)\Leftrightarrow a\in D(f)$，且 $b=f(a)$

$$\Leftrightarrow -a\in D(f)\text{，且} -b=f(-a)$$

$$\Leftrightarrow Q(-a,-b)\in G(f)$$

由 P 点的任意性，所以 $G(f)$ 对称于原点（图 1-5）。

同理可证（2）。

4. 周期性

定义 1-1-9 设 f 是函数，则

$$f\text{ 是周期函数}\overset{def}{\Leftrightarrow}\exists\ l>0,\ \forall\ x\in D(f),\ x\pm l\in D(f)$$

$$\text{且 } f(x+l)=f(x)$$

其中 l 叫做函数的周期，通常所说的周期，是指它的最小正周期。周期函数有下列性质。

定理 1-1-5 （1）设 f 是周期为 T 的周期函数，则 $\forall\ n\in\mathbf{N}$，$\forall\ x\in D(f)$，$f(x+nT)=f(x)$，且 $f(x-nT)=f(x)$。

（2）设 f 是周期为 T 的周期函数，$a>0$，$g(x)=f(ax)$，则 g 是周期为 $\frac{T}{a}$ 的周期函数。

证明留给读者完成。

由定理 1-1-5（2）可知，$\sin 2x$ 的周期是 π，$\cos\frac{1}{2}x$ 的周期是 4π。

设 f 是周期为 T 的周期函数，据定义 1-1-9 可知，f 的图形在每个长度为 T 的相邻区间上有相同的形状，因此，只要作出它在某一长度为 T 的区间上的图形，就可了解全貌（图 1-6）。

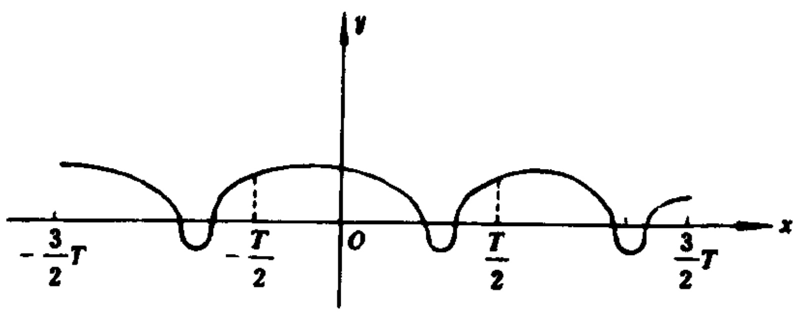


图 1-6

5．有界性

定义 1-1-10 设 f 是函数，$I\subset D(f)$，则

（1）f 在 I 有上界 $\overset{def}{\Leftrightarrow}\exists\ M\in\mathbf{R}$，$\forall\ x\in I$，$f(x)\leqslant M$；

（2）f 在 I 有下界 $\overset{def}{\Leftrightarrow}\exists\ N\in\mathbf{R}$，$\forall\ x\in I$，$f(x)\geqslant N$；

（3）f 在 I 有界 $\overset{def}{\Leftrightarrow}\exists\ M>0$，$\forall\ x\in I$，$|f(x)|\leqslant M$。

这里记号"$\exists\ M$"表示"存在 M"。(1)、(2) 中的 M 与 N 顺次叫做函数 f 在集合 I 上的上界与下界。(1)、(2)、(3) 的否定，依次称为 f 在 I 上无上界、无下界、无界。由命题的否定法则，得

f 在 I 无上界 $\Leftrightarrow\forall\ M\in\mathbf{R}$，$\exists\ x\in I$，$f(x)>M$；

f 在 I 无下界 $\Leftrightarrow\forall\ N\in\mathbf{R}$，$\exists\ x\in I$，$f(x)<N$；

f 在 I 无界 $\Leftrightarrow\forall\ M>0$，$\exists\ x\in I$，$|f(x)|>M$。

例 1-2 判定下列函数在指定区间上的有界性：

（1）$f(x)=\dfrac{1}{x},I=(1,+\infty),J=(0,1)$；

（2）$g(x)=\dfrac{\lg x}{x},I=\left[\dfrac{1}{2},1\right],J=[1,+\infty)$。

解 （1）$\forall\ x\in I=(1,+\infty),x>1,|f(x)|=\left|\dfrac{1}{x}\right|=\dfrac{1}{x}<1$

所以 f 在 I 有界。

又 $\forall\ x\in J=(0,1)$，$f(x)=\dfrac{1}{x}>0$，所以 f 在 J 有下界。

但 $\forall\ M>0$，取 $x=\dfrac{1}{M+1}\in J$，而 $f(x)=M+1>M$，所以 f 在 J 无上界。

（2）$\forall\ x\in I=\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]$，则有 $\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$，$1\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant 2$

因为 $\lg x$ 在 I 上单调增加，所以 $\lg\dfrac{1}{2}\leqslant\lg x\leqslant\lg 1=0$

注意到 $\lg x\leqslant 0$，所以 $2\lg\dfrac{1}{2}\leqslant 2\lg x\leqslant\dfrac{\lg x}{x}\leqslant\lg x\leqslant 0$

从而 $g(x)=\dfrac{\lg x}{x}$ 在 $I=\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]$ 上有界，$2\lg\dfrac{1}{2}$ 与 0 分别是它的下

界与上界。

又$\forall$ $x\in J=[1,+\infty)$，$g(x)=\frac{\lg x}{x}\geqslant 0$，所以 g 在 J 有下界。但$\forall$ $x\in[1,+\infty)$，$\exists$ 自然数 n，使 $n\leqslant x<n+1$，因此有

$$10^x\geqslant 10^n=(1+9)^n>1+9n>1+n>x$$

所以 $\lg x<x$，即 $g(x)=\frac{\lg x}{x}<1$，它的上界为 1。

从而证明了 $g(x)=\frac{\lg x}{x}$在 $J=[1,+\infty)$ 上有界。

三、函数的运算与初等函数

1. 四则运算

函数的值域限定在实数集合内。由于实数与实数之间可以进行四则运算，所以函数 $f(x)$与 $g(x)$之间也可进行四则运算，其运算结果依次叫做 $f(x)$与 $g(x)$的和、差、积、商。

设 $F(x)=f(x)+g(x)$或 $f(x)-g(x)$或 $f(x)\cdot g(x)$，则 $D(F)=D(f)\cap D(g)$。

设 $G(x)=f(x)\div g(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$，则 $D(G)=D(f)\cap\{x\in D(g)\mid g(x)\neq 0\}$。

2. 复合运算

定义 1-1-11 设 f、g 是两个函数，$Z(g)\cap D(f)\neq\phi$，$\forall$ x：$x\in D(g)$，且 $g(x)\in D(f)$，令 $u=g(x)$，则 $y=f(u)=f(g(x))$是 x 的函数，称此函数为由 $y=f(u)$与 $u=g(x)$复合而成的函数，简称为 f 与 g 的复合函数。u 叫做中间变量。

简单地说，f 与 g 的复合函数 $f(g(x))$是以函数 g 的函数值 $g(x)$代替函数 f 的自变量所成的函数。需要注意的是函数 f 与 g 的复合是有条件的，当 $D(f)\cap Z(g)\neq\phi$ 时，复合函数 $f(g(x))$才有意义。例如，$f(x)=\arcsin x$，$g(x)=x^2+2$，则 $f(g(x))=\arcsin(x^2+2)$没有意义，而 $g(f(x))=(\arcsin x)^2+2$ 却是有意义的。同时也说明 f 与 g 的复合 $f(g(x))$和 g 与 f 的复合 $g(f(x))$一般是不同的。

由定理 1-1-1 可知，单射函数 f 与其反函数 f^{-1}的复合函数是简单函数，例如，$a^{\log_a x}=x\ (x>0)$；$\log_a a^x=x\ (x\in\mathbf{R})$；

$\sin(\arcsin x)=x(-1\leqslant x\leqslant 1)$；$\arcsin(\sin x)$

$=x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$；

$(\sqrt{x})^2=x(x>0)$；$\sqrt{x^2}=|x|\ (x\in\mathbf{R})$。

幂函数 $x^\mu\ (x>0)$ 有时需要表示为指数函数 a^x 与其反函数 $\log_a x$ 的复合函数如下：$x^\mu=a^{\log_a x^\mu}=a^{\mu\log_a x}$

例 1-3 (1) 问 $F(x)=\sqrt{\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ 是由哪些简单的函数复合而成的？

(2) 已知 $f(\sin x)=1+\cos 2x$，求 $f(x)$。

解 (1)令 $f(x)=\sqrt{x}$ $g(x)=\log_a x$，$\varphi(x)=1+\frac{1}{x}$，则

$$F(x)=f(g(\varphi(x)))$$

(2) 令 $u=\sin x$，则 $1+\cos 2x=2\cos^2 x=2\ (1-\sin^2 x)$ $=2\ (1-u^2)$

所以 $f(u)=2(1-u^2)$，$f(x)=2(1-x^2)$

3. 初等函数

常量函数 $f(x)=c$(常数)，幂函数 $f(x)=x^\mu$(μ 常数)，指数函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1$ 常数)，对数函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq 1$ 常数)，三角函数 $f(x)=\sin x$，$f(x)=\cos x$，$f(x)=\tan x$ 等以及反三角函数 $f(x)=\arcsin x$，$f(x)=\arccos x$，$f(x)=\arctan x$ 等，统称为基本初等函数。

这些函数的性质及图形，读者也已熟悉，在附录中列出，以便查用。

基本初等函数经过四则运算及复合运算可以构造出多种函数。

定义 1-1-12 可以由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算得到的用一个式子表示的函数叫做初等函数。