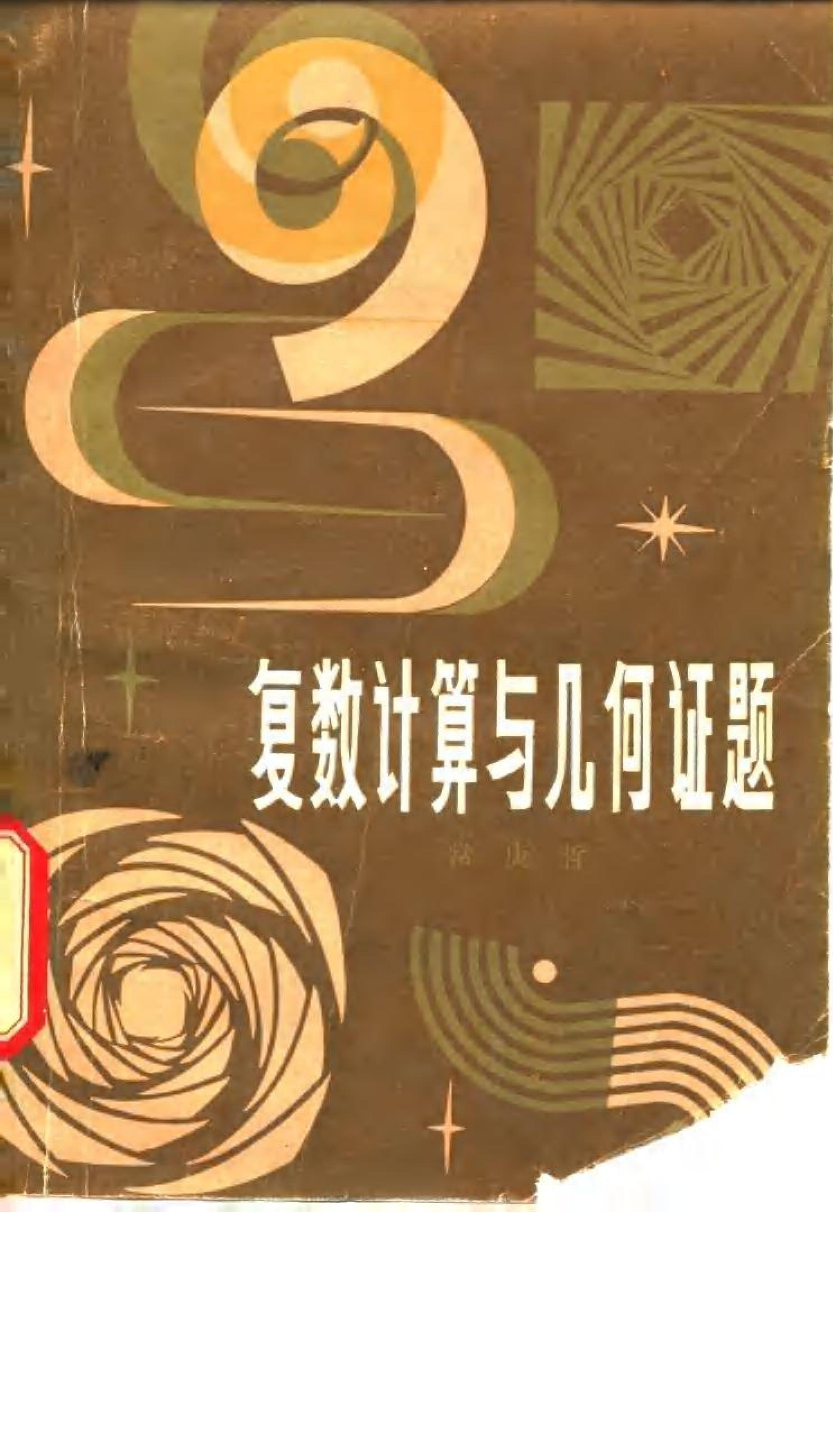


复数计算与几何证题

常庚哲

复数计算与几何证题

常 庚 哲

上海教育出版社

复数计算与几何证题

常 庚 哲

上海教育出版社出版

（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　上海市印刷六厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 5.25　字数 111,000

1980 年 6 月第 1 版　1980 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—100,000 本

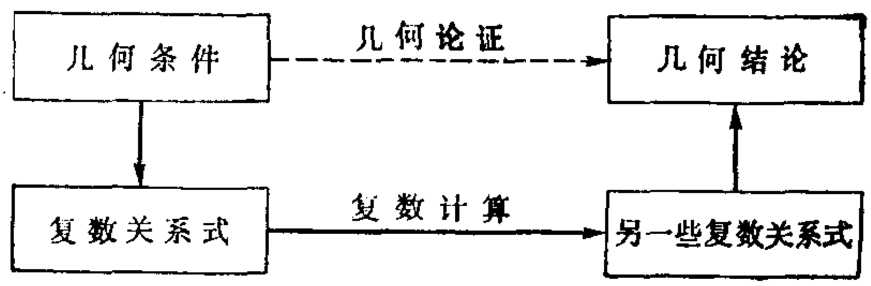
统一书号：7150·2270　　定价：0.41 元

前　　言

在 1963 年北京市中学生数学竞赛的前夕，我们系的一些同志曾经以《复数计算与几何证题》为题，对北京市的部份高中学生作过几次讲演，引起了大家的兴趣. 在此基础上，在曾肯成教授的指导下，作者与伍润生同志合写了《复数与几何》一书(人民教育出版社，1964 年)，对此又作了更详细的讨论. 从那以后，作者有意识地注意搜集这一方面的资料，到了今天，这些资料使作者感到有必要再来写一本小册子了.

用平面上的点来表示复数之后，可以看出：复数的加法和减法运算，正好相当于平面矢量的对应运算，这样一来，就有可能通过复数来表达平面上的距离、夹角和面积等几何度量；复数乘法运算的几何意义表明，通过乘以模长为 1 的复数可以灵活地描述平面上的旋转变换. 正因为如此，平面上某些图形的许多特殊几何关系，例如三点共线、四点共圆、等边三角形、两个三角形相似等等，可以用复数的某些代数关系式来刻划. 所有这一切，提供了用复数计算来证明几何问题的基础.

所谓用复数计算来证明几何问题，其主要思想可以用下列框图表示：



这就是说，从题设的几何条件出发，先把这些条件用对应的复数的代数关系式表达出来，通过一系列的复数计算，得出新的一些关系式，然后再把它们"翻译"为几何关系，这就是我们得出的几何结论．如果我们沿虚线所指示的方向进行，则需通过一系列的几何论证，这是综合几何的方法；如果用复数证题，虽然走过的是一条迂回曲折的道路，但它所需要的只是直截了当、踏踏实实的计算，不需要多少"巧思"，也无须添加神奇的辅助线，这正是用复数证几何题的最大特点．我们希望读者通过阅读本书能学会这种方法，了解到复数在几何上还有这样一些用处．

现在扼要地谈谈本书的内容．第一节是讲复数的基本知识，特别是强调了复数各种运算的几何意义，这一些是中学代数教科书中很少提到的．第一节是阅读全书的基础．从第二节至第六节分别介绍了怎样用复数来表示距离、定比分点、夹角和面积，并通过大量的例子来显示它们在解几何问题中的应用．第七节和第八节是专题性的讨论，详细地讲述了 Pedoe 不等式和 Douglas-Newmann 定理．虽然这两个论题只是从四十年代起才陆续出现在国外一些著名的数学刊物上，但其内容却完全是初等的，只不过是前面各节所介绍过的那些知识的综合运用．第九节叙述了复数的抽象定义，第十节介绍了 Hamilton 的"四元数"，读者从这里可以对于抽象的代数系统获得初步的印象．

本书配置了百余道习题，除了一目了然的题目之外，都作了提示或解答，较难的题目解答得比较详细．可以认为这些都是本书内容的一个组成部份．除了做这些习题之外，建议读者今后在作几何题目的时候，有意识地留心它们是否可用复数计算来解决．一些比较复杂的几何题，可以通过复数计

算解决得非常简洁和巧妙(例如第四节的“九点圆”、“Simson线”和第七节的 Pedoe 不等式),但是决不能指望对于所有几何证题,复数方法总是能奏效的,总是非常方便的.

在本书的写作过程中,作者经常同单墫、李克正同志进行着有益的讨论,他们也给本书提供了若干有趣的例题和习题,作者向他们致谢!由于作者的水平有限,书中的缺点错误在所难免,恳请同志们批评指正.

常庚哲　1979年7月

于中国科学技术大学数学系

目　　录

一、复数——平面矢量

对于实数，想必读者已经很熟悉了．我们知道，实数有下述性质：对实数施行加、减、乘、除四则运算（做除法时，除数不能是零），所得的结果仍然是实数；任何一个收敛的实数列，其极限一定还是实数．我们还知道，对于度量线段来说，实数系统已完全够用，但是对于求解代数方程来说，实数系统就显得不够用了，例如，对最简单的整数系数的二次方程

$$\xi^2+1=0,$$

在实数范围内就没有解，因为对任何实数 ξ 来说，上式左边总是正的．为了求解方程的需要，得将实数系统加以扩大．首先引入一个新"数" i，让它适合

$$i^2=-1,$$

即 i 适合方程 $\xi^2+1=0$．新数"i"叫做虚单位．把 i 添加到实数系统中去，把形如

$$\xi+i\eta \qquad (\text{其中 } \xi, \eta \text{ 都是实数})$$

的表达式称为一个复数，其中的 ξ 和 η 分别叫做这个复数的实部和虚部，分别记成 $\xi=\mathrm{Re}(z)$，$\eta=\mathrm{Im}(z)$．如果 $\eta\neq0$，那么 $\xi+\eta i$ 叫做虚数，特别地，如果 $\xi=0$ 而 $\eta\neq0$，那么 ηi 叫做纯虚数；当 $\eta=0$ 时，复数 $\xi+i\eta$ 就变成了实数．$0+i0$ 就直接用 0 来记．

我们规定两个复数相等的意义．设 $\xi+i\eta$ 和 $\xi'+i\eta'$ 是两个复数，等式 $\xi+i\eta=\xi'+i\eta'$ 成立的意义是 $\xi=\xi'$ 并且 $\eta=\eta'$．这就是说，当且仅当实部与虚部分别相等时，两个复数才相

等. 特别地, $\xi+i\eta=0$ 当且只当 $\xi=\eta=0$.

现在我们来定义复数的四则运算. 设有两个复数

$$z_1=\xi_1+i\eta_1, \quad z_2=\xi_2+i\eta_2,$$

首先按公式

$$z_1+z_2=(\xi_1+i\eta_1)+(\xi_2+i\eta_2)=(\xi_1+\xi_2)+i(\eta_1+\eta_2)$$

来定义两个复数的加法. 容易证明, 复数的加法适合交换律, 即对任何两个复数 z_1、z_2, 有

$$z_1+z_2=z_2+z_1.$$

这是因为, 按照加法定义

$$z_2+z_1=(\xi_2+i\eta_2)+(\xi_1+i\eta_1)=(\xi_2+\xi_1)+i(\eta_2+\eta_1),$$

对实数而言, 加法是适合交换律的, 于是有

$$\xi_1+\xi_2=\xi_2+\xi_1, \quad \eta_1+\eta_2=\eta_2+\eta_1,$$

再按复数相等的意义, 自然就得出 $z_1+z_2=z_2+z_1$ 了.

复数的加法也适合结合律, 这就是说, 对任何三个复数 z_1、z_2、z_3, 一定有

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

这可以仿照证明加法的交换律那样的步骤来进行证明. 读者在证明过程中将会体会到, 复数加法的结合律正是实数加法的结合律的必然推论.

其次, 来讨论复数的减法. 我们定义

$$z_1-z_2=(\xi_1+i\eta_1)-(\xi_2+i\eta_2)=(\xi_1-\xi_2)+i(\eta_1-\eta_2).$$

由此显然可见, 当 $z_1=z_2$ 的时候, 也只有在这种时候, 才会有

$$z_1-z_2=0.$$

再用公式

$$z_1z_2=(\xi_1+i\eta_1)(\xi_2+i\eta_2)=\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2+i(\xi_1\eta_2+\eta_1\xi_2)$$

来定义复数的乘法. 可以证明, 复数的乘法也是适合交换律的, 这是因为, 对任何复数 z_1 与 z_2, 按照定义

$$z_2z_1=(\xi_2+i\eta_2)(\xi_1+i\eta_1)=\xi_2\xi_1-\eta_2\eta_1+i(\xi_2\eta_1+\eta_2\xi_1),$$

根据实数乘法的交换律,应有

$$\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2=\xi_2\xi_1-\eta_2\eta_1,$$

$$\xi_1\eta_2+\eta_1\xi_2=\xi_2\eta_1+\eta_2\xi_1,$$

由此推知 $z_1z_2=z_2z_1$.

仿照上述证明过程, 可以证明: 对于任何三个复数 z_1、z_2、z_3, 等式

$$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$$

成立,这就是复数乘法的结合律,这是实数乘法的结合律的直接后果.

复数的乘法对加法还有分配律, 即对任何复数 z_1、z_2、z_3, 均有

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3,$$

这是因为

$$\begin{aligned}
z_1(z_2+z_3)&=(\xi_1+i\eta_1)[(\xi_2+i\eta_2)+(\xi_3+i\eta_3)]\\
&=(\xi_1+i\eta_1)[(\xi_2+\xi_3)+i(\eta_2+\eta_3)]\\
&=\xi_1(\xi_2+\xi_3)-\eta_1(\eta_2+\eta_3)\\
&\quad+i[\xi_1(\eta_2+\eta_3)+\eta_1(\xi_2+\xi_3)]\\
&=(\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3-\eta_1\eta_2-\eta_1\eta_3)\\
&\quad+i(\xi_1\eta_2+\xi_1\eta_3+\eta_1\xi_2+\eta_1\xi_3);
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
z_1z_2+z_1z_3&=(\xi_1+i\eta_1)(\xi_2+i\eta_2)+(\xi_1+i\eta_1)(\xi_3+i\eta_3)\\
&=(\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2)+i(\xi_1\eta_2+\eta_1\xi_2)\\
&\quad+(\xi_1\xi_3-\eta_1\eta_3)+i(\xi_1\eta_3+\eta_1\xi_3)\\
&=(\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3-\eta_1\eta_2-\eta_1\eta_3)\\
&\quad+i(\xi_1\eta_2+\eta_1\xi_2+\xi_1\eta_3+\eta_1\xi_3),
\end{aligned}$$

比较以上两式中的最后一部分中的实部与虚部, 立即看出确

有 $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$ 成立.

从复数的加、减、乘三种运算的定义和性质中可以看到，在对复数作这些运算的时候，可以把 i 看成一个独立的文字，对它可以进行合并同类项等变形. 在作乘法的时候，应当随时随地用 $i^2=-1$ 这一关系式来化简.

在考察一个复数 $z=\xi+i\eta$ 的同时，有时还要涉及一个与 z 相关的复数 $\xi-i\eta$，这个复数叫做 $z=\xi+i\eta$ 的共轭复数，用 $\bar{z}$ 来记，即

$$\bar{z}=\xi-i\eta.$$

显然，有

$$\operatorname{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2};\quad \operatorname{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

复数 z 与其共轭复数相乘，有

$$z\bar{z}=(\xi+i\eta)(\xi-i\eta)=\xi^2+\eta^2.$$

我们令

$$|z|=|\xi+i\eta|=\sqrt{\xi^2+\eta^2},$$

并称为复数 z 的模（或绝对值），于是就有 $z\bar{z}=|z|^2$. 显然，$|z|\geqslant 0$，等号当且只当 $z=0$ 时成立.

当 $z\neq 0$ 时，可以定义复数 z 的“倒数”z^{-1}（或记成 $1/z$），即

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

由此显见

$$zz^{-1}=z^{-1}z=z\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)=|z|^2/|z|^2=1.$$

现在可以进而定义复数的除法运算. 设 z_1 与 $z_2\neq 0$ 是两个复数，规定

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1z_2^{-1}=z_1\left(\frac{1}{z_2}\right)=z_1\,\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

由此可以算出

$$\frac{\xi_1+i\eta_1}{\xi_2+i\eta_2}=\frac{(\xi_1+i\eta_1)(\xi_2-i\eta_2)}{\xi_2^2+\eta_2^2}$$

$$=\frac{\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2}{\xi_2^2+\eta_2^2}+i\frac{\eta_1\xi_2-\xi_1\eta_2}{\xi_2^2+\eta_2^2}.$$

以上两式表明，复数的除法可以通过共轭复数而化成复数的乘法来计算，这是复数除法的一个很重要的性质.

到此为止，我们已经定义了复数的全部四则运算.

[例 1] 对于两复数 z_1、z_2，求证 $z_1z_2=0$ 的充要条件是 z_1 与 z_2 中至少有一数为零.

证明 i) 设 $z_1=0$，于是

$$z_1z_2=(0+i0)(\xi_2+i\eta_2)=0+i0=0.$$

ii) 设 $z_1z_2=0$ 且 $z_2\neq0$，于是 z_2^{-1} 存在，一方面由 i) 可得

$$(z_1z_2)z_2^{-1}=0z_2^{-1}=0,$$

另一方面，

$$(z_1z_2)z_2^{-1}=z_1(z_2z_2^{-1})=z_1\cdot1=z_1,$$

比较以上两式，可知 $z_1=0$.

[例 2] 对于两个复数 z_1 与 z_2，求证

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2,\quad \overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2,\quad \overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2,$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},\quad 其中\ z_2\neq0.$$

证明 前两式的证明非常容易，这里只证后面两式. 设 $z_1=\xi_1+i\eta_1$，$z_2=\xi_2+i\eta_2$，于是

$$\overline{z_1z_2}=\overline{(\xi_1+i\eta_1)(\xi_2+i\eta_2)}=\overline{(\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2)+i(\xi_1\eta_2+\eta_1\xi_2)}$$

$$=(\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2)-i(\xi_1\eta_2+\eta_1\xi_2)$$

$$=(\xi_1-i\eta_1)(\xi_2-i\eta_2)=\bar{z}_1\bar{z}_2.$$

再证最后一式. 由于 $z_1=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)z_2$，所以利用已证之结果，

便得

$$\bar{z}_1=\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)z_2}=\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}\bar{z}_2,$$

由此推出
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

[例 3] 设 $f(t)$ 是变量 t 的实系数多项式，即

$$f(t)=\alpha_0 t^n+\alpha_1 t^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}t+\alpha_n,$$

其中 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ 均为实数，则对任何复数 z 有

$$\overline{f(z)}=f(\bar{z}).$$

证明 由于 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 均为实数，故

$$\bar{\alpha}_0=\alpha_0,\ \bar{\alpha}_1=\alpha_1,\ \cdots,\ \bar{\alpha}_n=\alpha_n.$$

这样，由例 2 的结果，可知

$$\begin{aligned}\overline{f(z)}&=\overline{\alpha_0 z^n+\alpha_1 z^{n-1}+\cdots+\alpha_n}=\overline{\alpha_0 z^n}+\overline{\alpha_1 z^{n-1}}+\cdots+\bar{\alpha}_n\\&=\bar{\alpha}_0\overline{z^n}+\bar{\alpha}_1\overline{z^{n-1}}+\cdots+\bar{\alpha}_n=\alpha_0(\bar{z})^n+\alpha_1(\bar{z})^{n-1}+\cdots+\alpha_n\\&=f(\bar{z}).\end{aligned}$$

[例 4] 设 $f(t)$ 是 t 的实系数多项式，如果复数 z 是方程 $f(t)=0$ 的根，则 $\bar{z}$ 亦必是这一方程的根.

证明 由于 $f(t)$ 是实系数多项式，于是依例 3 的结果，可知

$$f(\bar{z})=\overline{f(z)}=\bar{0}=0,$$

这表明当复数 z 是多项式 $f(t)$ 的零点时，$\bar{z}$ 也是它的零点.

[例 5] 对于复数 z_1, z_2 和 z, 求证

$$|z|=|\bar{z}|,\quad |z_1z_2|=|z_1||z_2|,$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}.\quad (\text{其中 } z_2\neq 0)$$

证明 由于 $|z|^2=z\bar{z}$ 以及 $\overline{(\bar{z})}=z$, 所以

$$|z|^2=z\bar{z}=\bar{z}\,\overline{(\bar{z})}=|\bar{z}|^2.$$

由于$|z|\geqslant 0$, $|\bar{z}|\geqslant 0$,故可得出$|z|=|\bar{z}|$. 其次,

$$|z_1z_2|^2=z_1z_2\overline{(z_1z_2)}=z_1z_2\bar{z}_1\bar{z}_2$$
$$=(z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2)=|z_1|^2|z_2|^2.$$

因为$|z_1z_2|\geqslant 0$, $|z_1|\geqslant 0$, $|z_2|\geqslant 0$, 得出$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$. 这一性质可以推广到多个复数相乘的情形,即

$$|z_1z_2\cdots z_n|=|z_1||z_2|\cdots|z_n|.$$

最后,由于$z_1=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)z_2$,所以

$$|z_1|=\left|\left(\frac{z_1}{z_2}\right)z_2\right|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right||z_2|,$$

已设$z_2\neq 0$,故$|z_2|>0$,由此得到

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

关于复数的代数运算方面的知识,暂时介绍到这里. 让我们回顾一下:我们是为了使方程$\xi^2+1=0$有解而引入虚单位i的,然后把形如$\xi+i\eta$的一切"数"称为复数(ξ, η为任何实数),并在其中定义四则运算,组成了复数系统. 非常奇妙的是,把实数系统这样扩大成复数系统之后,任何一个复系数的代数方程,其全部根都在复数系统这一范围之内. 换句话说,从寻求复系数代数方程的根这一目的来说,复数系统已经够用了,没有必要再扩大了!这是数学上的一个极为重要、十分深刻的成果!

本书的重点是放在用复数来讨论平面上的一系列几何问题这一方面,以上的那些知识是读者必须具备的;但是,更应当强调的是复数的几何表示和复数作为平面矢量的许多性质. 这一些,在本节的其余部份将一一详细讨论.

1. 复 平 面

在一个取定的平面直角坐标系 OXY 中，对于任一复数 z，我们用坐标为 $(\mathrm{Re}(z),\ \mathrm{Im}(z))$ 的点来表示这个复数．反之，给出平面上的一点的坐标 $(\xi,\ \eta)$，我们作复数 $\xi+i\eta$ 与之对应．这样一来，就建立了平面上的所有点和一切复数之间的一一对应（图 1-1）．正因为如此，我们今后就把复数和坐标平面上的点等同起来，把具有坐标 $(\mathrm{Re}(z),\ \mathrm{Im}(z))$ 的那一点直接说成点 z．OX 轴上的各点均有 $\xi+i0$ 的形式，故称 OX 为实轴；OY 轴上的各点均有 $0+i\eta$ 的形式，则称 OY 为虚轴．原点 O 被复数 0 所表示．由于这个平面上的各点均被确定的复数所描述，故称它为复平面．

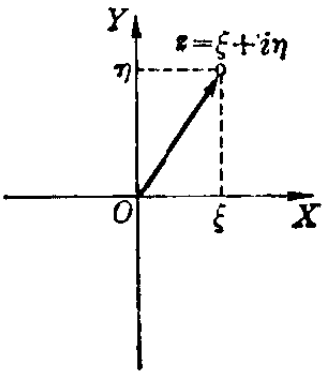


图 1-1

由图 1-1 可见，点 z 到原点的距离是 $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$，这正是复数 z 的模 $|z|$．在复平面上，点 z 与 $\bar{z}$ 关于实轴对称，所以从几何上也可以明显地看出 $|z|=|\bar{z}|$．

2. 用复数表示平面矢量

矢量是一个既有方向又有长短的量．给出一个复数 z，以原点 O 为起点，以点 z 为终点的矢量，用 $\overrightarrow{Oz}$ 表示．反之，把一个矢量的起点放在原点 O，它的终点便唯一地指着一点，也就是说确定了一个复数．这样，我们又可以把自原点出发的一切矢量同全体复数等同起来，即用复数 z 表示矢量 $\overrightarrow{Oz}$，

直接记为$z=\overrightarrow{Oz}$. 矢量$\overrightarrow{Oz}$的长度用$\|\overrightarrow{Oz}\|$来记，这里用了两侧各两竖的记号，为的是避免同复数模的记号相混．当然，显然有$\|\overrightarrow{Oz}\|=|z|$.

重要的是，复数的加法同平面矢量的加法规律——平行四边形法则竟是完全一致的！事实上，以$\overrightarrow{Oz_1}$和$\overrightarrow{Oz_2}$为两条邻边作一个平行四边形Oz_1zz_2，由图1-2可见

$$\mathrm{Re}(z)=\xi_1+\xi_2=\mathrm{Re}(z_1+z_2).$$

同理，有

$$\mathrm{Im}(z)=\eta_1+\eta_2=\mathrm{Im}(z_1+z_2).$$

由复数相等的定义及以上两式可知$z=z_1+z_2$，这就证明了我们的论断．

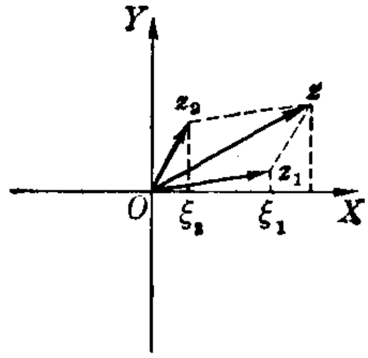


图 1-2

矢量有两个要素，即长短和方向．在许多情形(但不是一切情形)，矢量的起点的位置是无关紧要的．例如说，我们计算矢量的长度，或者通过矢量来计算两个方向的夹角，这时就无须考虑矢量的起点在什么地方．因此，今后如果有两个矢量，它们的长度相等并且指向相同，那就不管它们的起点在什么地方，都认为它们是相等的矢量．这也就是说，凡是经过平行移动而能使之完全贴合的两个矢量，都是相等的．这种矢量，叫做自由矢量．

前面谈到过的用矢量来确定平面上的点，那就必须把矢量的起点放在坐标原点上，这个矢量称为该点的定位矢量，定位矢量就不是自由矢量了．

从自由矢量的观点来看，在图1-2中，有$\overrightarrow{Oz_2}=\overrightarrow{z_1z}$，从而有

$$\overrightarrow{Oz}=\overrightarrow{Oz_1}+\overrightarrow{Oz_2}=\overrightarrow{Oz_1}+\overrightarrow{z_1z},$$

由此得到复数加法的三角形法则，在实用上，这一法则比平行

四边形法则更为方便：为了得到 z_1+z_2 的定位矢量，只须把 z_2 的定位矢量平行地移动，使其起点合于 z_1，其终点用复数 z 来记，那么 $\triangle Oz_1z$ 的另一边矢量 $\overrightarrow{Oz}$ 正是所求的定位矢量.

从图 1-2 还可以看到 $\overrightarrow{Oz_1}+\overrightarrow{z_1z_2}=\overrightarrow{Oz_2}$，因此 $\overrightarrow{z_1z_2}=\overrightarrow{Oz_2}-\overrightarrow{Oz_1}$. 由于 $\overrightarrow{Oz_1}=z_1$，$\overrightarrow{Oz_2}=z_2$，所以

$$\overrightarrow{z_1z_2}=z_2-z_1.$$

这就是说，起点在 z_1、终点在 z_2 的矢量，如果把它平行移动使其起点合于原点，那么它正是复数 z_2-z_1 的定位矢量. 这也可以说成：从自由矢量的观点来看问题，矢量 $\overrightarrow{z_1z_2}$ 可以被复数 z_2-z_1 来表示. 例如，$z_1=-1$，$z_2=i$，则 z_2-z_1 即是起点在 -1、终点在 i 的那个矢量，可以用复数 $i-(-1)=1+i$ 来表示(图 1-3).

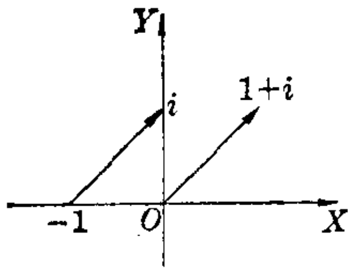


图 1-3

务请读者把这一表示方法使用得非常熟练，因为在本书中要反复地利用这一事实.

3. 复数的极形式

令 $\rho=|z|$，并用 θ 表示矢量 $\overrightarrow{Oz}$ 同实轴正向之间的夹角，由图 1-4 可见

$$\xi=\rho\cos\theta,\quad \eta=\rho\sin\theta.$$

从而复数 $z=\xi+i\eta$ 可表示为

$$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta).\qquad(1)$$

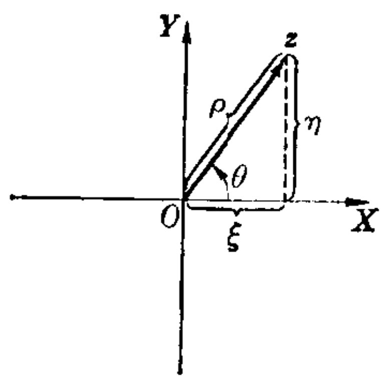


图 1-4

这就是复数的极形式，其中 $\rho\geqslant0$ 是复数 z 的模，称 θ 为 z 的幅角，用记号

$$\theta=\arg z$$