张量分析及演算

余天庆 编著

华中理工大学出版社

（鄂）新登字第 10 号

图书在版编目(CIP)数据

张量分析及演算/余天庆
武汉：华中理工大学出版社， 1996 年 5 月
ISBN 7-5609-1268-0

Ⅰ.张…
Ⅱ.余…
Ⅲ.几何-张量分析-张量演算
Ⅳ.O18・183

张量分析及演算

余天庆　编著

责任编辑　佟文珍

*

华中理工大学出版社出版发行
(武昌喻家山　邮编：430074)
新华书店湖北发行所经销
华中理工大学出版社照排室排版
核工业部中南三〇九印刷厂印刷
(湖北省安陆市九号信箱　邮编：432600)

*

开本：850×1168　1/32　印张：11.375　字数：284 000
1996 年 5 月第 1 版　1996 年 5 月第 1 次印刷
印数：1-2 000
ISBN 7-5609-1268-0/O・148
定价：9.00 元
(本书若有印装质量问题，请向承印厂调换)

内 容 提 要

本书共有七章、三个附录和习题全解。前三章(即矢量代数、矢量分析和矩阵)介绍学习张量的基础知识;后四章(即张量概念、张量代数、张量分析和黎曼空间的曲率)是本书的主题。其中精选了75条例题作为附录A,其他两附录为正规正交化和曲线坐标系,“习题全解”中有369条习题的证明和解题的全过程,供教师和自学者参考。

本书可作为高等院校数学、物理、力学、材料、天文和其他工程学科的研究生、高年级大学生的教学参考书,也可供电磁、信息、航天等工程专业的师生和有关研究人员参考。

前　言

张量是数学、物理和力学等学科的必要工具，也是数学的一个重要分支，物理科学和力学的发展又促使这一分支的充实和完善。张量在变换参考系时具有不变性，所以它特别适宜于自然定律的描述。采用张量的主要优点是：(1)张量为基本方程的推导提供了非常有效的数学方法；(2)由于获得的方程在坐标变换时具有不变性，所以在本质上具有普通性；(3)符号的简洁和对称的外观使得张量最适于对自然定律作精练的描述；(4)获得的方程对不同概念的统一和特殊概念的推广极有启发。

初学者常被张量具有上述优点而吸引，同时又被张量符号，尤其是上下标的“多姿”变换而产生学习中的畏难心情。笔者从 80 年代初开始从事研究生的教学和指导工作。近 40 多年的教学经验告诉我们，授课和学习都要遵循一些基本原则，即由浅入深、由简到繁，既要精辟的理论概括，还要不断地动手实践。为此，本书前三章(即矢量代数、矢量分析和矩阵)介绍学习张量的基础知识，后四章(张量概念、张量代数、张量分析和黎曼空间的曲率)才是本书的主题。每章都采用精练的理论陈述，大量的例题给予验证，不仅有助于提高读者的动手演算能力，而且还可以激发学习张量的兴趣。因此将此书取名《张量分析及演算》。如果仅有教师讲解和例题的演算，而学生不动手算题，要学好“张量”，恐怕是不可能的。为了帮助读者动脑动手演算张量，作者收集了 369 条习题分别附在各章的后面，请读者动笔演算。为了解决自学中的困难，笔者还编纂了“本书各章习题全解”，附在本书之后，供教师和自学者参考。

从 50 年代末到 80 年代初，作者受到过$\boxed{\text{李灏}}$教授的谆谆教诲和指教。此书的后几章多处引用了他的译著，在此向$\boxed{\text{李灏}}$教授谨致以崇高的敬意和深切的怀念。

作者先后请华中理工大学莫乃榕副教授和武汉交通科技大学

沈成武教授审查了全稿，提出了许多宝贵意见。对他们严谨治学的学风和给予的帮助表示衷心的感谢。同时还要感谢铁道部大桥工程局桥梁研究院为出版此书给予了大力支持。对华中理工大学出版社和湛柏琼老师给予的支持以及所有关心撰写此书的教学、研究工作的朋友们，在此一并致以衷心的谢意。

作者水平有限，书中如有不妥或谬误之处，恳请批评指正。

余天庆

于武昌

1995 年仲夏

目　录

第一章　矢量代数

§1.1　纯量与矢量

1.　纯量

仅由数量确定的物理量，或由一个具有实数值的、空间一点的函数所确定的物理量，称为纯量。

假若纯量与坐标系的选择无关，则称为绝对纯量，或不变量。例如，任何实数、质量、密度、长度、时间、温度和力做的功、能量等。

今后，凡谈到诸如张量一类的纯量，都是指绝对纯量。在研究张量的解析性质时，还将遇到与坐标系选择有关的纯量。

2.　矢量

我们先把用数值(大小)和方向表征的物理量称为矢量。矢量用黑体小写拉丁字母 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、…，$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、…表示。作图时用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示(图 1.1)。有向线段的长度表示矢量的大小或模。矢量的大小(模)记为

$$|\boldsymbol{a}| \equiv a \tag{1.1}$$

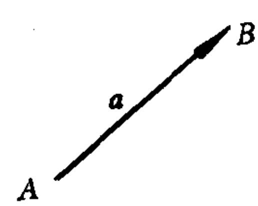

图　1.1

固结于空间某一点(作用点)的矢量称为固定矢量，沿着某一直线但没有一定作用点的矢量称为滑动矢量，既无一定作用线又无一定作用点的矢量称为自由矢量。本书所讨论的矢量代数运算适用于自由矢量。

应当指出，不是凡具有数值与方向的物理量都能作为矢量，矢

量还应具有由矢量代数运算规则(见本章§1.2)所确定的特性。

当代表两矢量的线段是平行的，则称两矢量称为平行矢量或

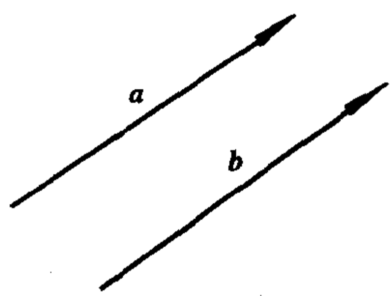

图 1.2

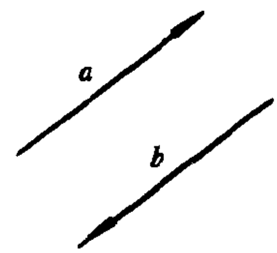

图 1.3

共线矢量。当两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有相等的模，共线且同向时(图 1.2)，则称两矢量相等，即

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b} \tag{1.2}$$

若两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，共线反向时(图 1.3)，记为

$$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b} \tag{1.3}$$

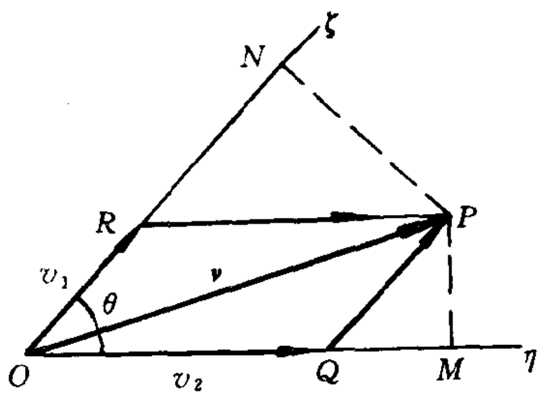

图 1.4

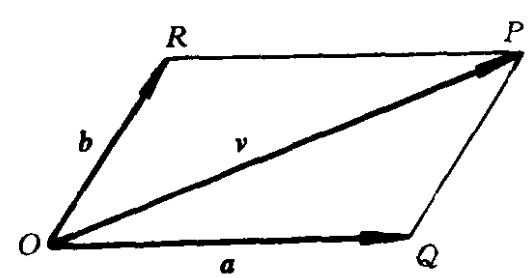

图 1.5

3. 矢量的投影与分量

矢量 $\boldsymbol{v}$ 用有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 表示(图 1.4)，过矢量始端 O 建立坐标系 $O\eta\zeta$。过矢量末端 P 分别向两坐标轴作垂线，得矢量 $\boldsymbol{v}$ 在两坐标轴 $O\eta$、$O\zeta$ 上的投影 OM、ON，分别记为 v_1、v_2。过 P 点分别作两坐

标轴的平行线，得矢量 $\boldsymbol{v}$ 沿两坐标轴 $O\eta$,$O\zeta$ 的分量$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$，记为 v^1、v^2。由图可知 $OQ=RP$,$OR=QP$。若两坐标轴之前的夹角为 θ，则

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v^1 + v^2\cos\theta \\ v_2 &= v^1\cos\theta + v^2 \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

和

$$\left.\begin{aligned} v^1 &= v_1\csc^2\theta - v_2\csc\theta\operatorname{ctg}\theta \\ v^2 &= - v_1\csc\theta\operatorname{ctg}\theta + v_2\csc^2\theta \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

注意，本书中的上标一般不表示乘幂，平方用 $(v)^2$、$(x)^2$ 表示。但在不会引起误会的演算中，我们有时仍用上标表示乘幂。

在直角坐标系里，矢量的投影与分量相等。

§1.2 矢量的加法

1. 矢量加法的平行四边形法则

用有向线段$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$分别表示矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，由$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$为邻边所构成的平行四边形的对角线$\overrightarrow{OP}$，即为矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的合矢量 $\boldsymbol{v}$，记为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \tag{1.6}$$

这就是矢量加法的平行四边形法则。一切矢量应该遵守矢量加法法则。矢量加法法则确定了矢量的第三个必要特性。因此，能用有向直线段表示的、且遵守平行四边形加法运算法则的物理量或几何量称为矢量。

矢量减法是矢量加法的逆运算。式(1.6)可改写为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{b} \tag{1.7}$$

或

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{b}) \tag{1.8}$$

容易证明矢量加法满足交换律和结合律，即

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} \tag{1.10}$$

2. 单位矢量

模为 1 的矢量称为单位矢量。模 $a \neq 0$ 的矢量 $\boldsymbol{a}$,沿 $\boldsymbol{a}$ 方向的单位矢量记为

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{a}}{a} \tag{1.11}$$

任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以表为与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位矢量 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的模 a 的乘积,即

$$\boldsymbol{a} = a\hat{\boldsymbol{a}} \tag{1.12}$$

在三维欧几里得空间里,沿直角坐标轴 x、y、z 的单位矢量用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 或 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$* 表示。

3. 矢量沿直角坐标轴的分量

在三维欧几里得空间里,任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以表为沿正交的三根

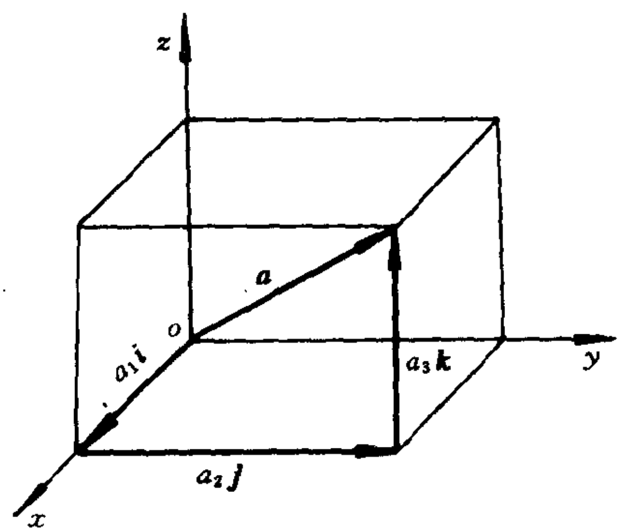

图 1.6

坐标轴 x、y、z 的分矢量 $a_1\boldsymbol{i}$、$a_2\boldsymbol{j}$、$a_3\boldsymbol{k}$ 的矢量和(图 1.6)。

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{a}\text{ 的模是}\quad &a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

---

* $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$;$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 等通常都是用来表示沿坐标轴的单位矢量,字母上面的 ^ 略去。

例 1.1 写出三维空间笛卡尔直角坐标系中 $P(2,4,3)$ 和 $Q(1,-5,2)$ 两点的位矢方程，用作图法和解析法求这两位矢的合矢量。

解： (i) $\boldsymbol{r}_1=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{r}_2=\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EQ}=\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

(ii) 先用作图法：作 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}_1$，$\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{r}_2$，以 $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$ 为邻边作平

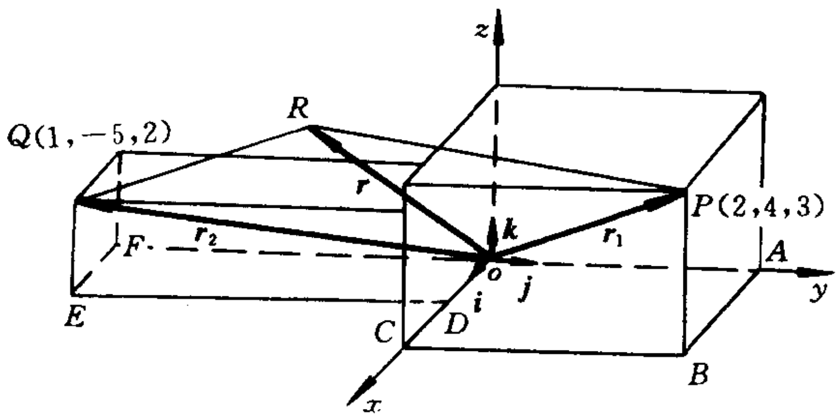

图 1.7

行四边形 $OPRQ$，联对角线 $\overrightarrow{OR}$（图 1.7），即得 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 的合矢量 $\overrightarrow{OR}=\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2$。

解析法：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2=(2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})+(\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$

$=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$

例 1.2 已知矢量 $\boldsymbol{r}_1=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_2=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_3=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，求下列矢量的模：(i) $\boldsymbol{r}_3$，(ii) $\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3$，(iii) $2\boldsymbol{r}_1-3\boldsymbol{r}_2-5\boldsymbol{r}_3$。

解： (i) $r_3=|\boldsymbol{r}_3|=|-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|$

$=\sqrt{(-1)^2+(2)^2+(2)^2}=3$

(ii) $\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3=(3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})+(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})$

$+(-\boldsymbol{i}_1+2\boldsymbol{j}_2+2\boldsymbol{k}_3)=4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$

于是 $|\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3|=|4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}|=\sqrt{(4)^2+(-4)^2+(0)^2}$

$=\sqrt{32}\doteq 4\sqrt{2}$

(iii) $2\boldsymbol{r}_1-3\boldsymbol{r}_2-5\boldsymbol{r}_3=2(3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})-3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})$

$$-5(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})=5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

于是
$$\begin{aligned}|2\boldsymbol{r}_1-3\boldsymbol{r}_2-5\boldsymbol{r}_3|&=|5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}|\\&=\sqrt{(5)^2+(-2)^2+(1)^2}\\&=\sqrt{30}\end{aligned}$$

例 1.3 试求平行于 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 两矢量的合矢量 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量，已知 $\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$。

解： 合矢量
$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2&=(2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k})+(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\\&=3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$r=|\boldsymbol{r}|=|3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}|=\sqrt{(3)^2+(6)^2+(-2)^2}=7$$

所以，平行于 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量是

$$\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}}{7}=\frac{3}{7}\boldsymbol{i}+\frac{6}{7}\boldsymbol{j}-\frac{2}{7}\boldsymbol{k}$$

检证：
$$\left|\frac{3}{7}\boldsymbol{i}+\frac{6}{7}\boldsymbol{j}-\frac{2}{7}\boldsymbol{k}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\left(-\frac{2}{7}\right)^2}=1$$

§1.3 矢量的纯量积

1. 矢量与纯量的乘积

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与纯量 m 的乘积是矢量 $m\boldsymbol{a}$，这个矢量的模是矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模的 m 倍、方位与 $\boldsymbol{a}$ 相同，指向由 m 的正负号而定，m 为正时，$m\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 指向相同，否则相反。若 $m=0$，则 $m\boldsymbol{a}$ 为零矢量。

若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是矢量，m 和 n 是纯量，则

$$\left.\begin{aligned}&m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}m && \text{交换律}\\&m(n\boldsymbol{a})=(mn)\boldsymbol{a} && \text{结合律}\\&(m+n)\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a}\\&m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}\end{aligned}\right\}\tag{1.14}$$

2. 矢量的纯量积

空间某一 x 轴的方向由轴的单位矢量确定。以 $\boldsymbol{e}$ 表示 x 轴的

单位矢量。以 a_x 表示矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴方向的投影，并称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与单位矢量 $\boldsymbol{e}$ 的纯量积（又称点积）。如图 1.8 所示，其表达式如下

$$a_x = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e} = |a|\cos\theta \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \tag{1.15}$$

式中 $\cos\theta$ 是矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{e}$ 的正方向夹角的余弦。

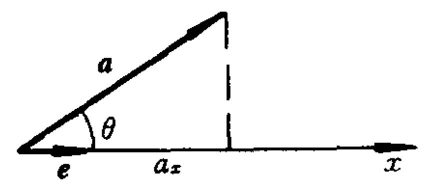

图 1.8

同样可确定矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的纯量积。考虑矢量 $\boldsymbol{a}$ 在矢量 $\boldsymbol{b}$ 方向的投影 a_b，可得

$$a_b = \boldsymbol{a} \cdot \hat{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{b} = a\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

由此得到

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = a_b b = b_a a \tag{1.16}$$

三维空间里，正交坐标轴单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的纯量积

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1 \tag{1.17}$$

$$\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i} = 0 \tag{1.18}$$

将矢量表示为沿坐标轴分矢量的矢量和，$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$；$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \cdot (b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\end{aligned} \tag{1.19}$$

还有

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = (a)^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 \tag{1.20}$$

若 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}=0$，且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都不是零矢量，则 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 互相垂直。

容易证明，纯量积满足交换律和分配律，即

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} \tag{1.21}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} \tag{1.22}$$

还有

$$m(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (m\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (m\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})m \tag{1.23}$$

例 1.4 求矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=6\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 之间的夹角。

解： $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=ab\cos\theta$

$$a=\sqrt{(2)^2+(2)^2+(-1)^2}=3,$$

$$b=\sqrt{(6)^2+(-3)^2+(2)^2}=7$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2)(6)+(2)(-3)+(-1)(2)=12-6-2=4$$

于是 $$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{ab}=\frac{4}{3\times 7}=\frac{4}{21}=0.1905$$

$$\theta=79°1'$$

例 1.5 求矢量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 在矢量 $\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$ 上的投影。

解： 矢量 $\boldsymbol{b}$ 沿其自身的单位矢量

$$\hat{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{b}}{b}=\frac{4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}}{\sqrt{(4)^2+(-4)^2+(7)^2}}=\frac{4}{9}\boldsymbol{i}-\frac{4}{9}\boldsymbol{j}+\frac{7}{9}\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{b}}&=(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{4}{9}\boldsymbol{i}-\frac{4}{9}\boldsymbol{j}+\frac{7}{9}\boldsymbol{k}\right)\\&=(1)\left(\frac{4}{9}\right)+(-2)\left(-\frac{4}{9}\right)+(1)\left(\frac{7}{9}\right)=\frac{19}{9}\end{aligned}$$

例 1.6 矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ 和矢量 $\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 决定一平面,试求垂直于此平面的单位矢量。

解： 设垂直于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平面的矢量 $\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}$,则 $\boldsymbol{c}$ 既垂直于 $\boldsymbol{a}$ 又垂直于 $\boldsymbol{b}$,所以

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=2c_1-6c_2-3c_3=0$$

即 $$2c_1-6c_2=3c_3 \tag{a}$$

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=4c_1+3c_2-c_3=0$$

即 $$4c_1+3c_2=c_3 \tag{b}$$

联立解式(a)、(b)得 $c_1=\frac{1}{2}c_3, c_2=-\frac{1}{3}c_3$

$$\boldsymbol{c}=c_3\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\frac{1}{3}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\right)$$

于是 $\boldsymbol{c}$ 的单位矢量为