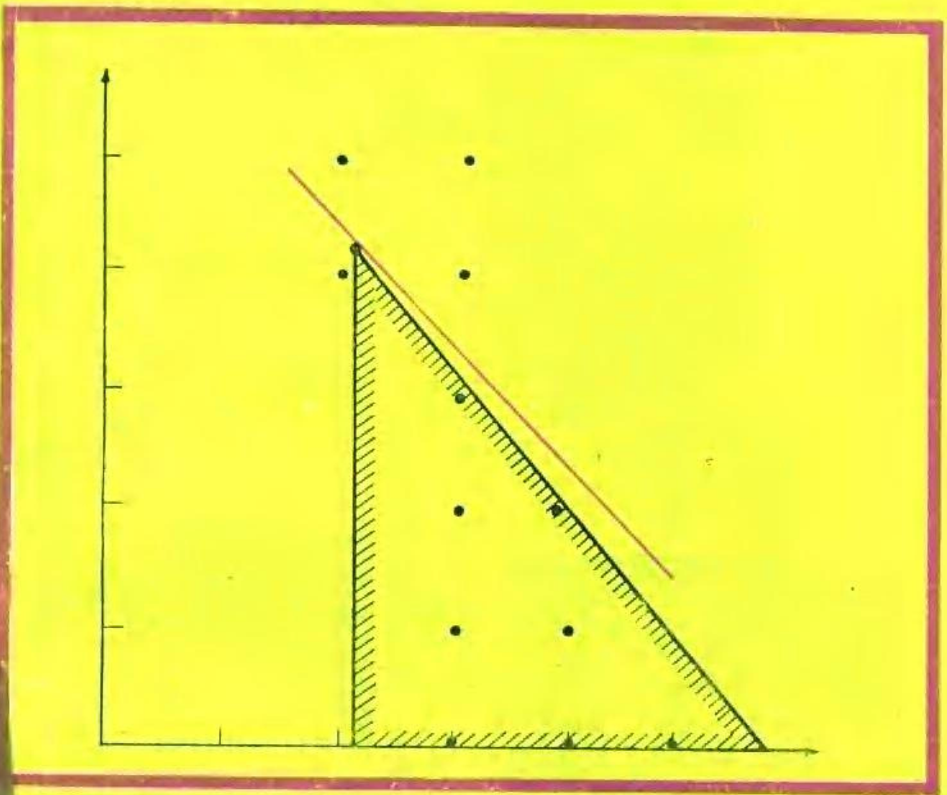
Combinatorial Optimization for Undergraduates

组合最优化

[美] L. R. 富尔兹 著



上海翻译出版公司

组合最优化

L. R. 富尔兹 著
沈明刚 周素琴 孙根娣 译
张建中 校

上海翻译出版公司

I. R. Foulds

Combinatorial Optimization forUndergraduates

Springer-Verlag, 1984

组合最优化

沈明刚等译

上海翻译出版公司

（上海复兴中路597号）

新华书店上海发行所发行　上海群众印刷厂印刷

开本850×1156　1/32　印张8.5　字数151,000

1988年3月第1版　1988年3月第1次印刷

印数1—3,200

ISBN 7-80514-089-8/O·59　定价：4.45元

内 容 提 要

本书通过几个主要的离散最优化问题，介绍了组合最优化学科的思想与方法。主要内容有：线性规划及其有关的运输问题与分派问题；整数规划、动态规划、启发式求解的基本思想方法；关于图与网络的最优化（包括最小生成树、最短路、最大流、最小费用流与项目网络等问题及解法）；组合最优化方法的一些应用（包括设备安置问题、旅行售货员、车辆调度、汽车合用、演化树结构等问题的应用）。

本书适合于作为数学、工程、商业与社会科学方面的大学生的教材或教学参考书，也可供一般的工程师、工程技术人员、管理人员与商业经济人员参考。

序 言

本书的主要目的是介绍一些存在有限个可行解的离散最优化问题的主要概念。按照惯例,我们称这个主题为组合最优化。现在关于组合最优化已有几本优秀的大学研究生水平的教科书。然而,在这个领域中似乎还没有一本大学生水平的教科书。本书就是为了填补这个空缺而写的。

本书是为数学、工程、商业、物理科学或社会科学方面的大学生写的。对于从事实际工作的工程师和科学家们,它也可以作为一本有用的参考书。作者曾在新西兰的Canterbury大学对运筹学、工程、商业和数学专业的大学生讲授过组合最优化的课。这些教学经验促使作者写成本书。经验证明,在讲授本书中的各种材料时采取下面的方法是明智的。在引入一个新的论题时,先介绍学生们容易理解的一个数值例子,再形成解这个问题的技巧,然后过渡到一般问题。这个原则已经被采纳于全书中。本书的重点在于叙述简洁和容易接受,而不追求论述的严谨。但当严格的论证有助于理解算法的原理时,还是被采用的,例如根据最大流最小割定理的证明构造最大网络流问题的标号法。

本书包括两个部分:第一部分讲方法,第二部分讲应用。第一部分开始的一章具有启发性。此章包含一般组合最优化问题的描述、当前关心的重要问题、基本算法的叙述、关于高效率算法的必要性的讨论和数字计算机的出现所带来的影响。接着的一章(即第一章)是介绍线性规划及其推广。第二章叙述了组合

最优化的三个最重要方法——整数规划、动态规划和启发式方法的基本步骤。第三章讨论图和网络上的最优化问题。

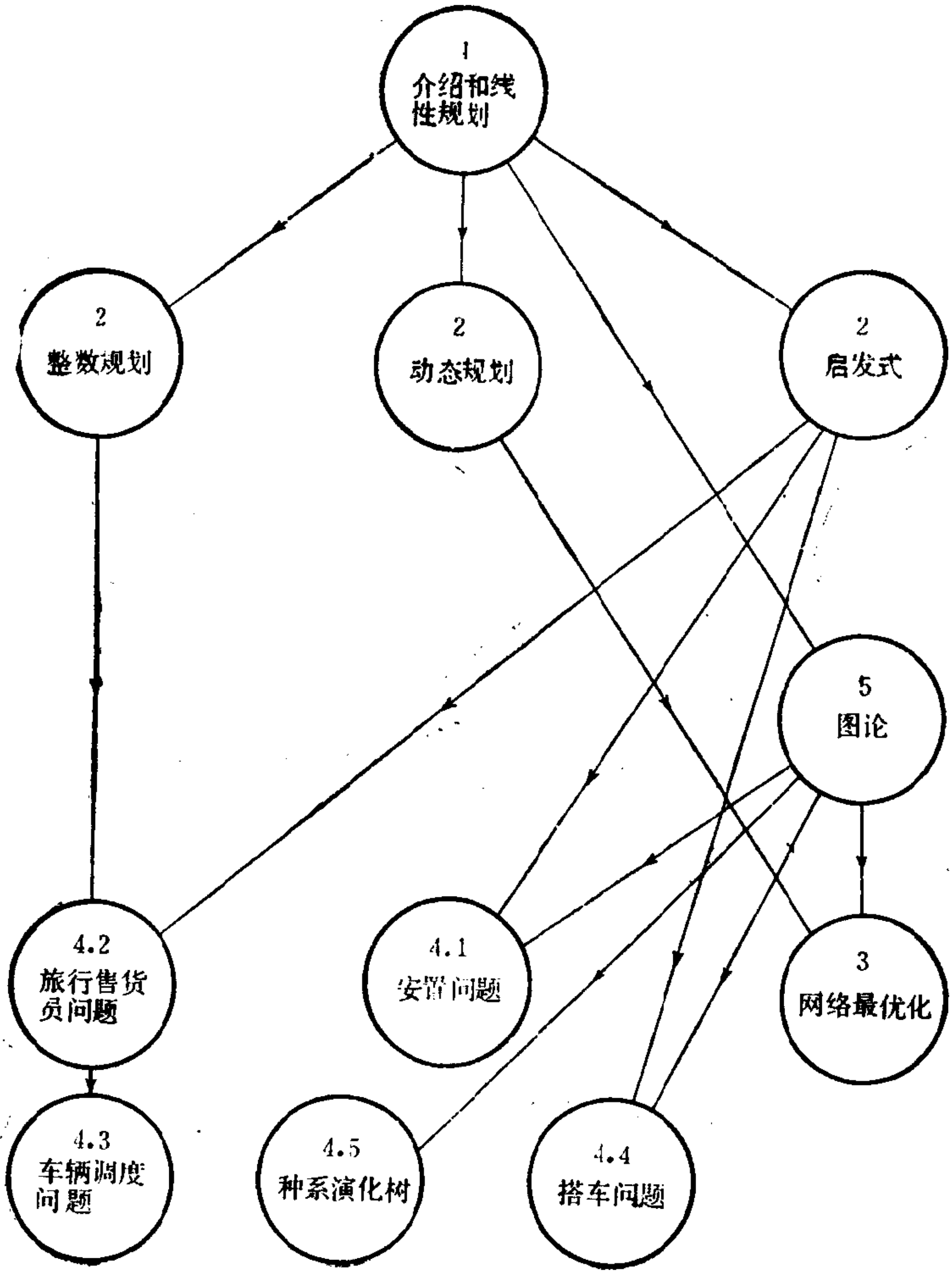
第二部分从不同的学科提出了很多问题——诸如：旅行售货员问题、车辆调度问题、搭车问题、演化树的构造和设备安置问题。对每个问题先进行分析，然后给出求解的过程。其中有些解法从未在以前的书本上出现过。

数学不是娱乐，因此，希望读者努力完成书中的练习。这些练习题包括从简单的计算训练到目前文献中尚未解决的问题。其中对一些相当困难的问题，在前面加了星号(*)。

著者感谢 Canterbury 大学在本书写作期间所给予的支持，并对著者的博士生 John Giffin 帮助写了 4.1 节表示谢意。著者还非常感谢妻子 Maureen 的热情鼓励并打印了全部手稿。最后，著者对纽约的 Springer—Verlag 的工作人员在出版本书的过程中所表现出来的耐心、技艺和合作表示衷心地赞赏。

L. R. Foulds

本书进程表


1
介绍和线性规划
2
整数规划
2
动态规划
2
启发式
5
图论
4.2
旅行售货员问题
4.1
安置问题
3
网络最优化
4.3
车辆调度问题
4.5
种系演化树
4.4
搭车问题

目　　录

第Ⅰ部分 方 法

第0章 关于组合最优化方法的引言

0.1 一般问题

最优化所涉及的是找一个问题的最好(或最优)的解。本书所关心的将是能够确切地描述、通常可用数学术语和符号来表示的问题。我们还假定所给问题的任意一个解的值能用定量方法来度量，而且能与该问题的其他任何解相比较。自从人类起源以来，这类问题就已提出来。最早的一个问题是古罗马Virgil在他的著作*Aeneid*中记录的一个问题——王后Dido的难题。王后允准获得能用公牛皮围起来的全部土地。她把这张皮剪成细细的窄条，且把它们连接在一起，组成一个半圆，在这半圆范围内，她围住了以地中海海岸为直径的相当大的一部分土地。后来Archimedes猜想她的数学解是最优的，即固定长度的曲线与直线一起围住的最大可能面积是一个半圆。这个猜想能用变分法(最优化的一个分支)加以证明。

上面所述的问题的解的数目有无限多个，因为等于给定长度的曲线可以有无数条。然而，有一类重要的最优化问题，它们的解的个数只有有限个。有关这些问题的理论与方法总称为"组合最优化"。本书所处理的正是这类问题。令S是一个问题的有限解集。假定对每个解$x \in S$都能算出它的值，并且能指定

一个实数$f(x)$，以表示它的价值。所赋予的值可以是某种效益，例如利润，这时应该求其最大值；也可以是某种损失，例如费用，这时应求其最小值。

下面正式引进组合最优化的一般问题。令

$$f: D \longrightarrow R$$

是以 D 为定义域的实值函数。令

$$S \subseteq D.$$

定义 0.1 $x^* \in S$ 是 f 的一个总体最大解，如果

$$f(x^*) \geqslant f(x), \quad \forall x \in S.$$

总体最小解可类似地定义。

定义 0.2 $x^* \in S$ 是 f 的一个总体极值点，如果 x^* 是 f 的一个总体最大解或总体最小解。

"组合最优化的最大化问题"是去找 x^*，使得 x^* 为 f 的总体最大解，即找出 x^*，使得

$$f(x^*) = \mathrm{Max}(f(x)), \quad x \in S.$$

"组合最优化的最小化问题"可类似地定义。

S 叫做可行解集。如果

$$x \in S,$$

则 x 叫做可行解，简称可行。如果 $\bar{x} \in D$ 且

$$f(\bar{x}) \geqslant f(x), \quad \forall x \in S,$$

则称 $f(\bar{x})$ 为 f 在 S 上的一个上界。如果

$$f(\bar{x}) \leqslant f(x), \quad \forall x \in S,$$

则称 $f(\bar{x})$ 为 f 在 S 上的一个下界。如果 $f(\bar{x})$ 是 S 上 f 的一个上界，而且对于 S 上 f 的所有上界 $f(x)$，有

$$f(\bar{x}) \leqslant f(x),$$

则称 $f(\bar{x})$ 为 f 在 S 上的最小上界或上确界。如果 $f(\bar{x})$ 是 f 在 S 上的一个下界，而且对于 S 上 f 的所有下界 $f(x)$，有

$$f(x) \geqslant f(\bar{x}),$$

则称 $f(\bar{x})$ 为 f 在 S 上的最大下界或下确界。

注意，$\bar{x}$ 可以是，也可以不是 S 的一个元。当然，如果

$$\bar{x} \in S,$$

则 $\bar{x}$ 是 f 的一个总体极值点。

0.1.1. 组合最优化问题的一个例子：最短 Hamilton 路

这一节以 D F Robinson 在1972年8月于纽卡斯尔(Newcastle)举行的第一届澳大利亚组合论会议上所发表的论文为依据。

当然，S 的特性可以随着问题的不同而改变。尽管 S 是有限的，但它可以极为庞大，而且识别它的元素也不是一件容易的事。现在介绍一个组合最优化问题的例子。这个例子在概念方面是简单的，可使读者从中得到启发。

设 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 是 $n(n>1)$ 个城市的集合。考虑寻找通过 V 的所有城市的最短旅程问题。设 d_{ij} 表示从 v_i 到 v_j $(1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n)$ 的距离，假定这个距离矩阵

$$D=[d_{ij}]_{n\times n}$$

是对称的，即

$$d_{ij}=d_{ji}, \quad 1\leqslant i\leqslant n, \quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

这个问题类似于文献中所称的旅行售货员问题， 它是 4.2 节的研究主题。

由于 V 有 n 个元，所以存在 $n!$ 条路。我们把路表示为

$$x=\langle v_{\alpha(1)}, v_{\alpha(2)}, \cdots, v_{\alpha(n)}\rangle,$$

其中 $\{v_{\alpha(1)}, v_{\alpha(2)}, \cdots\cdots, v_{\alpha(n)}\}=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，且 x 是从 $v_{\alpha(1)}$ 开

始，然后经 $v_{\alpha(2)}$, $v_{\alpha(3)}$, 等等，到 $v_{\alpha(n)}$ 终止的路。这个问题的解集 S 是

$$S=\{\langle v_{\alpha(1)}, v_{\alpha(2)}, \cdots, v_{\alpha(n)}\rangle: \{\alpha(1), \alpha(2), \cdots \alpha(n)\}$$
$$=\{1,2,\cdots,n\}\}.$$

如果 $x=\langle v_{\alpha(1)}, v_{\alpha(2)}, \cdots, v_{\alpha(n)}\rangle \in S$，则 $f(x)$ 是 x 的长度

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n-1} d_{\alpha(i), \alpha(i+1)}.$$

于是问题是找

$$f(x^*)=\operatorname*{Min}_{x\in S}\{f(x)\}.$$

每一条路 $x=\langle v_{\alpha(1)}, v_{\alpha(2)}, \cdots, v_{\alpha(n)}\rangle$ 对应着一条反向路 $x^R=\langle v_{\alpha(n)}, v_{\alpha(n-1)}, \cdots, v_{\alpha(1)}\rangle$。因为 D 是对称的，对于所有 $x\in S$，有 $f(x)=f(x^R)$。因此最短路不是唯一的。

下面定义有关路的基本运算：

(i) 将路 $\langle v_{\alpha(1)}, v_{\alpha(2)}\cdots, v_{\alpha(n)}\rangle$ 从某点 $v_{\alpha(m-1)}(2\leqslant m\leqslant n)$ 后断开，并且联结 $v_{\alpha(n)}$ 到 $v_{\alpha(1)}$，得到新的路

$$\langle v_{\alpha(m)}, v_{\alpha(m+1)}, \cdots, v_{\alpha(n)}, v_{\alpha(1)}, v_{\alpha(2)}, \cdots\cdots, v_{\alpha(m-1)}\rangle.$$

这条新路要比原来的路短当且仅当

$$d_{\alpha(n)\alpha(1)}<d_{\alpha(m-1),\alpha(m)}.$$

(ii) 将路 $\langle v_{\alpha(1)}, v_{\alpha(2)}, \cdots, v_{\alpha(n)}\rangle$ 从某点 $v_{\alpha(m-1)}$ $(2\leqslant m\leqslant n-1)$ 后断开，然后将第二部分反向，产生

$$\langle v_{\alpha(1)}, v_{\alpha(2)}, \cdots, v_{\alpha(m-1)}, v_{\alpha(n)}, v_{\alpha(n-1)}, \cdots\cdots, v_{\alpha(m)}\rangle,$$

这条新路要比原来的路短当且仅当

$$d_{\alpha(m-1),\alpha(n)}<d_{\alpha(m-1),\alpha(m)}.$$

(iii) 将路 $\langle v_{\alpha(1)}, v_{\alpha(2)}, \cdots v_{\alpha(n)}\rangle$ 从某点 $v_{\alpha(m)}(2\leqslant m\leqslant n-1)$ 后断开，倒转前面的一半，得到路

$$\langle v_{\alpha(m)}, v_{\alpha(m-1)}, \cdots, v_{\alpha(1)}, v_{\alpha(m+1)}, v_{\alpha(m+2)}, \cdots, v_{\alpha(n)}\rangle,$$

这条新路比原来的短，当

$$d_{\alpha(1),\alpha(m+1)} < d_{\alpha(m),\alpha(m+1)}.$$

(iv) 在路 $\langle v_{\alpha(1)}, v_{\alpha(2)}, \cdots, v_{\alpha(n)}\rangle$ 上取任一对相邻点 $v_{\alpha(m)}$, $v_{\alpha(m+1)}$，倒换它们的次序，得到

$$\langle v_{\alpha(1)}, v_{\alpha(2)}, \cdots, v_{\alpha(m-1)}, v_{\alpha(m+1)}, v_{\alpha(m)}, v_{\alpha(m+2)}, \cdots\cdots, v_{\alpha(n)}\rangle.$$

$m=1$ 或 $m=n-1$ 的情形已在(iii)及(ii)处理。在其他情形，如果

$$d_{\alpha(m-1),\alpha(m+1)} + d_{\alpha(m),\alpha(m+2)} < d_{\alpha(m-1),\alpha(m)} + d_{\alpha(m+1),\alpha(m+2)},$$

则新路比原来路短。

注意这些运算的一些性质：

(a) 如果由路 x 的一个基本运算能够得到路 y，则 x 也能由 y 通过一个基本运算而得到。

(b) 如果一条路 y 能由路 x 通过基本运算得到，则 y 的反向路 y^R 也能由路 x^R 通过一个基本运算而得到。

(c) 每条路可看作 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 上的一个排列。类型 (iv) 的运算实际上是排列中的对换。

可以证明，任何置换可以表示为对换的乘积。因此，任何一条路能通过有限次类型 (iv) 的运算改变成另一条路。任何一对路能通过有限次类型(i)～(iv)的运算从一条变到另一条。

表 0.1　一个城市到城市的距离表

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
v_2	201									
v_3	428	227								
v_4	207	155	348							
v_5	232	159	351	25						
v_6	534	363	135	448	423					
v_7	73	274	501	186	211	634				
v_8	19	220	447	226	251	583	72			
v_9	503	307	176	340	314	118	526	527		
v_{10}	302	101	126	222	225	262	375	321	217	
v_{11}	165	210	437	65	96	513	144	184	405	311

表 0.2　一些较短路的一个相继次序

A_0	v_1	201	v_2	227	v_3	348	v_4	25	v_5	423	v_6	634	v_7	72	v_8	527	v_9	217	v_{10}	311	v_{11}
A_1	v_7	72	v_8	527	v_9	217	v_{10}	311	v_{11}	165	v_1	201	v_2	227	v_3	348	v_4	25	v_5	423	v_6
A_2	v_{10}	217	v_9	527	v_8	72	v_7	144	v_{11}	165	v_1	201	v_2	227	v_3	348	v_4	25	v_5	423	v_6
A_3	v_8	72	v_7	144	v_{11}	165	v_1	201	v_2	227	v_3	348	v_4	25	v_5	423	v_6	232	v_{10}	217	v_9
A_4	v_{10}	144	v_7	72	v_8	19	v_1	201	v_2	227	v_3	348	v_4	25	v_5	423	v_6	262	v_{10}	217	v_9
A_5	v_6	232	v_{10}	217	v_9	405	v_{11}	144	v_7	72	v_8	19	v_1	201	v_2	227	v_3	348	v_4	25	v_5
A_6	v_{10}	262	v_6	118	v_9	405	v_{11}	144	v_7	72	v_8	19	v_1	201	v_2	227	v_3	348	v_4	25	v_5
A_7	v_{11}	144	v_7	72	v_8	19	v_1	201	v_2	227	v_3	348	v_4	25	v_5	225	v_{10}	262	v_6	118	v_9
A_8	v_3	227	v_2	201	v_1	19	v_8	72	v_7	144	v_{11}	65	v_4	25	v_5	225	v_{10}	232	v_6	118	v_9
A_9	v_6	118	v_9	176	v_3	227	v_2	201	v_1	19	v_8	72	v_7	144	v_{11}	65	v_4	25	v_5	225	v_{10}
A_{10}	v_9	118	v_6	136	v_3	227	v_2	201	v_1	19	v_8	72	v_7	144	v_{11}	65	v_4	25	v_5	225	v_{10}
A_{11}	v_2	201	v_1	19	v_8	72	v_7	144	v_{11}	65	v_4	25	v_5	225	v_{10}	217	v_9	118	v_6	136	v_3
A_{12}	v_5	25	v_4	65	v_{11}	144	v_7	72	v_8	19	v_1	201	v_2	101	v_{10}	217	v_9	118	v_6	136	v_3
A_{13}	v_1	19	v_8	72	v_7	144	v_{11}	65	[illegible]	25	v_5	159	v_2	101	v_{10}	217	v_9	118	v	136	v_3
A_{14}	v_1	19	v_8	72	v_7	144	v_{11}	65	v_4	25	v_5	159	v_2	101	v_{10}	126	v_3	135	v_6	118	v_3

现在我们来寻找一条长度最短的路。通过一个数值例子可以把想法表达得更加清楚。表 0.1 给出了 11 个城市之间的距离。

在表 0.2 中列出了相继的较短路。它们是由经过这些城市的次序及城市之间的距离来表示的。组成初始路 A_0 的城市其下标依次递增。各相邻城市之间的最大距离是 634 (从 v_6 到 v_7)。这比 $d_{1,11}$ (=165 米) 长。因此，用类型(i)的运算把 A_0 在 v_6 和 v_7 之间断开，并且连接 v_1 和 v_{11}。这种分割在适当的位置用符号 Λ 表示。新路用 A_1 表示。连续使用两次类型(i)的运算是没有好处的。我们转而考虑类型(iii)的运算。把 A_1 上每对相邻城市间的距离与从其中右边那个城市到 v_7 的距离相比较，找到 v_7 比 v_{10} 更接近 v_{11}。于是我们颠倒从 v_7 到 v_{10} 一段，用符号〈与〉表示，组成路 A_2。在 A_2 里城市 v_9 和 v_8 相隔 527。这多于 v_{10} 和 v_6 之间的距离。于是类型(i)的运算将减少它的长度。继续用类型(i)和(iii)运算，直至达到路 A_{13}。继续使用类型(i)和(iii)运算，不能再减少这条路的长度。颠倒最后三个城市的次序的类型(ii)的运算将减少 A_{13} 的长度。这样就产生路 A_{14}。使用任何类型的运算都不能再减少这个长度了。A_{14} 的长度为 965。

注意，从 v_6 到 v_7 的距离是 634。因此，任何较短的路显然必须有一个末端靠近 v_6，另一个靠近 v_7。于是，证明 A_{14} (及其反向路)为总体最小解就是一个简单的事情了。

定义 0.3 如果对于所有与 x_0 邻近的 x_i，有

$$f(x_0) \leqslant f(x_i)$$

成立。则称 x_0 是 f 的局部最小解。

定义 0.4 如果对于所有与 x_0 邻近的 x_i 有

$$f(x_0) \geqslant f(x_i)$$

成立。则称 x_0 是 f 的局部最大解。

定义 0.5 如果 x_0 或是 f 的局部最小解或是局部最大解，则称 x_0 为 f 的局部极值解。

可以将上述方法一般化。考虑象在 0.1 节中所定义的组合最优化的最小化问题。可以在 S 上定义具有下列性质的基本运算的汇集：

(a) 如果 $y\in S$ 能从 $x\in S$ 通过基本运算而得到，那么 x 能从 y 通过基本运算而得到。

(b) 任给两个 x、$y\in S$，存在有限次基本运算使 x 转变为 y。

因此 基本运算定义了一个连通图 G(见 5.2 节)。G 的顶点是 S 的元，G 的边是用基本运算连接 S 的元。一个解的过程如下作出：从任意一个顶点 $x_0\in S$ 开始，求出 $f(x_0)$，然后对于 G 中相邻于 x_0 的每个 x_i 求 $f(x_i)$ 的值。

如果没有找到这样的局部最小解，选择一个邻接于 x_0 的 $x_j\in S$，使这个 x_j 有

$$f(x_0)>f(x_j) \tag{0.1}$$

用 x_j 替换 x_0，重复上述过程。在每个阶段挑选 x_j 的方法之一是选择 S 中的与 x_0 相邻的满足(0.1)式的第一个元。

因为 S 是有限的，上述过程必定在有限步之后以找到一个局部最小解而结束。一种可能出现的稍为复杂一些的情况是：探索到一个"高峰" x_p，对于与 x_p 相邻的某些 x_j，有

$$f(x_p)=f(x_j),$$

但不存在邻点 x_k 使得

$$f(x_p)>f(x_k).$$

如果这种情况出现了，逐次考察由所有这样的顶点 x_j 所组成的集合 S'。希望找到一个顶点 x_s，它是某个 $x_j\in S'$ 的相邻点，而