哥德巴赫猜想研究

王元 编

黑龙江教育出版社

哥德巴赫猜想研究

王　元　编

黑龙江教育出版社

1987年·哈尔滨

责任编辑：孙怀川
封面设计：张秉钧

哥德巴赫猜想研究

王　元　编

黑龙江教育出版社　出版
（哈尔滨市道里森林街42号）
黑龙江新华印刷厂附属厂　印刷
黑龙江省新华书店　发行

开本787×1092毫米 1/32·印张 12.5
字数250,000
1987年11月第1版　1987年11月第1次印刷
印数 1—1,227

统一书号：13357·3　　定价：3.50元

GF50106

序

自从1920年以来，哥德巴赫(Goldbach)猜想的研究有了巨大的进展。特别是在1937年，依·麦·维诺格拉朵夫(I.M.Vinogradov)证明了三个素数定理，在1966年，陈景润证明了(1,2)。进而言之，我们必须指出，哥德巴赫猜想的研究给予许多强有力的数论方法的产生与发展以巨大的推动力。这些方法不仅对于数论自身，而且对于数学的许多分支都是很有用的。

三个素数定理与(1,2)已经搜集在很多专著之中(见文献(Ⅰ))。一本专著常常包含着最后的结果及尽可能简单的证明，从而使读者易于了解，但却很难包含原始思想发展的诸主要步骤。本选集的目的在于尽可能地搜集哥德巴赫猜想研究中具有原始思想及主要技巧的论文，使读者能了解这一问题的研究的全过程中的各主要阶段，我们期望这将有利于问题的进一步研究。

为了使篇幅不太大，少数文章中的一部分未被搜入，对此编者加了注记以说明，所有英文、法文、德文与俄文的论文均被译成中文。

在出版这本论文集时，不能不使我对哥德巴赫猜想的研究在中国的情况作些回顾。中国最早研究哥德巴赫猜想的人是华罗庚教授。早在1938年，他就证明了“几乎所有偶数都是两个素数之和”。

1952年，中国科学院数学研究所成立了数论研究组，由

华罗庚亲自担任组长，他组织并领导了“哥德巴赫猜想讨论班”．他选择哥德巴赫猜想作为学习与研究对象的指导思想为，考虑到哥德巴赫猜想与解析数论最重要的理论与方法都有密切关系，特别是圆法，三角和估计，密率论，筛法，L-函数理论与素数分布论等；通过讨论班的学习，可以使参加者相当全面地掌握解析数论的诸重要方面，达到既出成果又出人才的良好效果。

哥德巴赫猜想讨论班无疑是非常成功的。参加者曾几次得到关于哥德巴赫猜想的重要结果，受到国内外的注视。可惜这样的讨论班仅进行了五年，即被迫停止了。1958年，在我国数学界中曾掀起批判“理论脱离实际”的运动，哥德巴赫猜想研究被指控为理论脱离实际的典型，数论研究组因此而被解散，人员被拆散了．虽然如此，一些讨论班的参加者，特别是陈景润与潘承洞同志，仍在私下坚持了哥德巴赫猜想的研究工作，甚至在“文化大革命”的浩劫中亦未放弃．他们在这样困难的环境下，取得了出色成就，是十分难得的。

另一方面，国内确有相当多的人在研究哥德巴赫猜想．由于他们的研究不得法，主要是他们的数学基础太差，不了解这个问题研究的历史与成就，他们仅仅从整数的定义出发来研究这个猜想，所以浪费了很多宝贵的光阴，并无收效．

最后，我对于潘承彪教授与某学生和於坤瑞教授给予的多方面帮助，表示衷心的感谢．在准备手稿时，承郭宝文同志的热情帮助，在此致以谢意．

王 元

1986年5月20日

目　录

导　　论

在1742年给欧拉（Euler）的一封信中，哥德巴赫建议了关于表整数为素数和的两个猜想，用略为修改过的语言，可以将这两个猜想表述于下：

（A）每一偶数$\geqslant 6$都是两个奇素数之和。

（B）每一奇数$\geqslant 9$都可以表为三个奇素数之和。

显然，由（A）可以推出（B）。

在回复哥德巴赫的信中，欧拉表示虽然他不能证明它们，但他深信这些猜想是对的（见狄克逊（Dickson）〔1〕）。

从哥德巴赫写信起到今天，已经积累了不少宝贵的数值资料，指出这两个猜想是对的。例如申懋功（Shen Mok Kong）〔1〕验证过猜想（A）对于不超过3.3×10^7的偶数是对的。勒依特，富勒斯，哈蒙特与洛易（Light, Forres, Hammond and Roe）〔1〕进一步算至10^8。尹定〔1〕更验算至5×10^8。

在1900年巴黎召开的第二届国际数学大会上，希尔伯特（Hilbert）〔1〕在他的著名演说中，为二十世纪的数学家建议了二十三个问题，而猜想（A）就是他的第八问题的一部分。1912年在剑桥召开的第五届国际数学大会上，兰岛（Landau）〔2〕在他的演说中，将猜想(A)作为素数论中四个未解决的难题之一加以推荐。进而言之，1921年，哈代（Hardy）〔1,2〕在哥本哈根数学会的演讲中宣称猜想（A）

的困难程度“是可以与数学中任何未解决的问题相比拟的”. 因此哥德巴赫猜想不仅是数论，也是整个数学中最著名与困难的问题之一。

自从哥德巴赫写信之日起，直至1920年，并没有方法来处理这个问题.研究工作仅限于用数值计算来验证猜想(A)，或对于猜想(A) 作一些进一步的建议（见狄克逊〔1〕，哈代〔1,2〕)

哥德巴赫猜想第一次重大的突破是二十年代获得的，英国数学家哈代与李特伍德（Littlewood）〔2〕用他们的“圆法”在1923年证明了，在广义黎曼（Riemann）猜想正确的前提之下，每个充分大的奇数都是三个奇素数之和及几乎所有偶数都是两个奇素数之和。挪威数学家布朗（Brun）〔2,3〕在1919年用他的“筛法”证明了，每个大偶数都是两个素因子个数均不超过9的整数之和.1930年，苏联数学家史尼尔曼（Schnirelmann）〔1〕，用布朗筛法结合他自己定义的整数密率，证明了堆垒素数论的第一个结果，即任何整数≥ 2都是不超过C个素数之和，此处及以后，我们用$c, c_1, c_2 \cdots\cdots$表示绝对常数，但在不同的地方可以表示不相同的数值. 近六十年来，哥德巴赫问题的研究有了重大与深刻的发展，特别是苏联数学家依·麦·维诺格拉朵夫〔3〕用圆法及他自己关于素数变数的指数和估计的天才方法，于1937年无条件地证明了哈代与李特伍德的两个结论，即取消了他们证明中对于广义黎曼猜想的依赖性. 布朗方法及他的结果在经历了一系列重大改进后，中国数学家陈景润〔2,3〕于1966年证明了，每个大偶数都是一个素数及一个不超过两个素数之积之和.

我们必须注意，哥德巴赫猜想研究的突破是与十九世纪解析数论的重大成就是明显不可分割的，特别是切比雪夫(Chebychev)，狄里希勒(Dirichlet)，黎曼，阿达玛(Hadamard)，德·拉·瓦·布桑(de la Vallee poussin)与冯。曼哥尔德(von Mangoldt)关于素数分布的理论构成了哥德巴赫猜想当今研究的前提.

现在，我们将哥德巴赫猜想研究的主要构思与进展，概要地叙述于后.

1.圆法

圆法起始于哈代与拉曼努扬(Ramanujan)[1]关于整数分析与表整数为平方和的一篇文章，更进一步，从1920年开始，在总标题为""整数分析"的若干问题"("Some problems of" partitio numerorum"")的一系列论文中，哈代与李特伍德系统地开创并发展了堆垒数论中的一个崭新的分析方法——圆法，其中文章(Ⅲ)与(V)是讨论哥德巴赫猜想问题的.

命

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}},\quad s=\sigma+it,\quad \sigma>1.$$

当 $\sigma\leqslant1$ 时，$\zeta(s)$ 可以由解析开拓来定义. $\zeta(s)$称为黎曼 ζ-函数. 黎曼曾猜测 $\zeta(s)$在半平面 $\sigma>0$ 上所有的零点 $\rho=\beta+i\gamma$ 都位于直线 $\sigma=1/2$ 上面. 这是一个未解决的问题，我们记之为(RH). 一个较弱的猜想是说，$\sigma>0$ 上面的每个 ρ 的实部均$\leqslant\theta$，此处 θ 满足$\frac{1}{2}\leqslant\theta<1$. 这称为弱黎曼

猜想，记之为（QRH）。更一般些，我们可以研究狄里希勒L-函数

$$L(s、\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s},\ s=\sigma+it,\ \sigma>1,$$

此处$\chi(n)$为 $\bmod q$ 的一个特征。若$\chi\neq\chi_0$，则它在s平面上正则，此处χ_0表示主特征。否则，它仅在$s=1$有一个唯一的极并且$L(s,\chi_0)=\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{ps}\right)\zeta(s)$ 此处p表示素数，类似于（RH）与（QRH），我们可以定义（GRH）与（QGRH），即$L(s,\chi)$在$\sigma>0$上的所有零点都位于$\sigma=1/2$上，及$L(s,\chi)$在$\sigma>0$上的每一零点ρ都满足$\beta\leqslant\theta$，此处θ是一个满足上述条件的常数。哈代与李特伍德的两个结果是基于假定（QGRH）之下而得到的，此处θ满足$1/2\leqslant\theta<3/4$。

此后，我们用p，$p^{\prime}$，p_1，p_2，……表示素数，命n为一个整数>1。命

$$f(x)=\sum_{p>2}(\log p)x^p, \tag{1}$$

此处　　$|x|=e^{-1/n}$。则

$$f(x)^3=\sum_{n=1}^{\infty}r_3(n)x^n,$$

此处

$$r_3(n)=\sum_{p_1+p_2+p_3=n}\log p_1\log p_2\log p_3 \tag{2}$$

为将n表为三个素数之和的表示法的加权和。我们可以类似地定义$r_2(n)$。所以猜想（A），（B）可以表述为

$$r_2(n)>0(2\mid n,n>4)与 r_3(n)>0(2\nmid n,n>7)。$$

由柯西积分公式得

$$\mathrm{r}_3(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(x)^3 x^{-n-1}dx, \tag{3}$$

此处 Γ 表示以0为中心，$e^{-1/n}$ 为半径的圆周。因 $f(x)$ 可以精密地由 $f(e^{-1/n}e(\frac{h}{q}))$ 来近似逼近，此处 $e(y)=e^{2\pi iy}$ 及 $x(\in\Gamma)$ 为 $e^{-1/n}e(\frac{h}{q})$ 的一个邻近点，所以 Γ 被分割为诸小弧 ξ_{hq} 之和，此处 ξ_{hq} 上的点 x 的幅角位于

$$\left(\frac{h}{q}-\frac{1}{q(q+q')}\right)2\pi \text{ 与 } \left(\frac{h}{q}+\frac{1}{q(q+q'')}\right)2\pi \pmod 1$$

之间，其中 $\frac{h'}{q'}$，$\frac{h}{q}$，$\frac{h''}{q''}$ 为阶为 $N=[\sqrt{n}]$ 的范里(Farey)贯中的三相邻项，因此

$$\mathrm{r}_3(n)=\sum_{q=1}^{N}\sum_{h(q)}{}' \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_{hq}} f(x)^3 x^{-n-1}dx, \tag{4}$$

此处h过 mod$q$ 的一个缩剩余系，当 $x\in\xi_{hq}$ 时，置

$$x=e\left(\frac{h}{q}\right)e^{-Y},\quad Y=\eta+i\theta,$$

则在假定（QGRH）之下，其中 $1/2\leqslant\theta\leqslant 3/4$，哈代与李特伍德证明了

$$f(x)=\varphi+\Phi, \tag{5}$$

此处

$$\varphi = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)Y} \quad 及 \quad \Phi = O\left(n^{\theta+\frac{1}{4}}(\log n)^{c}\right).$$

其中 $\mu(q)$ 与 $\varphi(q)$ 分别表示麦比乌斯（Möbius）与欧拉函数，将(5) 代入(4) 得

$$r_3(n) \sim \frac{1}{2}\prod_{p+n}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p\mid n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)n^2$$

$$(2\nmid n), \tag{6}$$

即当 $2+n$ 及 n 充分大时，命题（B）成立。进而言之，我们容易从(6) 推出将奇数 n 表为三个素数之和的表示法 $R_3(n)$ 的渐近公式，即 $R_3(n)$ 渐近地等于 $r_3(n)(\log n)^{-3}$，但用圆法来处理 $r_2(n)$ 却是无效的，即使假定了（GRH）的真实性亦复如此。主要困难不在于主项而在于误差项。因此，若在（5）中将Φ略去，即 4 被用来代替 f，则得

$$r_2(n) \sim 2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\mid n\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}n^2 \quad (2\mid n). \tag{7}$$

由(7) 可知将偶数 n 表为两个素数之和的表示法数 R_2（n）渐近地等于 $r_2(n)(\log n)^{-2}$。这是哈代与李特伍德〔2〕关于猜想（A）的著名猜想。

在假定（GRH）之下，哈代与李特伍德证明了

$$\sum_{\substack{m=2\\ 2\mid m}}^{n}\left(r_2(m)-2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\mid m\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}m^2\right)^2$$

$$=O\left(n^{\frac{5}{2}+\varepsilon}\right), \tag{8}$$

此后，我们用 ε 表示任意给定的正数，及含于记号 O 中的常

数仅依赖于ε，命$E(n)$表示不超过n的偶数中使猜想(A)不成立的偶数个数，则由(8) 立刻推出，

$$E(n)=O(n^{1/2+\varepsilon}), \tag{9}$$

由此推知几乎所有的偶数都是两个素数之和。

以后，依·麦·维诺格拉朵夫对圆法作出了一系列重大的改进，其中之一是用有限和

$$F(\alpha)=\sum_{2\leqslant p\leqslant n}e(\alpha p). \tag{10}$$

来代替$f(x)$，因简单的正交关系

$$\int_0^1 e(\alpha k)d\alpha=\begin{cases}1, & \text{当}\quad k=0,\\ 0, & \text{其他情形}\end{cases} \tag{11}$$

得出

$$R_3(n)=\sum_{p_1+p_2+p_3=n}1=\int_0^1 F(\alpha)^3e(-\alpha n)d\alpha. \tag{12}$$

用这个公式来代替(3)。

依·麦·维诺格拉朵夫的改进导源于他在1928年关于华林（Waring）问题的一篇文章（见依·麦·维诺格拉朵夫〔1〕）。

命$\tau=n^{-1}(\log n)^{c_1}$　及　$Q=(\log n)^{c_2}$。当$q\leqslant Q$时，命

$$M_{hq}=\left[\frac{h}{q}-\tau,\frac{h}{q}+\tau\right],\quad (h,q)=1.$$

这称为一段“优弧”。当n充分大时，诸优弧是互不相交的。所有M_{hq}的和集记之为

$$M = \bigcup_{1 \leq q \leq Q} \bigcup_{h(q)}{}' M_{hg},$$

它关于〔0,1〕的余集称之为“劣弧”，记之为 m，所以有

$$R_3(n) = \int_{M_1} F(\alpha)^3 e(-dn)\,d\alpha + \int_m F(\alpha)^3 e(-dn)\,d\alpha$$

$$= I + J \quad \text{（定义）} \tag{13}$$

因此对于充分大的 n，(B)的证明归结为往证 I 给出 $R_3(n)$ 的主项而 J 仅给出低阶项.

注记：首先是哈代与李特伍德在他们关于华林问题的工作中提出了优弧与劣弧的划分.

估 计 I 的 困 难是由下面的西革尔（Siegel)—瓦尔菲茨（Walfisz）定理克服的.

命　$q \leqslant Q$　及　$(h, q) = 1$. 则

$$\pi(x,q,h) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv h(\bmod q)}} 1 = \frac{1}{\varphi(q)} \int_2^x \frac{dt}{\log t} +$$

$$0(xe^{-C\sqrt{\log x}}), \tag{14}$$

此处隐含于 0 中的常数依赖于 c_2（见西革尔〔1〕，瓦维菲茨〔1〕).

由(14) 可知

$$F(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{m=2}^{n-1} \frac{e(\beta m)}{\log m} + 0(ne^{-c\sqrt{\log n}}),$$

$$\alpha = \frac{h}{q} + \beta \in M. \tag{15}$$

将(15) 代入 I 的表达式得

$$I \sim \frac{1}{2} \prod_{p \mid n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^{2}}\right) \prod_{p \nmid n}\left(1+\frac{1}{(p-1)^{3}}\right)$$

$$\frac{n^{2}}{(\log n)^{3}}, \quad 2 \nmid n \tag{16}$$

因此困难集中于 $F(\alpha)$ 的估计，其中 $\alpha \in m$。1937 年，依·麦·维诺格拉朵夫用他自己独创的关于素数变数指数和估计的天才方法给出了 $F(\alpha)$ 一个非寻常的估计，即

$$F(\alpha) \ll n(\log n)^{-c}, \quad \alpha \in m, \tag{17}$$

此处 c 是一个常数 $\geqslant 3$，注意给予 c，我们可以取 c_1，c_2 为依赖于 c 的常数，故由(17) 得

$$J \ll n(\log n)^{-c} \int_{0}^{1} |F(\alpha)|^{2} d\alpha \ll n^{2}(\log n)^{-4} \tag{18}$$

将(16) 与(18) 代入(13) 得

$$R_3(n) \sim \frac{1}{2} \prod_{p \mid n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^{2}}\right) \prod_{p \nmid n}\left(1+\frac{1}{(p-1)^{3}}\right)$$

$$\frac{n^{2}}{(\log n)^{3}}, \quad 2 \nmid n$$

由此得出：存在一个常数 n_0，使每一奇数 $n(>n_0)$ 皆为三个素数之和。这个定理称为“维诺格拉朵夫—哥德巴赫定理”或“三个素数定理”。

我们必须指出，下面两个定理在三个素数定理获得证明之前就已经出现了。

(i) 每一大奇数 n 均可以表示为

$$n = p_1 + p_2 + p_3 p_4 \tag{19}$$

(见依·麦·维诺格拉朵夫〔2〕,艾斯特曼(Estermann)〔2〕)。

(ii) 每一大整数都是两个素数及一个整数的平方之和（见艾斯特曼〔3〕）。

如果在估计 I 时，帕奇（Page）〔1〕定理被用来代替西革尔一瓦尔菲茨定理，则三个素数定理中的 n_0 是可以算出来的。波罗斯特金（Borozdkin）〔1〕给出 $n_0=e^{e^{16\cdot038}}$。

利用维诺格拉朵夫方法，几位数学家独立地指出，几乎所有的偶数都是两个素数之和，进而言之，对于任何常数 c，他们证明了

$$E(n)\ll n(\log n)^{-c}, \tag{20}$$

此处隐含于≪中的常数仅依赖于 c（见冯·德·柯坡尔德（Van der Corput）〔3〕，艾斯特曼〔4〕，海尔布朗（Heilbronn）〔1〕，华罗庚〔1〕，朱达科夫（Tchudakov〔1，2〕）。

在1946年，用哈代与李特伍德原来的将 Γ 分割为 M 与 m 的方法，苏联数学家林尼克（Linnik）〔3，4，5〕给予 $f(x)$ 一个类似于(17)的估计，从而他给了三个素数定理一个新的证明，林尼克关于 $f(x)$ 的估计方法是建立在他关于 L—级数的重要密度定理的基础上面的。这一密度定理被用来代替未被证明的（QGRH），现将密度定理述于下：

命 $\chi(n)$ 为 mod$q$ 的原特征，命 $N(\beta,T)$ 表示 $L(s,\chi)$ 在矩形

$$\nu\leqslant\sigma\leqslant 1,\qquad |t|\leqslant T,$$

中的零点个数，此处 $T\geqslant q^{50}$，$\beta\geqslant 1$ 及 $\nu=\beta-\frac{1}{2}$。则

$$N(\beta,T)\ll q^{2\nu}T^{1-\frac{\nu}{1-\nu}}(\log T)^{10}+q^{30}. \tag{21}$$