綫性代數問題詳解

K.霍夫曼 R.孔泽 原著
駱 效 宗 譯著

曉 園 出 版 社
世界图书出版公司

綫性代數問題詳解

K. 霍夫曼　R. 孔澤　原著
駱效宗　譯著

曉園出版社
世界图书出版公司
北京・广州・上海・西安

线性代数问题详解

K.霍夫曼 R.孔泽 原著

骆效宗 译著

晓园出版社出版

*

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街137号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1995年5月第一版 开本:850×1168 1/32

1995年5月第一次印刷 印张:11

印数:0001－750 字数:280千字

ISBN: 7－5062－1831－3/O·165

定价: 21.00元 (WB9409/1831)

世界图书出版公司北京公司向台湾晓园出版社

购得重印权限国内发行

前　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉著習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與鋪路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉著這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

線性代數問題詳解

(目　　錄)

第一章
線性方程式

1.2 線性方程式組

1. 證明如例4所述的複數集合是C之一子體

解：由於F爲C之子集，滿足性質1，2，5，6，9所以我們僅須驗證F爲封密體且滿足性質3，4，7，8。

(0) $x_1+y_1\sqrt{2}\in F$，$x_2+y_2\sqrt{2}\in F$

$(x_1+y_1\sqrt{2})+(x_2+y_2\sqrt{2})=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\sqrt{2}\in F$

$(x_1+y_1\sqrt{2})(x_2+y_2\sqrt{2})=(x_1x_2+2y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\sqrt{2}\in F$

(3) $0=0+0\cdot\sqrt{2}\in F$

(4) $x+y\sqrt{2}\in F \Rightarrow (-x)+(-y)\sqrt{2}\in F$ 且

$(x+y\sqrt{2})+[(-x)+(-y)\sqrt{2}]=0$

(7) $1=1+0\cdot\sqrt{2}\in F$

(8) 若$x+y\sqrt{2}=0$且$y\neq 0$則$x\neq 0$且$\sqrt{2}=-x/y$爲有理數，其不可能，所以必須是$y=0$，因此同樣的$x=0$，所以$x+y\sqrt{2}=0$，若且唯若$x=0=y$

今，對這點$x+y\sqrt{2}\neq 0$，由前述結果，得$x\neq 0$或$y\neq 0$。則若$x+(-y)\sqrt{2}=0$，同樣的由前述結果，$x=0=y$　因此必須是$x-y\sqrt{2}\neq 0$，所以得

$$\frac{1}{x+y\sqrt{2}}=\frac{x-y\sqrt{2}}{(x+y\sqrt{2})(x-y\sqrt{2})}=\frac{x-y\sqrt{2}}{x^2-2y^2}$$

$$=\left(\frac{x}{x^2-2y^2}\right)+\left(\frac{-y}{x^2-2y^2}\right)\sqrt{2}\in F$$

2. 設F是複體數，下面二組線性方程式組是否等價？若是，試將每一方程式組的每一方程式表成另一方程式組的線性組合

$$\begin{aligned} x_1-x_2&=0 & \quad 3x_1+x_2&=0\\ 2x_1+x_2&=0 & \quad x_1+x_2&=0 \end{aligned}$$

解：$\frac{1}{3}(\mathrm{I}①+\mathrm{I}②)$：　$x_1=0$　　$\frac{1}{3}(\mathrm{I}②-2\mathrm{I}①)$：　$x_2=0$

因此　$(\mathrm{I}①+\mathrm{I}②)+\frac{1}{3}(\mathrm{I}②-2\mathrm{I}①)$：$3x_1+x_2=0$

$\frac{1}{3}(\mathrm{I}①+\mathrm{I}②)+\frac{1}{3}(\mathrm{I}②-2\mathrm{I}①)$：　$x_1+x_2=0$

或 $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{3}\mathrm{I}①+\frac{4}{3}\mathrm{I}②=\mathrm{II}①\\ \frac{1}{3}\mathrm{I}①+\frac{2}{3}\mathrm{I}②=\mathrm{II}②\end{array}\right\}$ (a)

反之，$\frac{1}{2}(\mathrm{II}①-\mathrm{II}②)$：　$x_1=0$

$\frac{1}{2}(3\mathrm{II}②+\mathrm{II}①)$；$x_2=0$

因此　$\frac{1}{2}(\mathrm{II}①-\mathrm{II}②)-\frac{1}{2}(3\mathrm{II}②-\mathrm{II}①)$：　$x_1-x_2=0$

$(\mathrm{II}①-\mathrm{II}②)+\frac{1}{2}(3\mathrm{II}②-\mathrm{II}①)$：　$2x_1+x_2=0$

或 $\left.\begin{array}{l}\mathrm{II}①-2\mathrm{II}②=\mathrm{I}①\\ \frac{1}{2}\mathrm{II}①+\frac{1}{2}\mathrm{II}②=\mathrm{I}②\end{array}\right\}$ (b)

由 (a)及(b)，得二方程組爲等價（ equivalent ）。

3. 仿習題2.，察驗下面的方程式組

$$-x_1+x_2+4x_3=0 \qquad x_1-x_3=0$$
$$x_1+3x_2+8x_3=0 \qquad x_2+3x_3=0$$
$$\frac{1}{2}x_1+x_2+\frac{5}{2}x_3=0$$

解：$\mathrm{I}①-\mathrm{I}③$：$-\frac{3}{2}x_1+\frac{3}{2}x_3=0$

因此　$-\frac{2}{3}(\mathrm{I}①-\mathrm{I}③)=\mathrm{II}①$

$\mathrm{I}①+\mathrm{I}②$：　$4x_2+12x_3=0$

因此　$\frac{1}{4}(\mathrm{I}①+\mathrm{I}②)=\mathrm{II}②$

反之　$-\mathrm{II}①+\mathrm{II}②=\mathrm{I}①$

$\mathrm{II}①+3\mathrm{II}②=\mathrm{I}②$

$\frac{1}{2}$ Ⅱ①＋ Ⅱ②＝Ⅰ③　　　所以二方程組爲等價

4. 仿習題2，察驗下面的方程式組

$$2x_1+(-1+i)x_2 \quad +x_4=0 \qquad (1+\frac{i}{2})x_1+8x_2-ix_3-x_4=0$$

$$3x_2-2ix_3+5x_4=0 \qquad \frac{2}{3}x_1-\frac{1}{2}x_2 \quad +x_3+7x_4=0$$

解：在方程組Ⅰ，取

$x_1=1$，$x_2=0$，則由Ⅰ①，

$2+x_4=0$　或　$x_4=-2$

帶入 Ⅰ②，得

$-2ix_3-10=0$　or　$x_3=5i$

因此　$x_1=1$，$x_2=0$，$x_3=5i$　且 $x_4=-2$　爲方程組Ⅰ之一解

但由帶這些値入Ⅱ①，得

$(1+\frac{i}{2})+5+4\neq 0$，因此其非方程組Ⅱ之一解，由定理1，知二方程組

並非等價。

5. 設 $F=\{0,1\}$，用下二表來定義加法和乘法

+	0	1
0	0	1
1	1	0

	0	1
0	0	0
1	0	1

驗證 F 和其二種運算形成一體。

解：很清楚的，F 在定義下之二運算爲封閉的。

其多餘的9個性質爲

(1)　$0+1=1=1+0$，加法爲可交換

(2)　$0+(0+0)=(0+0)+0=0$
$0+(0+1)=(0+0)+1=1$
$0+(1+0)=(0+1)+0=1$
$0+(1+1)=(0+1)+1=0$
$1+(0+0)=(1+0)+0=1$
$1+(0+1)=(1+0)+1=0$

另證　若 $x=0$，則 $x+(y+z)=y+z=(0+y)+z=(x+y)+z$

其爲同樣的情形關於 $y=0$ 或 $z=0$。最後，

$1+(1+1)=(1+1)+1$

$1+(1+0)=(1+1)+0=0$ $\quad$ $=1$

$1+(1+1)=(1+1)+1=1$ 加法爲可結合

(3) $0+0=0$，$1+0=1$

(4) $0+0=0$，$1+1=0$

(5) $0\times 0=0$，$0\times 1=1\times 0=0$，$1\times 1=0$

(6) 若x，y或z中之一爲0，則

$x(yz)=0=(xy)z$

若其皆非0，則 $x=y=z=1$

且 $1(1\times 1)=(1\times 1)1=1$

(7) $0\times 1=0$，$1\times 1=1$

(8) $x\neq 0\Rightarrow x=1$，且 $1\times 1=1$

(9) 對 $x(y+z)=xy+xz$，可知若 $x=0$，

則 $x(y+z)=xy+xz=0$，所以令 $x=1$，但

因此$x(y+z)=1(y+z)=y+z=1\times y+1\times z$

$=xy+xz$。

因此，由1～9，我們已證F爲一體（field）

6. 若含二未知數的二齊次線性方程式組之解相同，則此二方程式組等價。試證明之。

解：設方程組爲：

$a_1x_1+b_1x_2=0$ — Ⅰ① $\quad a_2x_1+b_2x_2=0$ — Ⅱ①

$c_1x_1+d_1x_2=0$ — Ⅰ② $\quad c_2x_1+d_2x_2=0$ — Ⅱ②

情形(1) $a_1d_1-b_1c_1\neq 0$。在 $a_1\neq 0$ 或 $c_1\neq 0$

設 $a_1\neq 0$，則

$$\frac{c_1}{a_1}\text{Ⅰ①}-\text{Ⅰ②}:\quad \left(\frac{b_1c_1}{a_1}-d_1\right)x_2=0$$

$$or\quad \frac{b_1c_1-a_1d_1}{a_1}x_2=0$$

由 $b_1c_1-a_1d_1=-(a_1d_1-b_1c_1)\neq 0$，得

$$\frac{a_1}{b_1c_1-a_1d_1}\left(\frac{c_1}{a_1}\text{Ⅰ①}-\text{Ⅰ②}\right):\quad x_2=0$$

由同樣的方法，若 $c_1\neq 0$，我們能將 $x_2=0$ 表爲Ⅰ①及Ⅰ②之線性組合。同樣的，我們能將$x_1=0$表爲Ⅰ①及Ⅰ②之線性組合。

由於在此情形中　$x_1=x_2=0$　為方程組僅有之解，　因此Ⅱ①可表為
$a_2L_1+b_2L_2$　，其中 L_i 為 $X_i=0$ ，$i=1,2$之線性組合。

且Ⅱ②表同　$c_2L_1+d_2L_2$　。

情形(2)　$a_1d_1-b_1c_1=0$。由於 $a_1b_1c_1$ 及 d_1 不全為0，我們可設 $a_1\neq 0$，因此

$d_1=\dfrac{b_1c_1}{a_1}$　，有兩種情況

(1)　若　$b_1=0$，則　$d_1=0$，方程組Ⅰ　便成為　$a_1x_1=0$，
$c_1x_1=0$，且由於 $a_1\neq 0$，方程組之解必須為　$x_1=0$　且
x_2 為任意，且方程組Ⅱ變成 $b_2x_2=0$，$d_2x_2=0$，由於　x_2 為任意，得　$b_2=d_2=0$，因此　Ⅱ①　及　Ⅱ②　變為
$a_2x_1=0$，$c_2x_1=0$

即

$\dfrac{a_2}{a_1}$　Ⅰ①＝Ⅱ①　且　$\dfrac{c_2}{a_1}$　Ⅰ①＝Ⅱ②

(2)若　$b_1\neq 0$，then

$$\frac{c_1}{a_1}=\frac{d_1}{b_1}\quad\cdots\cdots(\,*\,)$$

因此，由Ⅰ①，得

$x_1=\dfrac{-b_1}{a_1}x_2$　，且由（＊），此表法為該方程組之解，代入Ⅱ①，得

$$\left(b_2-\frac{b_1a_2}{a_1}\right)x_2=0\ ;$$

但　x_2 為任意，所以

$$b_2-\frac{b_1a_2}{a_1}=0\quad 或\quad b_2=\frac{b_1a_2}{a_1}\qquad(\,*\,*\,)$$

若　$a_2=0$，由（＊＊），$b_2=0$，且　Ⅱ①變為　$0=0$，
即　Ⅱ①＝0，Ⅰ①

若　$a_2\neq 0$，則　$b_2\neq 0$　且　$\dfrac{b_2}{a_2}=\dfrac{b_1}{a_1}$

$$\frac{1}{a_1}\ \text{Ⅰ①}\quad x_1+\frac{b_1}{a_1}x_2=0$$

$$或\quad x_1+\frac{b_2}{a_2}x_2=0$$

即　$\dfrac{a_2}{a_1}$ Ⅰ①＝Ⅱ①　這說明了Ⅱ①為方程組Ⅰ之線性組合。

同樣的，Ⅱ②爲方程組Ⅰ之一線性組合。

因此在情形1及情形2，方程組Ⅱ皆爲方程組Ⅰ之一線性組合。

經由上述之討論法，我們同樣的能夠證明方程組Ⅰ中之任一方程式爲方程組Ⅱ中方程式之一線性組合，因此二方程組爲等價，證明完畢。

7. 試證複數體的任一子體包含每一有理數。

證：由於 $1 \in F$，$n = 1 + 1 + \cdots + 1 \in F$（加 n 次）

然後 $-n \in F$。同樣的 $0 \in F$ 因此所有整數皆屬於 F。甚而，m 爲一整數導至

$m^{-1} = \dfrac{1}{m} \in F$，所以 $n \cdot m^{-1} = \dfrac{n}{m} \in F$，即所有有理數皆在 F 中。

8. 試證特徵數爲0的每一體包含每一有理數。

證：由特徵值0之定義，$n = 1 + 1 \cdots + 1 \neq 0$

如同習題1.2－7 之討論法，可得任一特徵值0 之體包含一有理數體。

1.3 矩陣和基本列運算

1. 試求下列方程式組之所有解。
$$(1 - i)x_1 - ix_2 = 0$$
$$2x_1 + (1 - i)ix_2 = 0$$

解：
$$\begin{pmatrix} 1-i & -i \\ 2 & 1-i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2(1-i) & -2i \\ 2(1-i) & -2i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1-i \end{pmatrix}$$

因此 $x_1 = -\dfrac{1-i}{2} x_2$

2. 若
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

利用定理4，試求 $AX = 0$ 之所有解。

解：
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此　$x_1 = x_2 = x_3 = 0$

3. 若

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

試求 $AX = 2X$ 之所有解和 $AX = 3X$ 之所有解。（記號 cX 表示矩陣之每一元是 c 倍於 X 之對應元）。

解：令 I_3 爲 3×3 單位矩陣，則

(a)　$AX = 2X \Leftrightarrow AX = 2I_3X \Leftrightarrow (A - 2I_3)X = 0 \Leftrightarrow A'X = 0$

其中 $A' = A - 2I_3$　$A' = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

因此　$x_1 = x_2 = x_3$

(b)　$AX = 3X \Leftrightarrow (A - 3I_3)X = 0 \Leftrightarrow A'X = 0$

$$A' = A - 3I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此　$x_1 = x_2 = 0$，x_3 爲任意。

4. 試求一列可簡化矩陣使其列等價於

$$A = \begin{bmatrix} i & -(1+i) & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2i & -1 \end{bmatrix}$$

解：

$$\begin{bmatrix} i & -(1+i) & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2i & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} i & -(1+i) & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2(1-i) & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2i & -2(1+i) & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2i & -2(1+i) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1+i & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-i & 1 \\ 1 & -1+i & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1-i}{2} \\ 1 & 0 & i \end{bmatrix}$$

5. 證明下面之二矩陣不是互爲列等價。

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

解：$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

第二個矩陣的第一行能約簡至（0，0．0），但第一個矩陣不能，所以他們不是列一等價。

6. 令

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

爲複數元之 2×2 矩陣，設 A 是列可簡化，且 $a + b + c + d = 0$，證明恰好有三個這樣的矩陣。

解：下述中，我們用列即約矩陣定義中之性質(a)及(b)。

(1) $a \neq 0$，由(a)，$a = 1$ 且由(b)，$c = 0$

若 $d \neq 0$，則由(a)，$d = 1$．且由於 $a + b + c + d = 0$，所以必須得 $b = -2$，與(b)相矛盾，因此 $d = 0 \Rightarrow b = -1$

即僅有之矩陣爲

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $a = 0$，則 $c = 0$ 或 $c = 1$

若 $c = 0$ 且 $b = 1$，則 $d = -1$，與(b)相矛盾

因此 $b = 0 \Rightarrow d = 0$

即 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

若 $c = 1$，由同(1)中之同樣方法

得 $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

所以 $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$．$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$爲滿足問題情況之所有矩陣。

7. 交換一矩陣之二列能經由有限次的其他二種型式的基本列運算而完成。試證明之。

關：設第 i 行 R_i 爲 $(a_1\ a_2\ \cdots a_n)$，且第 j 行 R_j 爲 $(b_1\ b_2\ \cdots\ b_n)$，則可得

$$\begin{pmatrix}a_1\ a_2 \cdots\cdots a_n\\ b_1\ b_2 \cdots\cdots b_n\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}a_1\ a_2 \cdots\cdots & a_n\\ b_1+a_1\ b_2+a_2 \cdots\cdots & b_n+a_n\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}-a_1\ -a_2 \cdots\cdots -a_n\\ b_1+a_1\ b_2+a_2 \cdots b_n+a_n\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots\cdots & b_n\\ b_1+a_1 & b_2+a_2 & \cdots\cdots & b_n+a_n\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}b_1 & b_2 \cdots\cdots b_n\\ a_1 & a_2 \cdots\cdots a_n\end{pmatrix}$$

8. 若

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

設 $AX=0$，則

(a) 若 A 之每一元爲 0，則每一 (x_1, x_2) 是 $AX=0$ 之一解。試證明之。

(b) 若 $ad-bc\neq 0$，則方程式組 $AX=0$ 恰有一解，即 $x_1=x_2=0$。試證明之。

(c) 若 $ad-bc=0$，且 A 之某些元素不爲零，則有一解 (x_1^0, x_2^0) 使得 (x_1, x_2) 亦爲一解若且唯若存在一純量 y 使得 $x_1=yx_1^0$，$x_2=yx_2^0$。試證明之。

證：(a) 對所有 (x_1, x_2) 得

$$ax_1+bx_2=0\times x_1+0\times x_2=0$$
$$cx_1+dx_2=0\times x_1+0\times x_2=0$$

(b) $ad-bc\neq 0 \Rightarrow ac$ 不能同時爲 0 即 $a\neq 0$ 或 $c\neq 0$，可設 $a\neq 0$（$c\neq 0$ 可同樣的討論），則

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & \frac{b}{a}\\ c & d\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & \frac{b}{a}\\ 0 & d-\frac{bc}{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{b}{a}\\ 0 & \frac{ad-bc}{a}\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\text{（由於}\frac{cb-bc}{a}\neq 0\text{）}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此　$x_1 = x_2 = 0$

(c)　$ad - bc = 0$，且A中之某元素不等於0，可設$a \neq 0$（若必須，我們可交換兩行之順序且交換x_1及x_2使得第一個方程式之第一個係數不等於0）則可得

$$d = \frac{bc}{a} \text{ ——（＊）}$$

情形1.　$c = 0$，則由（＊），$d = 0$，方程式組約簡為

$$ax_1 + bx_2 = 0 \quad \text{或} \quad x_1 = -\frac{b}{a}x_2$$

取　$x_2^0 \neq 0$　為任意且　$x_1^0 = -\frac{b}{a}x_2^0$，則（$x_1^0$，$x_2^0$）為一解。若（$x_1$，$x_2$）為另一解

可得　$x_2 = \left(\frac{x_2}{x_2^0}\right)x_2^0$

$$x_1 = -\frac{b}{a}x_2 = \left(\frac{x_2}{x_2^0}\right)\left(-\frac{b}{a}x_2^0\right) = \left(\frac{x_2}{x_2^0}\right)x_1^0$$

因此　$x_1 = yx_1^0$，$x_2 = yx_2^0$，其中$y = \left(\frac{x_2}{x_2^0}\right)$

情形2.　$c \neq 0$，則由（＊），　$\frac{d}{c} = \frac{b}{a} = k$，

由此方程組可約簡為

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = 0 \\ cx_1 + dx_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{b}{a}x_1 \\ x_2 = -\frac{d}{c}x_1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_2 = kx_1 \\ x_2 = kx_1 \end{cases}$$

$\longrightarrow$　$x_2 = kx_1$，結果如同情形1.。

1.4　列可簡化梯矩陣

1.　把下列方程式組之係數矩陣先化成列可簡化矩陣，而後試求此方程式組之所有解：

$$\frac{1}{3}x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0$$

$$-4x_1 \qquad + 5x_3 = 0$$

$$-3x_1+6x_2-13x_3=0$$
$$-\frac{7}{3}x_1+2x_2-\frac{8}{3}x_3=0$$

解：
$$\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 2 & -6\\ -4 & 0 & 5\\ -3 & 6 & -13\\ -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{8}{3}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 6 & -18\\ -4 & 0 & 5\\ -3 & 6 & -13\\ -7 & 6 & -8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 6 & -18\\ 0 & 24 & -77\\ 0 & 24 & -67\\ 0 & 48 & -134\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1 & 6 & -18\\ 0 & 24 & -77\\ 0 & 24 & -67\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 6 & -18\\ 0 & 24 & -77\\ 0 & 0 & 10\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 6 & -18\\ 0 & 24 & -77\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1 & 6 & 0\\ 0 & 24 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 6 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

因此 $x_1=x_2=x_3=0$

2. 試求一列可簡化梯矩陣使其列等價於矩陣

$$A=\begin{bmatrix}1 & -i\\ 2 & 2\\ i & 1+i\end{bmatrix}$$

又，$AX=0$ 之解爲何？

解：
$$A=\begin{bmatrix}1 & -i\\ 2 & 2\\ i & 1+i\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -i\\ 0 & 2(1+i)\\ 0 & i\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -i\\ 0 & 0\\ 0 & i\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$AX=0$ 之僅有解爲 $x_1=x_2=0$

3. 試求所有 2×2 列可簡化梯矩陣。

解：令 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

：(a) 若 $a\neq 0$，則 $A\to a^{-1}A=\begin{bmatrix}1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix}$，其中 $b_1=a^{-1}b$，

$c_1=a^{-1}b$ 等等，且

$$\begin{bmatrix}1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & b_1\\ 0 & d_2\end{bmatrix}$$，其中 $d_2 = d_1 - c_1 b_1$

由 $d_2 = 0$ 或 $d_2 \neq 0$，可得

$$\begin{bmatrix}1 & b_1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix}1 & b_1\\ 0 & d_2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & b_1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

(b) 若 $a = 0$，則 $c = 0$。由 $b = 0$ 或 $b \neq 0$，可得

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix}0 & b\\ 0 & d\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & d\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

因此僅有的 2×2 階列即約梯形矩陣爲：

$$\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \text{及} \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

4. 考慮方程式組

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1\\ 2x_1 \qquad + 2x_3 &= 1\\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

試問此方程式組是否有解？若有解，試求其所有解。

解：考慮增廣矩陣 (*augmented matrix*)

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 4 & 2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -2 & -1\\ 0 & -2 & 2 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

因此解爲：

$$x_1 = \frac{1}{2} - x_3,\ x_2 = -\frac{1}{2} + x_3,\ x_3 \text{ 任意。}$$

5. 試舉出一含二個未知數，二個線性方程的方程式組使其無解之例。

解：包含 $x_1 + x_2 = 0$ 及 $x_1 + x_2 = 1$ 之方程組

6. 試證下列方程式無解