成人高校辅导丛书

刘维翰
吴增炽
主编

刘 军
赵章琳
裘汉宗
编著

复变函数简明辅导

广西人民出版社

成人高校辅导丛书

复变函数简明辅导

刘维翰　吴增炽　主编

刘　军　赵章琳　裘汉宗　编著

广西人民出版社

复变函数简明辅导

刘维翰　吴增炽　主编

☆

广西人民出版社出版
（南宁市河堤路14号）
广西新华书店发行　广西民族印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　印张 10.375　字数 228,000
1988年3月第1版　1988年3月第1次印刷
印数 1—7500 册

ISBN 7-219-00578-4
O·8
定价：2.10 元

内 容 简 介

本书内容共分八章，包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的幂级数展开、解析函数的罗朗级数展开式与孤立奇点、留数及其应用、保角映射、拉普拉斯变换。每章均包括四个部分：主要内容简述，典型例题分析及解法指导，小结，自我检查题与自测题（附有答案）。内容简明完整，重点突出，例题典型、广泛，解题详细，解法指导明确。

本书是各类成人高校学员、自学者学习复变函数的辅导用书．亦可供普通高等工科院校学生及辅导教师参考使用。

前　言

本书是根据中央广播电视大学开设的"工程数学复变函数"教材内容及教学大纲，结合我们多年来在电大及其它成人高校教学、辅导的体会，针对成人学习的特点而编写的。本书特点是内容简明、重点突出、例题典型、广泛，解题方法、规律指导明确，复习资料完整。目的是为各类成人高校学员、自学者学习"复变函数"提供一本简明辅导书。

本书共分八章，每章包括下述四个部分：

一、主要内容简述　归纳每一章的基本概念的定义、重要定理、常用的法则和公式。

二、典型例题分析及解法指导　例题包括有概念题、计算题、证明题，同时也选择了初学者在某些容易弄错的概念和解题过程中易犯错误的澄清题，还有较灵活的综合题。选题典型、广泛，不少例题作了解题前的分析及解题思路指导。解答通俗详尽，有的解后还作了小结性说明。

三、小结　扼要概括归纳本章所学的主要内容，指出该章的重点、学习要求及注意事项。

四、自我检查题与自测题　自我检查题着重检查对该章的基本概念、常见计算公式、法则的理解、掌握的程度。自测题除了检查对该章的基本知识的掌握程度外，还检查了分析、解决问题及综合应用知识的能力。

书末附上历届电大"复变函数"期考、补考试题及部分院校"复变函数"考题。

本书编写过程中征求了部分电大学员和其它成人高校学

员意见，参阅了有关杂志和书刊，并选用了一些材料，在此特向有关同志致意鸣谢。

南宁电大张旭辉老师对本书的编审及定稿作了大量工作，特表示感谢。

由于水平有限，成书仓促，缺点错误在所难免，欢迎读者指正。

编　者

1987年4月

目 录

第一章　复数与复变函数

一、主要内容简述

（一）　复数及其代数运算

1．复数的概念

为了使负数的开方有意义，我们引进虚数单位 i，i 满足 $i^2=-1$。

实系数的二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a,\ b,\ c\text{为实数}) \qquad (1)$$

当判别式 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程(1)有一对共轭复（数）根：

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}$$

定义：形如 $x+iy$ 的数称为复数．其中 x 和 y 是任意两个实数，常用 $z=x+iy$ 记之，并称 x，y 分别为复数 z 的实部和虚部．

记作　$x=\operatorname{Re} z$　（Real Part）

$y=\operatorname{Im} z$　（Imagjnary Part）

几点说明：

（1）虚数单位 i 的周期性：

$i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$ $\therefore i^{4n+1}=i$（n为正整数）

（2）当$y=0$时，复数z即（退化）为实数x，所以，复数域为实数的扩充；当$y\neq$为0时，z称为虚数；特别当$y\neq 0$，而$x=0$时，z称为纯虚数．

（3）两个复数相等的定义：设

$$z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2.$$

$$z_1=z_2\Longleftrightarrow x_1=x_2 \text{ 及 } y_1=y_2$$

$$z_1=0\Longleftrightarrow x_1=0,\ y_1=0$$

（4）共轭复数：称$x-iy$为$z=x+iy$的共轭复数，并记作 $\bar{z}=\overline{x+iy}=x-iy$。

2．**复数的几何表示**

一个实数x与数轴上的点是一一对应的。而一个复数$z=x+iy$对应一对有序的实数x与y，记作 $z=(x,y)$．

在平面直角坐标系下：复数$z=x+iy$与点(x,y)是一一对应的，即

$$z=x+iy\longleftrightarrow M(x,y)$$

用以表示复数的平面称为复平面（见图1—1）。

在复平面上，矢径$\overrightarrow{oz}$与点z对应．通常，点z与复数z是不区分的．

点z也可用极坐标(r,θ)表示，r和θ分别称为复数z的模和幅角，记作：

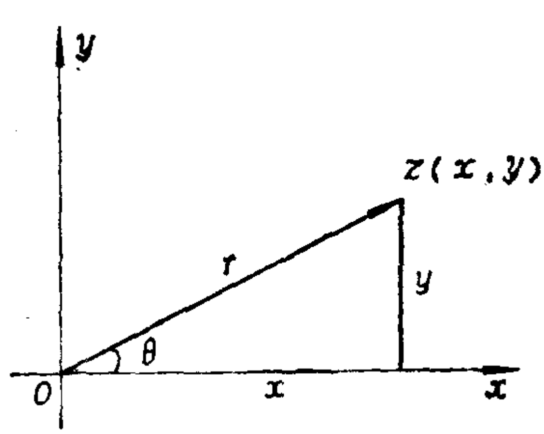

图 1—1

$$r=|z|,\quad \theta=\operatorname{Arg} z \quad (\text{Argument缩写})$$

显然 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{y}{x}$

设 θ 是 z 的幅角，则 $\theta+2k\pi$ (k为整数)仍是 z 的幅角，故 $\operatorname{Arg} z=\theta+2k\pi$ 是多值的。

我们规定 $\operatorname{Arg} z$ 位于 $(-\pi,\pi)$ 的值，称为 $\operatorname{Arg} z$ 的主值，记为 $\arg z$，即 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$。于是

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

显然，互为共轭的复数 z 和 $\bar{z}$，具有相同的模，幅角的主值相差一个符号．即

$$|z|=|\bar{z}|,\quad \arg\bar{z}=-\arg z$$

z 与 $\bar{z}$ 在复平面上是关于 x 轴(称为实轴)对称的。

当 z 为正实轴上的点时，z 为正实数，则 $\arg z=0$；当 z 为负实轴上的点时，z 为负实数，则 $\arg z=\pi$；当 $z=0$ 时，其幅角失去意义．注意：$z=0$是唯一幅角未定义的复数，或者说，当 $z=0$ 时，幅角不定。

3．**复数的运算**

设 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$

用下列等式定义复数的四则运算：

(1) 加法：$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$

(2) 减法：$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$

(3) 乘法：$z_1z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)$

$$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

(4) 除法：设$z_2\neq0$，则有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}$$

容易证明，关于共轭复数的一些性质：

性质1： $\overline{\overline{z}}=z$

性质2： $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z}_1\pm\overline{z}_2$

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}\qquad(z_2\neq 0)$$

性质3： $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}\,z$

$$z-\overline{z}=2i\mathrm{Im}\,z$$

4．复数的三角表示法和指数表示法

设 $z=x+iy$，由直角坐标与极坐标的关系，

得 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$，于是

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta).\ \text{其中}\quad r=|z| \tag{2}$$

称(2)式为复数 z 的三角表示法。

由欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$代入(2)式得

$$z=re^{i\theta} \tag{3}$$

称(3)式为复数z的指数表示法——用虚数指数形式表示。

应用复数的三角表示法或指数表示法能夠简洁地运算复数乘法和除法：

设两个复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_1e^{i\theta_1}$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$$

则 $$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)$$

$$+ i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

$$= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

即 $$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2| \tag{4}$$

$$\mathrm{Arg}\,(z_1\cdot z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \mathrm{Arg}\,z_1 + \mathrm{Arg}\,z_2 \tag{5}$$

(4)和(5)式表明：

两复数乘积之模等于它们模的乘积；

两复数乘积之幅角等于它们幅角的和。

注意：(5)式是多值公式，对它们的主值，未必有

$\arg\,(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ 成立。

例如： $z_1 = -1$，　$z_2 = i$

$$\arg\,(z_1\cdot z_2) = \arg\,(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arg z_1 = \arg(-1) = \pi,\quad \arg z_2 = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

显然 $$\arg(z_1 z_2) \neq \arg z_1 + \arg z_2$$

若取 $$\mathrm{Arg}(-1) = \pi + 2(-1)\pi = -\pi$$

$$\mathrm{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$$

且取 $$\mathrm{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

则 $\quad \operatorname{Arg}(-i)=\operatorname{Arg}(-1)+\operatorname{Arg}(i)$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

$$=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \qquad (z_2\neq 0,\ 即|z_2|=r_2\neq 0)$$

复数的乘法公式推广：

设 $\quad z_k=r_ke^{i\theta_k} \qquad (k=1,2,\cdots,n)$

则 $\quad z_1\cdot z_2\cdots z_n=r_1\cdot r_2\cdots r_ne^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}$

特别地得复数的乘方公式（设 n 为正整数）：

$$z^n=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) \tag{6}$$

(6)式称为棣莫弗（De Moivre）公式。

可以证明：当 n 为有理数时，(6)式仍然成立。

复数的 n 次方根公式 （$n\geqslant 2$，整数）

设 $\quad z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

则$\sqrt[n]{z}$有 n 个不同值：

$$z_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n-1, \quad \sqrt[n]{r}\ 取算术根)$$

若用指数形式表示：

$$z_k=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

5. 平面点集及区域

我们所研究的变量都是复数，因此，称为复变量．复变量变化的范围是复平面上的某一点集．

有关平面点集，我们要理解复变函数这一学科中，常遇到的下列一些概念：

邻域：设z_0为复平面上一点，对所有复平面上满足条件$|z-z_0|<\delta$（δ是可以任意小的正数）的点z的集合，即以点z_0为圆心，以δ为半径的圆内点集（开圆），称为点z_0的δ邻域（见图1—2）。

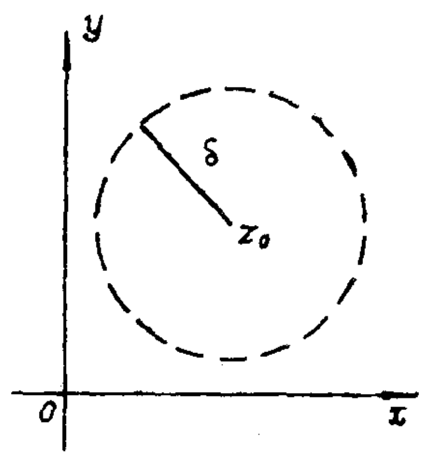

图 1—2

内点：设M是复平面上的一个点集，如果z_0的某一个δ邻域内所有点都属于集合M，则称点z_0是集合M的一个内点。

外点：如果存在z_0的一个邻域，它的所有点都不属于集合M，则称z_0为集合M的一个外点。

边界点：如果在z_0的任何一个邻域中，既有属于集合M的点，又有不属于M的点，称z_0是M的一个边界点，边界点的集合，称为M的边界。

开集：如果集合M的所有点都是内点，M称为开集，邻域就是一个开集。

平面上具备下列两个性质的点集D称为区域。

（1）D是一个开集，即D的每个点都是内点；

（2）D是一个连通集，即D中任意两点，都可以用一条全属于D的折线连接起来。

简言之：连通的开集称为区域，区域连同它的边界称为闭区域。

有界区域与无界区域：如果区域D可以被包含在一个以原点为圆心的圆内，那末，D称为有界区域，否则称为无界

区域。

简单曲线与闭曲线：设连续曲线 C：$z=z(t)\quad a\leqslant t\leqslant b$，如果对于 (a,b) 内的任意两点 $t_1\neq t_2$，都有 $z(t_1)\neq z(t_2)$，那末称此曲线 C 是简单曲线（又称约当曲线）；如果 $z(a)=z(b)$，则称 C 为闭曲线（或称简单闭曲线）。

单连（通）域与多连（通）域：在区域 D 内作任意简单闭曲线 C，若曲线 C 内所包含的点全都属于 D，则称 D 为单连域（无洞）。一个区域如果不是单连域，就称为多连域（有洞）或复连域。

6. 曲线方程

复平面上的曲线方程：

一般式：$\phi(z)=0$，其中 z 是复变量

参数式：$z=z(t)\quad a\leqslant t\leqslant b$，$t$ 为参数

由 $z=x+iy$ 可化为相应的实变量方程：

一般式 $F(x,y)=0$

参数式 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}\quad a\leqslant t\leqslant b$

常见的曲线方程有：

（1）圆：圆心在点 $z_0=x_0+iy_0$，半径为 r 的圆：

$$|z-z_0|=r\Longleftrightarrow(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

（2）直线：$ax+by=c$

$\because\quad x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$，$y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ 代入上式，得

$$a\cdot\frac{z+\bar{z}}{2}+b\cdot\frac{z-\bar{z}}{2i}=c$$

$$a(z+\bar{z})-bi(z-\bar{z})=2c\qquad\left(\because\quad\frac{1}{i}=-i\right)$$

$$(a-bi)z+(a+bi)\bar{z}=2c$$

$\therefore$ $\alpha z+\bar{\alpha}\,\bar{z}=c_1$, 式中 α 为复常数，c_1为实常数，$\alpha=a-bi$。$c_1=2c$。

（3）特殊位置的直线：

① 平行于虚轴的直线：

$\mathrm{Re}\,(z)=a \Longleftrightarrow x=a$, $|a|$为该直线到虚轴的距离；

② 平行于实轴的直线：

$\mathrm{Im}\,(z)=b \Longleftrightarrow y=b$, $|b|$为该直线到实轴的距离；

③ 以原点为端点，斜率为 $\mathrm{tg}\,\alpha$ 的射线：

$$\arg z=\alpha \Longleftrightarrow y=kx \quad (x\geqslant 0),\ k=\mathrm{tg}\,\alpha$$

从点(a_1+b_1i)到点(a_2+b_2i)的直线段：

$$z=[(a_2-a_1)+i(b_2-b_1)]t+(a_1+b_1i)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=(a_2-a_1)t+a_1 \\ y=(b_2-b_1)t+b_1 \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

特别地，原点到点$(a+bi)$的直线段：

$$z=(a+bi)t \quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=at \\ y=bt \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

（二） 复变函数

1. 复变函数的概念

设有一个复数 $z=x+iy$ 的集合G，如果存在一个确定的法则f，使得G中每一个复数z，有一个确定的复数$w=u+iv$与之对应，则称w是复变数z的函数。记作$w=f(z)$，或称$w=f(z)$是定义在G上的复变函数。相当于一对有序的二元实变函数，即