师范大学现代数学丛书

跳过程与粒子系统

陈木法 著

北京师范大学出版

北京师范大学现代数学丛书

跳过程与粒子系统

陈木法　著

北 京 师 范 大 学 出 版 社

北京师范大学现代数学丛书
跳过程与粒子系统
陈木法 著
•
北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
国营五二三厂印刷
•
开本：850×1168 1/32 印张：16.75字数：410 千
1986 年 8 月第 1 版 1986 年 9 月第 1 次印刷
印数：1— 4,000
统一书号：13243·109 定价：(平)3.20 元
(精)4.70 元

《北京师范大学现代数学丛书》编委会

内 容 简 介

本书介绍了近年来在跳过程和粒子系统两方面的一些研究进展．以作者本人的工作为基本线索，同时介绍了有关的国内、国外同行的成果．本书的主要部分是自给自足的，只需测度论基础、随机过程和泛函分析的初步知识．

读者对象是科学技术工作者、高等院校理工科师生．

前　言

跳过程（又称 q 过程）和粒子系统（又称无穷质点马氏过程）在自然科学的许多领域里有着广泛的应用。前者的研究已有相当长的历史，而后者只是十五年前才诞生的新方向，两个方面都在迅速发展，都有丰富的文献。我们不可能总结这两个方向的全部重要成果，而着重于两者之间的渗透，这反映了我们工作的特点。换言之，本书的目的是总结作者及有关的国内、外同行的研究成果，而以国内的工作为主。关于所研究的问题的背景，请见引论。

1982—1983年间，作者在美国进修、访问期间，曾应邀在科罗拉多（Colorado）大学和加利福尼亚大学洛杉机分校作过一些演讲，介绍我们的工作，为此，整理过一份讲义。这成了本书的前身。近两年来，我们在粒子系统方面的研究取得了新的进展；同时也提出了一些新问题，这促使作者完成本书。希望拙著能有助于促进这方面的研究。由于时间仓促，恐有不少谬误，恳请随时指正，以便改正。

借此机会，作者衷心地感谢严士健教授和侯振挺教授多年来的辛勤培养，多方面的教育和帮助；感谢王梓坤教授、杨向群教授和胡迪鹤教授的许多宝贵的帮助；感谢刘秀芳副教授和教研组许多老师的大力支持；感谢丁万鼎、郑小谷、唐守正同志的帮助。感谢 K. L. Chung, R. Holley, T. M. Liggett, D. W. Stroock 和 F. Spitzer 教授的帮助。同时，作者衷心地感谢那些有贡献于本书的学者们和曾经帮助过作者、这里没能一一指名的同志们。

本书写作期间，曾部分地得到教育部重点学科发展项目和中山大学高等学术研究中心的资助。

陈木法

1985 年于北京。

目　录

引　论

在本引论里，我们将尽可能初等地介绍本书研究的问题的背景、意义和主要内容．希望能有助于了解全书的概貌．最后，我们将介绍本书内容的布局．

§1　Q 过 程

设 $E=\{0,1,2,\cdots\}$．称 $E\times E$ 上的矩阵 $P(t)\equiv(P_{ij}(t):i,j\in E)$　$(t\geqslant 0)$ 为一个跳过程，如果

(i) $P_{ij}(t)\geqslant 0$, i, $j\in E$, $t\geqslant 0$;

(ii) $\sum\limits_{j}P_{ij}(t)\leqslant 1$, $i\in E$, $t\geqslant 0$;

(iii) $P_{ij}(t+s)=\sum\limits_{k}P_{ik}(t)P_{kj}(s)$, i, $j\in E$, t, $s\geqslant 0$;

(iv) $\lim\limits_{t\searrow 0}P_{ij}(t)=\delta_{ij}$, i, $j\in E$.

此处

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{如 } i=j,\\ 0, & \text{如 } i\neq j.\end{cases}$$

如果对于一切 $i\in E$, (ii) 中等号成立，则称 $P(t)$ 是不断的，否则称为中断的．

可以证明（参看第一章），极限

(1) $\lim\limits_{t\searrow 0}(1-P_{ii}(t))/t\equiv q_i$, $\lim\limits_{t\searrow 0}P_{ij}(t)/t\equiv q_{ij}$, $i\neq j$

总存在，而且满足

$(2)\ 0\leqslant q_i\leqslant\infty;\ 0\leqslant q_{ij}<\infty,\ i\neq j;\ \sum_{j\neq i}q_{ij}\leqslant q_i.$

我们称满足（2）的矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in E)$ 为一个 Q 矩阵．由于（1），我们也把跳过程 $P(t)$ 称为 Q 过程．

跳过程在自然科学的许多领域中有着广泛的应用（例如 A. Я. Хинчин[1], A. T. Bharucha-Reid[1], H. Haken[1], G. Nicolis and I. Prigogine[1]等）．然而，在实际模型中，我们能够首先得到的是 $Q=(q_{ij})$，而不是 $P(t)$．一般地，我们可以简单地写出 (q_{ij})，但却不能给出 $P(t)$ 的显式．这样，应用概率论工具来研究这些问题时，就需要回答：

（3）问题：对于给定的 Q 矩阵 (q_{ij})．

(i) Q 过程是否存在？

(ii) 若存在，何时唯一？

(iii) 若存在而非唯一，如何把一切 Q 过程统统构造出来？

这就是 Q 过程理论所研究的基本问题．

先看一种最简单的情形：$E=\{0,1,2\cdots,N\}$．(q_{ij}) 有限．则

$$P(t)\equiv e^{tQ},\ t\geqslant 0$$

便是唯一的 Q 半群．这样，上面的三个问题都解答了．对于 E 为可列无限集时，问题远非如此简单，事实上，对于最一般的情形，到现在为止，上述三个问题还没有一个是彻底解决的．然而，近半个世纪以来，经过许多概率论学家的努力，取得了丰富的成果．

回顾一下主要的进展历程将是有趣的．对于任给的一个全稳定 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$（全稳定意指：$q_i<\infty,\ i\in E$），Q 过程的存在性早已由 W. Feller (1940) [1] 和 J. Doob (1945) [1] 解决．若再设 Q 保守，即 $\sum_{j\neq i}q_{ij}=q_i,\ i\in E$，则唯一性也由 W.

Feller[3] 和 G.E.H. Reuter[1] 在 1957 年同时解决。全稳定情形的一般唯一性准则直到 1974 年才由侯振挺 [1] 得到。这就是荣获 1978 年度英国 Davidson 奖的侯氏定理。这些结果已被推广到一般的状态空间，详见本书的第二、三章。

上面的存在性和唯一性都允许 $P(t)$ 中断。然而，实际中需要的常是不中断的 Q 过程。而且，物理学家往往更有兴趣于满足柯氏向前方程

$$P'_{ij}(t)=\sum_k P_{ik}(t)q_{kj}$$

的 Q 过程。类似地有柯氏向后方程：

$$P'_{ij}(t)=\sum_k q_{ik}P_{kj}(t).$$

这样，按照 Q 过程是否中断，是否满足柯氏向前、向后方程，可将 Q 过程分为许多种类型。针对每一种 Q 过程，研究相应的存在、唯一性问题，这就构成了 Q 过程的定性理论。它是第四章所研究的主题。

关于问题 (3). (iii)，我们只讨论了有势情形的构造问题（参见下节）。对于一般 Q 过程的构造问题本书很少涉及。有兴趣的读者可以参考专著王梓坤[2]和杨向群[1]。

应当指出，本书基本上只限于讨论全稳定情形。对于含瞬时态（即存在 $i\in E$ 使 $q_i=\infty$）情形，目前所知的结果还不很多*)。但我们乐意于此说明一下 D. Williams[2,3]的一个出色的结果：

(4) **定理** 设 $Q=(q_{ij})$ 是一个全瞬时（即 $q_i=\infty$, $i\in E$）Q 矩阵，则 Q 过程存在的充要条件是

(i) $\sum_{j\notin(a,b)} q_{aj}\wedge q_{bj}<\infty$, $a\neq b$;

*). 陈、程[1]用非标准分析研究含瞬时态 Q 过程。新近侯振挺、陈安岳等又获得一些进展。

(ii) 存在 E 的无穷子集 J，使

$$\sum_{j\in J\setminus\{i\}} q_{ij}<\infty, \quad i\in E$$

同时成立。若 Q 过程存在，则必定也存在不断的 Q 过程。

§2 有势Q过程

在实际中，人们对于一类特殊的 Q 过程——可逆 Q 过程有着浓厚的兴趣。为说明这一问题，有必要先谈一下可逆马氏链（跳过程）的概念。

设 $(X_t)_{t\geq 0}$ 是定义在 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上、取值于 E 的马氏链。如果对于一切的 $0\leq t_1<t_2<\cdots<t_n$ 和一切的 $i_1, \cdots, i_n\in E$，都有

$$P[X_{t_1}=i_1, \cdots, X_{t_n}=i_n]=P[X_{t_1}=i_n, \cdots, X_{t_n}=i_1]$$

则称过程 $(X_t)_{t\geq 0}$ 是可逆的。

如果过程 $(X_t)_{t\geq 0}$ 有平稳分布 μ，则它可逆的充要条件是

(5) $\mu_iP_{ij}(t)=\mu_jP_{ji}(t), \ i, \ j\in E, \ t\geq 0.$

因此，我们只要研究（5）。此时称 (μ_i) 为 (X_t) 的可逆测度。如果把（5）式中的概率 (μ_i) 放宽为不必可和的情形，则称 $P(t)$ 关于 (μ_i) 有势（可配称），而称 (μ_i) 为一个配称列。

这样，关于有势 Q 过程，同样有（3）中所述的三个基本问题。第七章研究的是头两个问题。第九章研究的是第三个问题，即构造问题。而为研究有势 Q 过程的构造，需要探讨最小 Q 过程中断时，过程跑到无穷（或流出到边界）的方式。换言之，需要研究边界理论。这正是第八章的主题。我们介绍了 Feller 边界理论。另一种十分重要的边界理论——Martin 边界，本书很少涉及。有兴趣的读者可以参考 G.A.Hunt[1]E. B. Dynkin[2]. 在侯振挺、郭青峰[2] 和杨向群 [1] 的专著中，有更深入的研究。

对于有势 Q 过程，有一个不同于一般 Q 过程的问题：如何寻找出一切配称列。这个问题由于引进了场论的工具而得到解决。详见第十章。场论也是研究无穷粒子系统的有力的工具。在下一节里，我们将提到这一点。

§3 无穷粒子系统

让我们先从简单例子开始。试看取值于 $\{-1, 1\}$ 的两个状态的连续参数马氏链，它的 Q 矩阵为

$$Q=(q(x, y))=\begin{pmatrix}-b & b\\ a & -a\end{pmatrix}$$

写成算子形式，就是

$$\Omega F(x)=\sum_{y} q(x, y)(f(y)-f(x)),$$

我们排除 $ab=0$ 的无味情形。那么，$|\mathscr{I}|=1$。即不变测度的个数（不计常数因子）只有一个。

上述例子是单粒子模型。这个粒子只有两种状态 ± 1。我们可以理解为磁分子的南、北极等等。若考虑有很多个粒子系统，例如说 N 个，那么状态空间就是 $\{-1, 1\}^N$。此时也有同样的结果：$|\mathscr{I}|=1$。详见第十二、十三章。

如果考虑无穷粒子系统，情况如何呢？假设在每一个 d 维整点 $u\in \boldsymbol{Z}^d$ 上，有一个粒子。它有 $\{-1, 1\}$ 两个状态。那么，这个系统的状态空间就是 $E\equiv\{-1, 1\}^{Z^d}$。它是不可数的，从而不能用 Q 过程来刻画。现在，我们改用 $c(u, x)$ $(u\in \boldsymbol{Z}^d, x\in E)$ 表示在位置 $u\in \boldsymbol{Z}^d$ 处的粒子改变状态的速率。那么，过程的无穷小算子可以形式地写成

$$\Omega f(x)=\sum_{u\in Z^d} c(u, x)[f({}_u x)-f(x)]$$

此处

$$_ux(v)=\begin{cases} x(v), & 如\ u\neq v, \\ -x(v), & 如\ u=v. \end{cases}$$

这称为自旋变相过程。特别地，取

$$c(u,\ x)=\exp[-\beta\sum_{v:\|v\|=1}x(u)x(u+v)]$$

我们得到 Ising 模型。此处 $\beta\geqslant 0$，而 $\|\cdot\|$ 表普通的欧氏范数。此时，与有限系统完全不同的现象出现了！例如说，当 $d=2$ 时：

$$|\mathscr{I}|=1,\ 如\ \beta<\frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})\approx 0.44,$$

$$|\mathscr{I}|>1,\ 如\ \beta>\frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2}).$$

对于 $d\geqslant 3$ 的情形，也存在类似的现象。但当 $d=1$ 时，$|\mathscr{I}|=1$。

Ising 模型是1925年提出来的。物理学家认为：当 $d\geqslant 2$ 时，Ising 模型必定存在相变。所谓相变，也许可以通俗地拿水来解释。当水温逐渐升高到 $\beta=100$℃时，水由液态变成气态。这就叫发生了相变。这里，100℃是临界值。我们注意，一个水分子不可能发生相变，因此，我们研究的是大量水分子的整体现象，这是与先前只研究单个或有限多个粒子运动的最主要的区别。关于二维 Ising 模型，到了 1952 年李政道和杨振宁〔1〕的工作之后，大多物理学家认为已告完成（参考 B.M.Mccoy, T.T. Wu〔1〕）。然而，上面所介绍的方法并不是物理学家的方法。后者所用的是所谓热力学极限。而概率论学家则直接构造无穷维空间上的随机过程，用不变测度的唯一和非唯一的分界来刻画相变（还有其它形式的刻画）。但两者所得的结果完全一致。这表明无穷粒子系统的研究有着重要的意义，因而得到许多数学物理学家的重视。有兴趣的读者可以参考综述文章 R.L.Dobrushin and Ya.G.Sinai〔1〕，R. Durrett〔1〕，T. M.Liggett 新近的专著

[3]和严士健[1].

对于 Ising 模型，之所以能够得到这么好的结果，主要有如下两个原因：

(i) $\{-1, 1\}^{Z^d}$ 依乘积拓扑是紧空间，从而 $|\mathscr{I}| \geqslant 1$；

(ii) Ising 模型是可逆的.

关于 (ii)，或更一般的无穷粒子系统的可逆性问题，国内已完成比较系统的工作. 详见第十章.

应该说，Ising 模型是属于平衡态统计物理的. 那么，自然要问：能否使用这一工具处理当今统计物理学家较普遍关心的"非平衡统计"，下面是其中的一个模型（略有简化）

(6) Schlögl **模型**：状态空间是

$$E = \{0, 1, \cdots\}^{Z^d}, \ d \geqslant 1.$$

它是不可数且既非局部紧，也非 δ- 紧. 算子是

$$\begin{aligned}\Omega f(x) = & \sum_{u \in Z^d} (\lambda_1 x(u)^2 + b)[f(x + e_u) - f(x)] \\ & + \sum_{u \in Z^d} \lambda_2 x(u)^3 [f(x - e_u) - f(x)] \\ & + \sum_u \lambda_3 x(u) \sum_v P(u, v)[f(x - e_u + e_v) - f(x)]\end{aligned}$$

此处 λ_1, λ_2, λ_3, $b > 0$. $(P(u, v) : u, v \in \mathbf{Z}^d)$ 是一个转移概率矩阵. 这个算子 Ω 不是可逆的. 它提供了一种数学上十分吸引人的无穷粒子系统的新模型.

我们关心这类问题已有多年（例如见严士健、李占柄[1]）；然而，首先需要解决的存在性问题，都是最近才完成的，详见第六章. 作为基本工具——耦合，现在也已搞清楚了. 详见第五章. 虽然我们也有一些关于相变的工作（如丁万鼎、郑小谷[1]），但我们还没能回答 Schlögl 模型的相变的存在性问题. 这有待于进一步的努力. 关于粒子系统平稳分布的存在性、唯一性和遍历