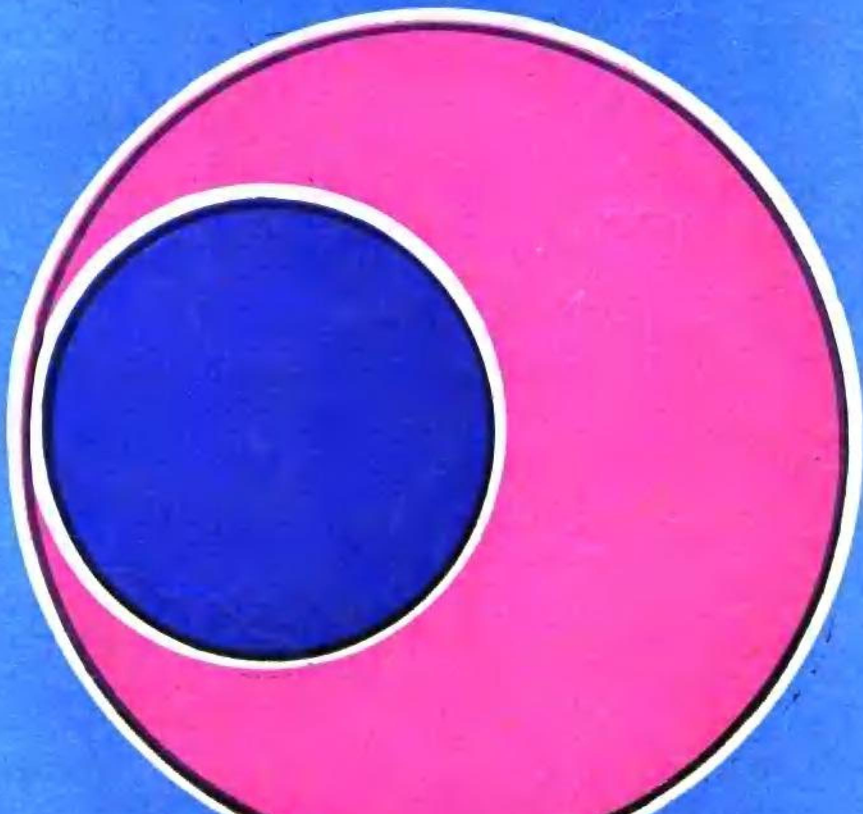
# 大学物理实验

姜长来 欧阳武 戴剑锋 主编



机械工业出版社

# 大学物理实验

主　编　姜长来　欧阳武
　　　　戴剑锋

副主编　呼文来　石秀文
　　　　[redacted]　刘遵周

机械工业出版社

(京)新登字 054 号

本书是根据国家教委颁发的《高等工业学校物理实验课程教学基本要求》及其修订稿编写的。内容包括：误差理论基础知识、有效数字及数据处理基础知识、力学和热学实验、电磁学实验、光学实验、近代物理实验、设计性实验等七章内容，共 62 个实验。

本书可作为高等工科院校各专业物理实验教材，同时也可作为职工大学、业余(夜)大学、函授大学物理实验教材或教学参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

大学物理实验/姜长来、欧阳武、戴剑锋主编. —北京：机械工业出版社，1995.10

ISBN 7—111—04780—X

Ⅰ.大… Ⅱ.姜… Ⅲ.大学—物理—实验 Ⅳ.04—33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 13886 号

出 版 人 马九荣 (北京市百万庄南街 1 号 邮政编码 100037)
责任编辑：李宣春 版式设计：李松山 责任校对：丁丽丽
封面设计：郭景云 责任印制：侯新民
北京市昌平精工印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行
1995 年 8 月第 1 版 · 1995 年 8 月第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16 · 17 1/2 印张 · 427 千字
0 001—8 000 册
定价 16.80 元

# 前　言

本书是在原机电部部属院校第七届物理协作会(西安理工大学,1994.8)上,经过对目前大学物理实验教学、教材进行广泛深入的交流和研讨后,由北京机械工业学院、燕山大学、甘肃工业大学、西安理工大学、哈尔滨科技大学、哈尔滨工业高等专科学校以及华北水力水电学院等七所院校代表协商决定编写的。

本书编写过程中,依据了国家教委颁发的《高等工业学校物理实验课程教学基本要求》及其修订稿,并汲取了参编各校教学经验。

全书共分误差理论基础知识、有效数字及数据处理基础知识、力学和热学实验、电磁学实验、光学实验、近代物理实验、设计性实验等七章共62个实验。全书内容既有一定广度,适于较多学校使用,也有相当深度,有利于优秀学生的提高。

本书注重以下特点:

(1)编入实验项目多,各校各专业可根据《基本要求》的参考学时进行选择。有利于实验室开放教学。

(2)较大幅度地加强了近代物理实验、设计性实验两部分内容。有利于实验教学的改革。

(3)较大幅度地增加了应用性实验,尤其是新技术的应用与研究方面的实验得到了一定程度的加强。有利于学生知识的更新。

(4)每个实验项目都列入了一定量的思考题,且安排在实验原理之后,使学生能够带着问题进行实验.并在实验中加以解决。有利于学生能力的培养。

本书由姜长来、欧阳武、戴剑锋主编,呼文来、石秀文、卢伟、刘遵周为副主编。各章节编写具体分工为:姜长来:绪论、第一章、第二章及近代物理简介。欧阳武:实验3.1、3.2、3.5、3.8、4.1、4.3、5.3。戴剑锋:实验4.5、4.6、6.5、6.7、6.9、7.10、7.13及“设计性实验基础知识”。呼文来:实验3.11、3.12、4.7、4.11、5.7及“力学热学基础知识”。石秀文:实验3.3、3.7、5.8、7.1、7.5、7.7、7.14及“电磁学基础知识”、“重要物理实验年表”。卢伟:实验3.6、5.2、5.4、5.5、6.2、6.3、6.4、7.12及“光学实验基础知识”。刘遵周:实验3.10、3.13、4.4、7.6、7.9。吉生甫:实验3.14、4.8、4.10、4.13、4.14、6.8、6.10、7.4、7.5。黄建伟:实验3.4、5.1、6.5、6.6。陈彪:实验6.1。孙志红:实验4.2、5.6、7.3、7.11。吴民强:实验3.9、4.9。张少君:实验4.12、7.2。任永泉:实验6.11。王宏良:实验6.12。最后由姜长来、欧阳武、呼文来统稿定稿。主审徐国忠、郭富昌。

实验教学是一项集体事业。实验教材的编写、实验项目的开发、实验教学的完成是全体从事实验教学的教师和实验技术人员共同辛勤劳动的成果。

借此,对编写本书作出贡献的七所院校以及西安电子科技大学、西安纺织工学院的教师和实验技术人员致以诚挚的谢意。

由于编者水平有限,难免有漏误之处,热忱希望广大读者提出宝贵的意见和建议。

编者 1994.12

# 目 录

# 绪　论

## 一、物理实验的作用和意义

物理学是自然科学里最重要的基础科学之一。它的基本理论渗透在自然科学的一切领域，应用于生产技术的各个部门。从本质上讲，它是一门实验科学。物理实验为物理学的创立和发展起到了极其重要的作用。表现在：

(1)在物理实验的基础上，人们得以不断认识物质的性质和结构，建立揭示物质运动规律的定律。

(2)通过物理实验，可以验证由科学思维和数学演绎得出的反映物理规律的原理、定理、预言和假说。

(3)物理实验自身的发展，包括实验方法、实验仪器、实验理论的发展，决定着物理学的进一步发展。

(4)物理实验促进了计量学的形成和发展，完善了一系列的测量新技术，尤其是通过物理实验对基本物理量和基本物理常数的精确测量使得计量基本单位的复现，由实物基准逐步转向自然基准，并使其具有很高的准确度和稳定性。

一切物理学的原理、定律的正确性都是有条件的、相对的。随着社会生产力的发展和实验手段的日臻完善，人们对物质世界的认识日趋全面和深刻，在新的实验成果的基础上总结出新的理论以修正、充实、完善旧的理论，而这些新的理论又将被今后更新的理论所替代。纵观物理学的发展史，物理实验既为物理学理论提供了丰富的依据，同时也是检验物理学理论是否正确的唯一判据。所以，物理实验对物理学的发展具有决定意义。可以说，离开物理实验就没有物理学。

## 二、大学物理实验课的目的和任务

大学物理实验课是高等工科院校的一门必修基础课程，是对学生进行科学实验基本训练，提高学生分析问题和解决问题能力的重要课程。物理实验课和物理理论课具有同等重要的地位。它既和物理理论课有着内在的联系，又有独自的教学目的和任务：

(1)培养和提高学生进行科学实验的能力，使其掌握基本的物理实验的理论知识、实验方法和实验技能。

(2)培养和提高学生在实验中提出和发现问题、分析问题、解决问题的能力以及独立实验的能力。并通过实验加深对物理学理论的理解。

(3)培养学生理论联系实际、实事求是的作风，严肃认真的态度，主动研究探索的精神和遵守纪律、爱护公物、团结协作的优良品德。

社会主义现代化建设不仅要求高校培养的人才具有较为深广的理论知识，而且要求他们具备较强的从事科学实验的能力。大学物理实验课是高等工科院校学生在校受到系统实验方法和实验技能训练的开端，也是工科类专业对学生进行科学实验训练的重要基础。

## 三、大学物理实验课的要求

通过大学物理实验课的学习，学生应在习惯、知识、能力三方面达到如下要求：

（一）养成良好的科学实验习惯

(1)深刻理解科学实验的重要性，明确大学物理实验课的地位、作用和任务。

(2)养成一丝不苟、严肃求实的科学实验习惯。爱护仪器设备，遵守实验室各项规章制度和实验操作规程，维护实验室整洁卫生。

（二）掌握物理实验理论基础知识

(1)误差理论基础知识。包括测量误差的基本概念；直接测量结果的误差评估；间接测量结果的误差评估；系统误差的分析与修正等。

(2)有效数字运算与数据处理基础知识。包括实验数据的记录与处理的常用方法，如列表、图示、图解、最小二乘法、粗大与微小误差判断与处理等。

（三）具备相应的实验能力

(1)能独立完成实验预习、操作、数据记录、数据处理、撰写规范的实验报告等主要实验程序。

(2)能调整常用实验仪器设备并掌握基本的操作技术和规程。如零位校准；水平、铅直调整；电路正确连接和跃接法接通；光路共轴调整；视差消除；逐次逼近调节等。

(3)掌握物理实验中的基本实验方法。如比较法、累积法、放大法、交换法、模拟法、补偿法、干涉法等。

(4)能对基本物理量和常用物理量进行一般准确度的测量。

(5)了解常用实验仪器的基本构造原理及性能。

(6)具备一定的对物理现象、实验结果的观察、分析、评估能力，并能用实验理论解决实验中出现的一般问题。

(7)具备初步设计实验的能力，在实验方法的确定、仪器的选择与配合、测量条件的确定等方面得到初步的训练。

(8)具备相应的使用计算机辅助实验和数据处理的能力。

## 四、大学物理实验课的程序

大学物理实验课应分三个程序进行：

（一）预习

在实验之前，应仔细阅读教材和相应的参考资料，写出预习报告。预习报告要求写明实验名称、实验目的、实验仪器、实验原理、思考题、实验内容和步骤以及实验数据记录表等。

实验原理要简单明了，既要叙述清楚原理、内容、主要公式、原理图、电路图、光路图等，又要避免照抄教材。

思考题要认真预习，经思考仍不清楚的问题在实验中加以解决。

数据记录表格要规范整洁，便于记录。

（二）实验

实验是中心环节。实际操作前要认真听老师讲解重点和难点，熟悉各种仪器的使用方法和操作规程，记录实验条件（如日期、同组人姓名、气压、湿度、温度等），然后按实验内容及步骤进行实验。实验中，应仔细观察实验现象，如实记录实验数据，不允许随意涂改数据，更不允许抄袭他人数据。遇到疑难问题或出现故障自己解决不了时，应及时请教指导教师。实验结束应将

实验数据交教师审阅并签字，整理好仪器设备，经教师同意后，方可离开实验室。实验全过程，学生应自觉遵守实验室的各项规章制度。

（三）报告

实验报告是对实验结果全面评价的书面总结，是积累知识和进行学术交流的依据，是实验不可缺少的重要环节。

实验报告应对原始数据进行处理，得出实验结果，并对实验结果进行评价、分析和讨论。分析和讨论的对象包括实验现象，误差来源及对实验结果的影响，实验方法的改进，个人心得体会和见解等等。

实验报告要求格式规范、字迹工整、条理清楚，并用统一实验报告纸书写。

# 第一章　误差理论基础知识

## §1-1　研究误差的意义

误差存在的必然性和普遍性，已为长期科学实践所证明。对误差研究的深入程度反映着人们对客观世界的认识程度。随着科学技术的飞速发展、实验手段的不断更新以及人们认识水平的不断提高，人类对客观世界的揭示愈来愈深刻，将误差控制得愈来愈小。但是，企图完全消除它却始终没有做到。为了充分认识它的规律并尽可能地减小它、控制它，就必须对误差进行更深入更细致的研究。

具体到物理实验，研究误差的意义在于：

(1)正确认识误差的性质、规律，分析产生误差的原因，寻求消除、修正和减小误差的方法和途径。

(2)正确记录、处理实验数据，合理计算出实验结果，科学评估反映客观真实值的程度。

(3)正确组织、设计实验，合理设计、配备、选择实验仪器和实验方法，力求在最经济简便的条件下，得到理想的实验结果。

(4)正确研究分析误差遵从的规律；验证物理学规律；寻找物理学经验公式、回归方程，创立新的物理学定律。

## §1-2　误差的定义和表示

**一、误差的定义**

所谓误差就是非真实值与客观真值之间的差，其逻辑表达式为

$$误差 = 非真值 - 真值 \tag{1-2-1}$$

物理实验中遇到的主要是测量误差(以下内容全部讨论测量误差)。其公式为

$$误差 = 测量值 - 真值 \tag{1-2-2}$$

测量值是非真值，它的绝大部分是客观真值的近似值，也有极少部分为错误值。

**二、误差的表示**

为了反映误差和真值之间的关系，可以有以下的表示方法：

(一)绝对误差

某一物理量的测量值和真值的差称为绝对误差。用 $\Delta N$ 来表示，有

$$\Delta N = N - N_0 \tag{1-2-3}$$

式中，$N$ 为测量值；$N_0$ 为真值[①]。$\Delta N$ 可能是正值，也可能是负值，且有量纲。

绝对误差可以比较用不同仪器测量同一被测物理量的测量准确度[②] 的高低。

① 任何物质都有自身的各种各样的特性，反映这些特性的物理量所具有的客观的真实数值，称为真值。

② 准确度的定义见§1-4。

(二)相对误差

绝对误差 $\Delta N$ 与真值 $N_0$ 的比值称为相对误差。通常用百分数 $E$ 来表示

$$E=\frac{\Delta N}{N_0}\times 100\% \tag{1-2-4}$$

相对误差可以比较不同被测物理量的测量准确度的高低。

绝对误差和相对误差之间的关系是

$$\Delta N=N_0\times\frac{\Delta N}{N_0}=N_0\cdot E \tag{1-2-5}$$

(三)引用误差

引用误差是一种简便、实用的相对误差,常用于多档和连续刻度的仪器仪表的测量中。引用误差等于仪器仪表的某一指示值的绝对误差 $\Delta N$ 与该示值所在档次满刻度示值(量程)$N_{max}$ 的比值,也用 $E$ 表示

$$E=\frac{\Delta N}{N_{max}}\times 100\% \tag{1-2-6}$$

电工仪表的准确度等级就是根据最大引用误差来划分的。它等于仪器仪表上所有指示值的绝对误差中的最大值 $\Delta N_{max}$ 和该量程 $N_{max}$ 的比值。用 $K$ 来表示,有

$$K(\%)=\frac{\Delta N_{max}}{N_{max}}\times 100\% \tag{1-2-7}$$

## §1-3 误差的来源与分类

### 一、误差的来源

在对物理量的测量过程中,产生误差的原因是多种多样的。一般可归纳为如下几类:

(一)测量装置误差

(1)标准器件误差。标准器件是提供标准值的量具。如标准量块、标准刻度线尺、标准电阻、标准电池和标准砝码等等。它们本身体现的量值并非真值,不可避免地含有误差。因此,以它们为基准制造和校准的仪器仪表自然也就含有误差。

(2)仪器误差。把被测物理量与测量单位进行比较的设备称为仪器或仪表。如米尺、天平等称为比较仪器;电表、温度计、秒表等称为指示仪器。它们的示值均含有误差。

装置误差一般表现为:结构误差,如天平的不等臂、米尺刻度的不均匀、机械零件联接的间隙等所造成的误差;调整误差,如水平、铅直、同心、零点等没有调整到理想状态所造成的误差;变形误差,如仪器仪表在长期使用过程中的磨损、变形、老化等所造成的误差。

(二)环境误差

由于各种环境与规定的标准状态不一致而引起的测量仪器或被测物理量产生变化所造成的误差。如温度、湿度、气压、振动、电磁场、重力场等等与规定的测量条件不相符而造成的误差等。

(三)方法误差

由于测量方法或依据的理论不严密而造成的误差。如用伏安法测电阻采用的电流表内接或外接给测量造成的接线方法误差以及用单摆测重力加速度采用近似公式 $g\approx 4\pi^2\frac{l}{T^2}$造成的

计算方法误差等。

(四)人员误差

由实验者的分辨能力、感觉器官、反应速度、生理习惯、精神状态等原因造成的误差。

总之,在评价测量结果的误差时,要对误差的来源作全面的分析,既不遗漏,又不重复,以便找出重要因素,略去次要因素。这样得出的测量结果才是正确可信的。

**二、误差的分类**

依据误差的性质和特点,可将其分为三类:

(一)随机误差

在相同条件下多次重复测量同一量值,每一次测量误差的大小和符号,时大时小,时正时负,没有确定的变化规律,呈现无规则的涨落,且无法控制和预测,这样的误差称为随机误差。

随机误差是由偶然的或不确定的因素造成的,故导致其具有单个无规律性。如不同观测者的反应快慢,温度的微小变化,气流的扰动,电磁场的干扰等都会给测量值带来一定的随机性。但是,若对某一量值进行一系列多次测量,就此系列多次测量的误差总体而言,却服从统计分布规律。由于在统计分布规律中,正态分布(又称高斯分布)是经典误差理论的重要分布,是数学上最典型的随机分布规律,大量的数据统计处理的国内外标准和规范都以正态分布为典型条件或简化(假定)前提,且物理测量中的随机误差多服从正态分布规律,所以在实验结果误差分析中,正态分布具有很重要的地位。

由随机误差的特性和分布规律所决定,通过多次测量的方法可以减小随机误差。

(二)系统误差

在相同条件下,多次测量同一量值,大小和符号保持恒定不变,或在条件变化的情况下,大小和符号按某一确定的规律变化的误差,称为系统误差。

系统误差还可以按下列情况细分:

(1)按掌握的程度分,有:

已定系统误差:误差的大小和符号均已知。如千分尺的零点读数。

未定系统误差:误差的大小和符号至少其一为未知。但通常可以估计出误差范围。如测量仪器说明书给出的误差限值。

(2)按变化规律分,有:

不变系统误差:误差的大小和符号不变化,为固定值。

变化系统误差:误差的大小和符号至少有其一是变化的,变化规律可为线性变化、周期性变化和复杂变化。

在测量中可以修正的系统误差只有已定系统误差。对于未定系统误差可以用改变测量条件或测量方法来减小或者消除。如代替法、抵消法、交换法、半周期法等。但是不能用多次测量的方法来减小或消除。

(三)粗大误差

对测量结果产生明显歪曲的、数值比较大的误差称为粗大误差。

产生粗大误差的原因多是由于人员失误或测量不符合规定的条件。这类误差在数据处理过程中应依照判据加以剔除。

对于随机误差和系统误差而言,它们之间无绝对明显界限,可以在一定条件下相互转换。掌握它们相互转换的规律和特点,可以使我们在用多次测量的方法减小随机误差和用改变测

量条件的方法减小、消除系统误差两者之间加以选择。

## §1-4 准确度与不确定度

### 一、准确度

反映测量结果与真值接近程度的量，称为准确度。它和误差大小相对应。误差大则准确度低，误差小则准确度高。

准确度是一个综合指标。按国家标准《测量误差及数据处理技术规范（报审稿），1990》规定，可细分为：

(1)精密度：反映随机误差的大小。

(2)正确度：反映系统误差的大小。

(3)准确度：反映随机误差和系统误差合成后的大小，亦即综合误差的大小。

以打靶为例，其成绩由枪的校准程度、射击者状态和周围环境所决定。子弹中靶的情况有三种，如图 1.4-1中 a、b、c 所示。图 a 反映随机误差大而系统误差小，精密度低而正确度高；图 b 反映随机误差小而系统误差大，精密度高而正确度低；图 c 反映随机误差和系统误差均小，即综合误差小，准确度高。

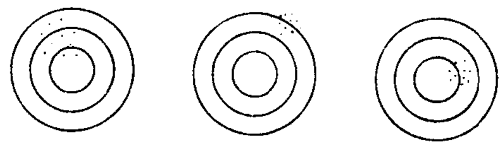

a)　　b)　　c)

图 1.4-1

由此可见，对于具体的测量，精密度高的正确度不一定高，正确度高的精密度不一定高，只有两者都高才能保证准确度高。

### 二、不确定度

所谓不确定度，是评定测量值附近的一个值域范围包含真值的可能程度。

由误差存在的必然性和普遍性可知，在实际测量中理想的真值是不可知的，因而误差表示的测量值与真值之差也不可能准确地得到。所以，在工程技术测量、计量工作和实验中，采用不确定度更能表示测量结果的特征。

在国际计量局 1980 年提出的《实验不确定度的说明建议书》中，建议使用不确定度来评定测量和实验结果。我国 1992 年正式颁布的《计量技术规范·测量误差与数据处理》中规定采用不确定度作为基准研究、测量和实验工作中的误差数字指标的名称。显然，在物理实验中，也应使用不确定度来评价实验结果。

不确定度的评定方法应分为两类：

(1)$A$ 类不确定度：指采用统计方法计算出的分量，用 $\Delta_A$ 来表示。

(2)$B$ 类不确定度：指不能用统计方法计算，而用其他方法估算的分量，用 $\Delta_B$ 来表示。

对两类分量进行合成即为测量结果的总不确定度，用 $\Delta$ 来表示。它等于

$$\Delta = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_B^2} \qquad (1\text{-}4\text{-}1)$$

## §1-5 直接测得量的随机误差计算

凡是用仪器将被测量和测量单位进行比较，直接得出结果的测量，称为直接测量。直接测

量可分为多次测量和单次测量两种情况。

## 一、等精度[1] 多次测量的随机误差计算

### (一)正态分布的性质和分布函数

#### 1. 正态分布的性质

在一系列等精度测量(简称测量列)中,若不包含系统误差和粗大误差,在大多数情况下,测量列的随机误差服从正态分布规律。正态分布有以下特点:

(1)单峰性:绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的概率大。

(2)对称性:绝对值相等而符号相反的误差出现的概率相同。由此可以导出,随着测量次数的增加,随机误差的代数和趋于零。此性质称为随机误差的抵偿性。这正是多次测量可以减小随机误差的原因。

(3)有界性:在一定的测量条件下,随机误差的绝对值不会超过某一界限。

#### 2. 正态分布的分布函数

设被测物理量的真值为 $N_0$,一系列测量值分别为 $N_i$,其随机误差 $\delta_i=N_i-N_0$。由概率论和数理统计可知,正态分布的分布密度函数为

$$f(\delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1-5-1}$$

式中,$\sigma$ 为标准误差(亦称均方根差);$e$ 为自然对数的底,等于 2.7182…。

正态分布曲线如图 1.5-1 所示。曲线下斜线部分的面积为数值在 $\delta_i$ 到 $\delta_i+d\delta_i$ 之间的误差出现的概率。应当指出,当测量次数趋于无穷时,随机误差严格服从正态分布,误差值从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 出现的总概率为 1,表现在几何图形上为曲线下的总面积。然而在有限次测量中,测量次数越多,越近似服从正态分布。关于如何判断误差是否服从正态分布的问题,可以用正态性检验的方法来确定,本书不赘述。

### (二)最小二乘法和算术平均值原理

#### 1. 最小二乘法

设在等精度测量列($k$ 次)里,$N_i$ 为各次测量值,$N_0$ 为真值,对应的误差为 $\delta_i=N_i-N_0$,根据式(1-5-1),误差为 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_k$(附近 $d\delta$ 区域内)出现的概率分别为

$$\left.\begin{aligned}P_1&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\delta_1^2}{2\sigma^2}}d\delta_1\\P_2&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\delta_2^2}{2\sigma^2}}d\delta_2\\&\vdots\\P_k&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\delta_k^2}{2\sigma^2}}d\delta_k\end{aligned}\right\} \tag{1-5-2}$$

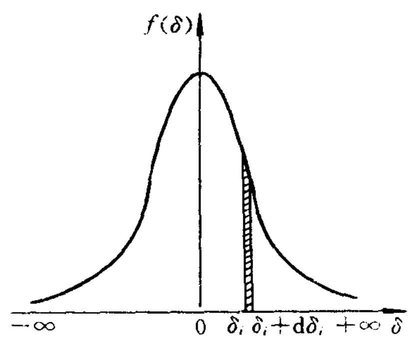



图 1.5-1

由于各次测量相互独立,依据概率论可知,误差为 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_k$ 同时出现的概率为

$$P=P_1\cdot P_2\cdot\cdots\cdot P_k$$

[1] 非等精度多次测量的随机误差计算要比等精度多次测量的随机误差计算繁杂,这里不再叙述。

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^k e^{-\frac{(\delta_1^2+\delta_2^2+\cdots+\delta_k^2)}{2\sigma^2}}\cdot d\delta_1\cdot d\delta_2\cdot\cdots\cdot d\delta_k \tag{1-5-3}$$

由随机误差的单峰性可知,小误差出现的概率比大误差出现的概率大,所以真值必定应该在概率密度最大的地方。又由于真值一般是不可知的,只能得到真值的最佳近似值,根据概率论中最大或然原理,测量列($k$ 次)的最佳近似结果应使误差 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_k$ 同时出现的概率为最大,亦即式(1-5-3)中 $P$ 为最大。不难看出,要 $P$ 为最大,就要($\delta_1^2+\delta_2^2+\cdots+\delta_k^2$)为最小。由此得出测量结果的最佳近似值应在使各测量值误差的平方和为最小的条件下求出。这就是最小二乘法原理。

2. 算术平均值原理

根据最小二乘法原理可以证明,在等精度测量列($k$ 次)中,算术平均值就是真值的最佳近似值。

令
$$Q=\delta_1^2+\delta_2^2+\cdots+\delta_k^2$$
即
$$Q=(N_1-N_0)^2+(N_2-N_0)^2+\cdots+(N_k-N_0)^2 \tag{1-5-4}$$
$N_1,N_2,\cdots,N_k$ 是测量值(为已知),$N_0$ 为何值时 $Q$ 才能最小呢?根据求极值的方法,$Q$ 极小的条件为

$$\frac{dQ}{dN_0}=0 \quad 及 \quad \frac{d^2Q}{dN_0^2}>0 \tag{1-5-5}$$

由
$$\frac{dQ}{dN_0}=-2(N_1-N_0)-2(N_2-N_0)-\cdots-2(N_k-N_0)=0$$
得
$$(N_1+N_2+\cdots+N_k)-kN_0=0$$
$$N_0=\frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k}N_i\right)=\overline{N} \tag{1-5-6}$$
再由
$$\frac{d^2Q}{dN_0^2}=2k>0 \tag{1-5-7}$$

式中 $k$ 为非零的正整数。可以证明用 $\overline{N}$ 代表真值 $N_0$ 的误差平方和最小,从而也就证明了多次测量值的算术平均值 $\overline{N}$ 是真值 $N_0$ 的最佳近似值。

3. 误差与偏差

真值是一个理想概念,在一般情况下是不可知的。除了是在特定条件下之外,从相对意义上讲,真值认为是可知的:

(1)理论真值:如平面三角形内角和为 180°等。

(2)计量学约定真值:凡满足计量学单位规定条件复现的量。

(3)标准器件相对真值:高等级标准器件示值是低等级标准器件示值的真值。

经常遇到的情况是,理想的、相对的真值全不能得到。这时,我们可以用单次测量值(只测量一次的情况)或多次测量的算术平均值代替真值。

对于多次测量,测量列中任意一个测量值 $N_i$ 与测量列的算术平均值 $\overline{N}$ 的差称非"偏差"。偏差和误差是不同的,其计算方法也不同。由于真值 $N_0$ 的不可知,且算术平均值是真值的最佳近似,所以在误差计算过程中,需要用偏差来导出误差。

(三)随机误差的计算

等精度测量列的随机误差的计算方法,常用的有两种,即算术平均误差和标准误差。

1. 算术平均误差(简称平均差)

设某一($k$ 次)测量列,其测量值为 $N_i(i=1,2,\cdots,k)$,每次对应的误差 $\delta_i=N_i-N_0$ 用偏差

$\delta_i' = N_i - \overline{N}$ 近似表示[1]，则测量列的平均误差为

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{k} |N_i - \overline{N}|}{k} \tag{1-5-8}$$

平均误差 $\theta$ 不是一个具体的误差，是对测量列整体的一个衡量。可以证明测量列的算术平均值 $\overline{N}$ 的平均误差为

$$\theta_{\overline{N}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} |N_i - \overline{N}|}{k\sqrt{k}} \tag{1-5-9}$$

式(1-5-9)说明由于 $\overline{N}$ 最近似地代表真值 $N_0$，故它的随机误差比测量列的随机误差小 $\sqrt{k}$ 倍。

2. 标准误差(亦称均方差)

设某一($k$ 次)测量列，各次测量值为 $N_i(i=1,2,\cdots,k)$，对应的随机误差为 $\delta_i = N_i - N_0$，则测量列的标准误差[2]为

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(N_i - N_0)^2}{k}} \tag{1-5-10}$$

通常我们只知道偏差 $\delta_i' = N_i - \overline{N}$，而不知道误差 $\delta_i = N_i - N_0$，所以用偏差来代替误差计算，可以证明

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(N_i - \overline{N})^2}{k-1}} \tag{1-5-11}$$

式(1-5-11)称为贝塞尔(Bessel)公式，是我们常用的公式。

要注意，标准误差 $\sigma$ 不是一个具体的误差。$\sigma$ 的大小只说明在一定条件下，测量列随机误差出现的概率分布情况。在某一条件下，测量列中各次测量值的 $\delta_i$ 大都不等于 $\sigma$，但它却表示测量列中所有测量值都具有这样的同一标准误差 $\sigma$。

也可以证明，测量列($k$ 次)的算术平均值 $\overline{N}$ 的标准误差为

---

① 平均误差常用在误差的粗略估算上，因此在工科物理实验中，对实验结果的粗略评估不再区分误差 $\delta_i$ 和偏差 $\delta_i'$。

② 标准误差公式的推导：

根据式(1-5-3)，以 $\sigma$ 为变量，概率 $P$ 极大值亦即误差最小的条件是

$$\frac{dP}{d\sigma} = 0 \quad 及 \quad \frac{d^2P}{d\sigma^2} < 0$$

可得
$$\frac{dP}{d\sigma} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^k e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{k}\delta_i^2\right)}\left(\sum_{i=1}^{k}\delta_i^2\sigma^{-3} - k\sigma^{-1}\right) = 0$$

必有
$$\sum_{i=1}^{k}\delta_i^2\sigma^{-3} - k\sigma^{-1} = 0$$

两边乘 $\sigma^3$ 可得

$$\sigma^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\delta_i^2$$

亦即
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}\delta_i^2}{k}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(N_i - N_0)^2}{k}}$$

$$\sigma_{\overline{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(N_i - \overline{N})^2}{k(k-1)}} \tag{1-5-12}$$

式(1-5-12)也说明，算术平均值 $\overline{N}$ 的随机误差比测量列的随机误差小 $\sqrt{k}$ 倍。

3. 两种计算方法的意义和换算关系

(1)意义：平均误差 $\theta$ 和标准误差 $\sigma$ 具有同样的意义，都是表征测量列精密度高低的物理量。$\theta$ 和 $\sigma$ 越小，测量列中各次测量值 $N_i$ 对于算术平均值 $\overline{N}$ 的离散程度就越小，测量的可靠性就越大，精密度越高，对应的随机误差分布曲线高而陡，数据集中，如图 1.5-2 所示。反之，测量精密度低，随机误差分布曲线低而平坦，数据分散。

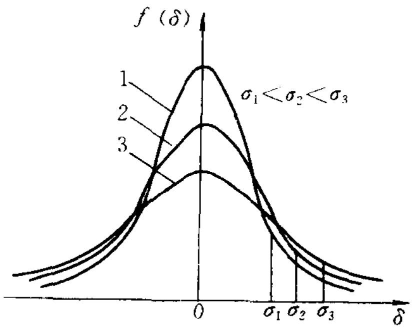


图 1.5-2

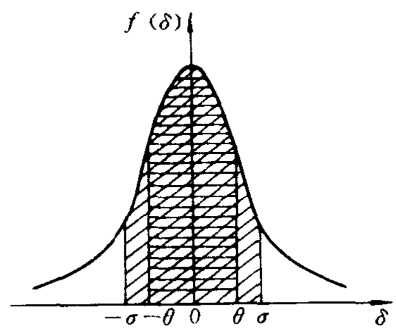


图 1.5-3

平均误差 $\theta$ 和标准误差 $\sigma$ 的区别在于它们对同一测量列的测量精度进行衡量时，采用的衡量尺度(方法)不同。由

$$P = \int_{-\theta}^{+\theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} d\delta \approx 0.575 = 57.5\%$$

$$P = \int_{-\sigma}^{+\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} d\delta \approx 0.683 = 68.3\%$$

可知，$\theta$ 表示出了测量列中误差在 $-\theta$ 至 $+\theta$ 之间的测量值出现的概率为 57.5%，即如图 1.5-3 所示横线标出的面积占曲线下总面积的比例。$\sigma$ 表示出了测量列中误差在 $-\sigma$ 至 $+\sigma$ 之间的测量值出现的概率为 68.3%，即如图 1.5-3 所示斜线标出的面积占曲线下总面积的比例。

从几何意义上讲，$\theta$ 值为正态分布曲线右半部面积重心 $A$ 的横坐标，$\sigma$ 值为正态分布曲线上拐点 $B$ 的横坐标，如图 1.5-4 所示。

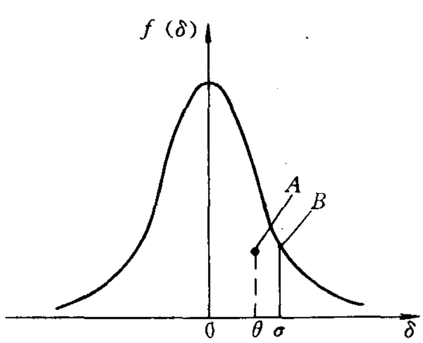


图 1.5-4

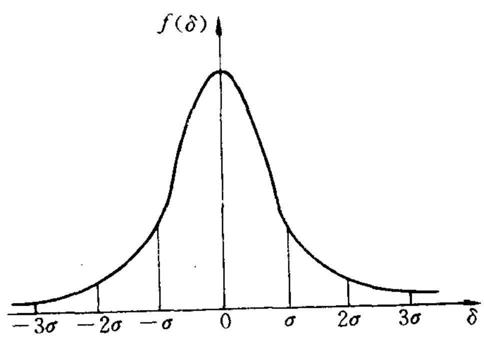


图 1.5-5

综上所述，真值在 $\overline{N}\pm\sigma$ 之间的概率高于在 $\overline{N}\pm\theta$ 之间的概率，标准误差 $\sigma$ 的可信赖程度