量子电动力学

北京师范大学出版社

量子电动力学

S. N. 古普塔　著

史天一　孙　岳　刘在祥　译

喀兴林　校

北京师范大学出版社

1981.3

原文书名：

Quantum Electrodynamics

Suraj N. Gupta

Gordon and Breach Science Publishers

1977

ISBN 0-677-04240-X

前　　言

虽然我们对基本粒子物理学的完全认识仍然是一个诱人的而又捉摸不透的努力目标，可是在量子电动力学方面的很多东西却可以认为是已完全确立了的。在探索基本粒子相互作用方面，量子电动力学的广泛知识对理论和实验物理学家来说都是必不可少的。在本书中，我对基本理论，计算技巧，以及量子电动力学的重要应用作了简洁而系统的介绍。对数学推演作了足够详细的解释，而且对许多公式的推导给出了不寻常的简化形式。

为了弄清基本思想，对量子场论的基本原理进行了充分讨论，而对其理论结构采用了较为普遍的形式，使它也能在相当大的程度上适用于强相互作用，弱相互作用和重力相互作用。

本书基本上是自足的，但读者应具有研究生一年级水平的标准量子力学课程的预备知识。我已经作了特殊的努力来保证本书既对研究人员，又对学生们都是有用的和可以获益的。

衷心感谢 S·霍夫曼在准备本书手稿中的秘书作用。

S.N. 古普塔

目　录

第一章　经典场论

众所周知，经典力学仅能解释一些有限的实验结果，而更多的精密实验已经显示出对量子力学的需要。虽然经典理论没有为我们提供对自然界完善的描述，但它仍是一个自洽的理论。经典理论和量子理论相比，它比较简单而且为人们所熟悉，而且在它本身的适用范围内可以解释所观察到的现象。此外，我们常常从经典理论导出量子理论的公式。因此，熟悉经典电磁场和经典场论的某些一般原理是有用的。

1. 张量和洛伦兹变换

我们首先说明本书中所采用的张量表示法。一个四维矢量表示为 A_μ，而一个二阶张量表示为 $\mathbf{A}_{\mu\nu}$，其中希腊指标取值永远为 1、2、3、4。特别是，一个点的四维坐标表示为 x_μ，其中 x_1、x_2 和 x_3 是空间坐标，而 $x_4=ict$。任何四维矢量 A_μ 的空间分量表示为 A_i 或 $\vec{A}$，其中拉丁指标的取值永远为 1、2、3。重复的拉丁或希腊指标，意味着对该指标的所有值取和。我们将经常直接用指标 0 来代替 4，这两个指标之间的联系是

$$A_4=iA_0,\quad A_{i4}=iA_{i0},\quad A_{4i}=iA_{0i},\quad A_{44}=i^2A_{00}=-A_{00},\tag{1.1}$$

但必须注意，我们将把 $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$ 表示为 ∂_μ，把 $\dfrac{\partial}{\partial x_0}$ 表示为 ∂_0，因而 $\partial_4=-i\partial_0$。为了方便起见有时我们略掉四维矢量指标，将 A_μ 表示为 A，将 $A_\mu B_\mu$ 表示为 $A\cdot B$，将 A_μ^2 表示为 A^2，而将 ∂_μ^2 表示为 ∂^2。我们也把 $dx_1dx_2dx_3$ 表示为 $d\mathbf{x}$，而 $dx_1dx_2dx_3dx_0$

表示为 dx。

若 A_i 和 A_0 是实数，我们就称一个四维矢量 A_μ 为实矢量，同样，若 A_{ik}、A_{i0}、A_{0i} 和 A_{00} 都是实数，则称张量 $A_{\mu\nu}$ 为实张量。在涉及张量的复共轭时要予以特别注意。我们将始终用星号来表示任意非张量的量的复共轭。我们也用星号来表示带有指标 1、2、3、0 的任何张量分量的复共轭，但是若指标 4 在一个张量分量中出现几次，那么星号就表示 $(-1)^n$ 乘以这个分量的复共轭。这样，关系式 $A_4=iA_0$ 的复共轭就是

$$-A_4^*=-iA_0^*$$

或

$$A_4^*=iA_0^*, \tag{1.2}$$

同样

$$A_{i4}^*=iA_{i0}^*, \quad A_{4i}^*=iA_{0i}^*, \quad A_{44}^*=-A_{00}^*. \tag{1.3}$$

若 A_μ 和 $A_{\mu\nu}$ 是实的，则由此得到

$$A_\mu^*=A_\mu, \quad A_{\mu\nu}^*=A_{\mu\nu}. \tag{1.4}$$

保持量 x_μ^2 为不变量的空时坐标 x_μ 的任何线性变换称为洛伦兹变换，这样的一个变换可以表示为

$$x'_\mu=a_{\mu\nu}x_\nu \tag{1.5}$$

其中

$$a_{\mu\lambda}a_{\nu\lambda}=a_{\lambda\mu}a_{\lambda\nu}=\delta_{\mu\nu}. \tag{1.6}$$

所有洛伦兹变换由下述三个变换中的一个或几个组成：(1)正常洛伦兹变换，(2)空间反演，(3)时间反转。一个正常洛伦兹变换对应于空时轴的一个连续转动。空间反演是

$$x'_i=-x_i, \quad x'_4=x_4, \tag{1.7}$$

而时间反转是

$$x'_i=x_i \quad x'_4=-x_4. \tag{1.8}$$

空间反演也就是通常所说的宇称操作，按照一个量在空间反演下保持不变或者经受一次符号改变而称这一量具有偶宇称或奇宇称。

我们考虑相应于空时轴的一个无限小转动的洛伦兹变换，在这样一个变换下

$$x'_{\mu} = x_{\mu} + \omega_{\mu\nu} x_{\nu}, \tag{1.9}$$

其中 $\omega_{\mu\nu}$ 是无限小量，所以

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu},$$

将此式代入（1.6）式中，得出

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \tag{1.10}$$

注意下述关系也是有用的

$$\partial\omega_{\mu\nu}/\partial\omega_{\alpha\beta} = \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}. \tag{1.11}$$

任何正常洛伦兹变换都可以从由（1.9）和（1.10）式给出的较简单的无限小变换组成。

2. 经典电动力学定律

经典电动力学讨论电磁场和带电物体之间的相互作用。电磁场是由作为空间和时间函数的电场强度 $\mathbf{E}$ 和磁场强度 $\mathbf{H}$ 来描述的。另一方面，带电物体在场中产生电荷密度 ρ 和电流密度 $\rho\mathbf{v}$，其中 $\mathbf{v}$ 为电荷的速度。电磁场对于电荷存在的依赖关系是由麦克斯韦方程组给出的

$$\nabla\times\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\rho\mathbf{v}, \tag{2.1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho, \tag{2.2}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = 0, \tag{2.3}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{H} = 0, \tag{2.4}$$

而电荷所受电磁场的力是由洛伦兹方程给出

$$\mathbf{K} = \rho\mathbf{E} + \frac{\rho}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}), \tag{2.5}$$

其中 $\mathbf{K}$ 表示电磁场施加在电荷上的力密度。

若我们按照下式把 $\rho\mathbf{v}$ 和 $c\rho$ 当作一个四维矢量 j_{μ} 的分量，

把 E 和 H 当作一个反对称张量 $F_{\mu\nu}$ 的分量：

$$(j_1, j_2, j_3) = \rho \mathbf{v}, \quad j_4 = ic\rho, \tag{2.6}$$

$$(F_{23}, F_{31}, F_{12}) = \mathbf{H}, \quad (F_{41}, F_{42}, F_{43}) = i\mathbf{E}. \tag{2.7}$$

那么上述（2.1）—（2.5）各式就可以表示成协变的形式，我们可将（2.1）和（2.2）式表示为

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \frac{1}{c} j_\mu, \tag{2.8}$$

（2.3）和（2.4）式可表示为

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0. \tag{2.9}$$

同样可以把（2.5）式写成协变形式

$$K_\mu = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} j_\nu, \tag{2.10}$$

其中 K_μ 的空间分量相应于 K。为了阐明 K_μ 时间分量的意义，我们注意到，按照（2.10），（2.6）和（2.7）式

$$K_0 = \frac{1}{c} F_{0i} j_i = \frac{\rho}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}),$$

利用（2.5）式，由上式可以得到

$$K_0 = \frac{1}{c} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}) = \frac{w}{c}, \tag{2.11}$$

其中 $w = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}$ 表示电磁场对于单位体积内的电荷所完成的功率。

将（2.8）式对 x_μ 微分，得

$$\partial_\mu \partial_\nu F_{\mu\nu} = \frac{1}{c} \partial_\mu j_\mu.$$

因为 $F_{\mu\nu}$ 是反对称的，上式左边为零，因此得

$$\partial_\mu j_\mu = 0, \tag{2.12}$$

此式表示电荷守恒。

3. 电磁能量动量张量

使用场方程（2.8）和（2.9）二式以及 $F_{\mu\nu}$ 是反对称的这一事实，可以将力密度(2.10)表示为一个张量的四维散度。因为，按照（2.8）和（2.10）式，有

$$K_\mu = F_{\mu\nu}\partial_\rho F_{\nu\rho} = \partial_\rho(F_{\mu\nu}F_{\nu\rho}) - F_{\nu\rho}\partial_\rho F_{\mu\nu}, \tag{3.1}$$

再将（2.9）式乘以 $F_{\nu\rho}$，得

$$F_{\nu\rho}\partial_\rho F_{\mu\nu} + F_{\nu\rho}\partial_\nu F_{\rho\mu} + F_{\nu\rho}\partial_\mu F_{\nu\rho} = 0 \tag{3.2}$$

在（3.2）式的第二项中交换指标 ν 和 ρ

$$2F_{\nu\rho}\partial_\rho F_{\mu\nu} + F_{\nu\rho}\partial_\mu F_{\nu\rho} = 0,$$

所以

$$F_{\nu\rho}\partial_\rho F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}F_{\nu\rho}\partial_\mu F_{\nu\rho} = -\frac{1}{4}\partial_\mu F^2_{\nu\rho}, \tag{3.3}$$

于是从（3.1）和（3.3）式就可得到

$$K_\mu = \partial_\rho(F_{\mu\nu}F_{\nu\rho}) + \frac{1}{4}\partial_\mu(F^2_{\nu\rho}),$$

上式可以写成这样的形式

$$K_\mu = -\partial_\nu T_{\mu\nu} \tag{3.4}$$

其中

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_{\nu\rho} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F^2_{\lambda\rho}. \tag{3.5}$$

对称张量 $T_{\mu\nu}$ 称做电磁场的能量动量张量。

为了解释 $T_{\mu\nu}$ 各个分量的物理意义，我们将（3.4）式改写为

$$K_\mu = -\partial_i T_{\mu i} - \frac{1}{c}\frac{\partial T_{\mu 0}}{\partial t},$$

将此式对以 S 为界面的体积 V 进行积分，得

$$\int K_\mu d\mathbf{x} = -\int \partial_i T_{\mu i} d\mathbf{x} - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int T_{\mu 0} d\mathbf{x}.$$

上式右边第一项可以转换为面积分：

$$\int K_\mu d\mathbf{x} = -\int T_{\mu i} dS_i - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int T_{\mu 0} d\mathbf{x}, \tag{3.6}$$

其中 dS_i 是面元和面元外法线单位矢量的乘积。

我们再来考虑（3.6）式的时间分量，它由下式给出

$$\int K_0 d\mathbf{x} = -\int T_{0i} dS_i - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int T_{00} d\mathbf{x}$$

或者，考虑到（2.11）式，

$$-\frac{d}{dt}\int T_{00} d\mathbf{x} = \int c T_{0i} dS_i + \int w d\mathbf{x}. \tag{3.7}$$

如果我们将 $\int T_{00} \mathbf{dx}$ 看成体积 V 内的电磁场能量，而将 $\int cT_{0i}\, ds$ 看成每单位时间从 S 面流出的能量，那么上式就表示能量守恒定律。于是（3.7）式简明的含义就是体积 V 内每单位时间所减少的电磁场能量，等于单位时间内从该体积向外流出的能量，加上该体积内电磁场所作出的功率。这样一来，电磁场内的能量密度 H 就是

$$H = T_{00} = F_{0\rho} F_{0\rho} + \frac{1}{4} F_{\lambda\rho}^2, \tag{3.8}$$

而单位时间内通过单位面积沿任意方向流过的能量为

$$N_i = cT_{0i} = cF_{0\mu} F_{i\mu}, \tag{3.9}$$

矢量 N_i 称为波印廷矢量。借助于（2.7）式，这些结果也可以用电场强度和磁场强度来表示

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2), \quad \mathbf{N} = c(\mathbf{E}\times\mathbf{H}). \tag{3.10}$$

类似地，我们考虑（3.6）式的空间分量，它由下式给出

$$\int K_i\, d\mathbf{x} = -\int T_{ik} dS_k - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int T_{i0} d\mathbf{x}$$

或写成

$$-\frac{d}{dt}\int \frac{1}{c} T_{i0} d\mathbf{x} = \int T_{ik} dS_k + \int K_i d\mathbf{x}. \tag{3.11}$$

如果我们将 $\int (T_{i\nu}/c)\, \mathbf{dx}$ 看成体积 V 内电磁场动量，并且将 $\int T_{ik} dS_k$ 看成单位时间内从该体积流出的动量，则上式就表示

动量守恒定律。因而（3.11）式的意义就是体积V内每单位时间所减少的电磁场动量，等于单位时间从该体积流出的动量加上电磁场在该体积内所施出的作用力。由此得出，在电磁场内动量密度G_i是

$$G_i=\frac{1}{c}T_{i0}, \tag{3.12}$$

而在单位时间内，动量第i个分量沿x_k轴通过单位面积的流量是T_{ik}。值得注意的是，虽然力密度的洛伦兹方程是电动力学的一个基本方程，但是力密度的符号是由麦克斯韦方程组所确定的。因为如果我们改变（2.10）式右边的符号，相应的能量动量张量就要和（3.5）式差一个负号。这样，电磁场的能量密度也就要成为负值$-\frac{1}{2}(\mathbf{E}+\mathbf{H})^2$，这在物理上是不允许的。

4. 电磁势

为了以更简单形式来表述麦克斯韦方程组，我们令

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu, \tag{4.1}$$

其中四维矢量A_μ称为电磁势。因为张量$F_{\mu\nu}$是实张量，因此势A_μ也可以取为实的。将（4.1）式代入到（2.9）式中得到一个恒等式，因此我们现在可以不必再管（2.9）式了。将（4.1）式代入（2.8）式中则得到电磁势的场方程：

$$\partial_\mu\partial_\nu A_\nu-\partial^2 A_\mu=\frac{1}{c}j_\mu. \tag{4.2}$$

根据（4.1）式，A_μ并不能唯一地由电磁场张量$F_{\mu\nu}$确定。因为，在下述变换下$F_{\mu\nu}$仍然保持不变

$$A_\mu\to A_\mu+\partial_\mu\Lambda, \tag{4.3}$$

其中Λ为任意空时函数。电磁势的上述变换叫做规范变换。

规范变换可以用来简化场方程（4.2），为此，对于一给定的$F_{\mu\nu}$，令$\overline{A}_\mu$表示电磁势的一个可能值，现在我们考虑这样的一个函数Λ，使得

$$\partial^2\Lambda = -\partial_\mu \overline{A}_\mu.$$

因为大家知道从上述方程可以解出 Λ，因而我们总可以找到所需要的 Λ。如果现在我们进行一个规范变换，使新的电磁势由

$$A_\mu = \overline{A}_\mu + \partial_\mu \Lambda$$

给出。我们发现

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \tag{4.4}$$

因此，对于一个给定的电磁场，我们总可以按照使（4.4）得到满足的方式来选择电磁势。关系式（4.4）称为电磁势的附加条件，借助于这个条件，就可以把（4.2）式简化成非齐次波动方程

$$\partial^2 A_\mu = -\frac{1}{c} j_\mu. \tag{4.5}$$

即使应用了附加条件，电磁场也不能完全确定电磁势。因为，只要 Λ 满足波动方程

$$\partial^2\Lambda = 0, \tag{4.6}$$

那么在（4.3）式的变换下，（4.1）和（4.4）式仍能保持不变。由（4.3）和（4.6）式给出的电磁势变换关系表示一个局限的规范变换。

5. 辐射场

按照麦克斯韦方程组，电磁场依赖于场中电荷的存在。但是，即使电荷不存在，电磁场一般也不为零。因为这时（4.5）式仅是简化为一个齐次波动方程

$$\partial^2 A_\mu = 0 \tag{5.1}$$

（5.1）式的通解可以用形式为：

$$A_\mu = a_\mu\left[e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0 ct+\delta)} + e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0 ct+\delta)}\right] \tag{5.2}$$

的平面波叠加而得到.

其中

$$|\mathbf{k}| = k_0。 \tag{5.3}$$

(5.2)式表示以速度 c 沿矢量 $\mathbf{k}$ 方向传播的平面波。因为(5.2)式必须满足附加条件（4.4）式，由此得出

$$k_i a_i - k_0 a_0 = 0. \tag{5.4}$$

我们把 $\mathbf{A}$ 看作由一个沿 $\mathbf{k}$ 的纵向分量和两个垂直于 $\mathbf{k}$ 的横向分量所组成，而称 A_0 为 A_μ 的时间分量。为了研究这些不同分量的性质，选择空间轴的 x_3 轴沿 $\mathbf{k}$ 方向较为方便。这时，A_1、A_2 就是 A_μ 的横向分量，而 A_3 和 A_0 分别为其纵向分量和时间分量。由于这样选择坐标轴，就有

$$k_1 = k_2 = 0, \qquad k_3 = |\mathbf{k}| = k_0, \tag{5.5}$$

因而（5.2）式变为

$$A_\mu = a_\mu[e^{ik_0(x_3-ct)+i\delta} + e^{-ik_0(x_3-ct)-i\delta}] \tag{5.6}$$

附加条件（5.4）式取下列形式

$$a_3 - a_0 = 0. \tag{5.7}$$

应用（4.1）式，我们可以得到由电磁势（5.6）所形成的电磁场 $F_{\mu\nu}$，然后，利用（2.7）式，我们可以将电磁场不同的分量写出：

$$\begin{aligned} &H_1 = -k_0 a_2 f, \quad H_2 = k_0 a_1 f, \quad H_3 = 0, \\ &E_1 = k_0 a_1 f, \quad E_2 = k_0 a_2 f, \quad E_3 = k_0(a_3 - a_0)f = 0, \end{aligned} \tag{5.8}$$

其中

$$f = i[e^{ik_0(x_3-ct)+i\delta} - e^{-ik_0(x_3-ct)-i\delta}], \tag{5.9}$$

因为有附加条件（5.7），所以（5.8）中的 E_3 分量为零。这样，即使电荷不存在，电磁场也可以含有各种平面电磁波。将(5.8)式代入（3.10）式，可以看到这个平面电磁波具有能量。一个不包含任何电荷的电磁场称为纯电磁场或者辐射场。

按照（5.8）式，有

$$E_1H_1 + E_2H_2 + E_3H_3 = 0, \quad E_3 = H_3 = 0, \tag{5.10}$$

这表明，由平面电磁波形成的电场和磁场是互相垂直的，同时又

和波的传播方向垂直。通常取和这样一个电磁波的电场E相垂直的平面为它的极化平面。关系式(5.8)进一步说明，在一个辐射场中，电场强度和磁场强度仅依赖于电磁势的横向分量。因而，在辐射场中电磁势的纵向分量和时间分量不会引起任何物理效应。事实上，在一个辐射场中，对(5.6)式进行一个规范变换(4.3)，并取Λ为

$$\Lambda=\frac{ia_0}{k_0}[e^{ik_0(x_3-ct)+i\delta}-e^{-ik_0(x_3-ct)-i\delta}], \tag{5.11}$$

再应用(5.7)式，就可以把电磁势的纵向分量和时间分量消去。但是必须记住，在电荷存在时，电磁场的纵向分量和时间分量是不能忽略的。

6. 经典场的变分原理

在前面各节中，我们已经对经典电磁场给予简要的叙述，现在我们描述经典场论中的一些普遍原理。

在经典物理中，一个场是用一个或多个满足某些偏微分方程的空时函数来描述的，这些偏微分方程叫做场方程。一般相信那些物理上感兴趣的场只能是由那样一些场方程所描写，这种场方程可以利用哈密顿变分原理按下述方式得到。

令L是一个洛伦兹不变的函数，它是任意数量线性独立的场变量$u^{(1)}$，$u^{(2)}$，$\cdots u^{(n)}$以及这些场变量的一阶空间和时间导数的函数，即：

$$L=L(u^{(r)},\partial_\mu u^{(r)}), \tag{6.1}$$

这里r取值为$1,2,\cdots n$，进而，我们将L对任意体积V和任意时间间隔t_1到t_2的积分表示为

$$I=\int_{t_1}^{t_2}dt\int_V d\mathrm{x}L, \tag{6.2}$$

而且假定，只要$u^{(r)}$在积分域内的边界上的变分为零，则对于$u^{(r)}$的任意无限小变分，上述积分保持不变，即对于任意无限小