经济应用数学基础

微积分

何嗣玫 姚唐生 张秋之 黎锦志 编

科学出版社

经济应用数学基础

微　积　分

何嗣玫　姚唐生
张秋之　黎锦志　编

科　学　出　版　社

1 9 9 4

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书是成人高等学校“经济应用数学基础”课程的教材之一.

本书主要介绍微积分的基本概念、方法及应用. 本书在保证数学学科的系统性和严密性的前提下，内容选取适度，重点突出，密切联系经济实际；论述深入浅出，通俗易懂，每章末备有习题，书后附习题答案，有助于读者进一步掌握书中的概念和方法.

本书可作为成人高等学校财经类专业的教学用书，也可供财经专业高等教育自学考试的辅导教师及学生参考.

经济应用数学基础
微 积 分
何嗣玫 姚唐生
张秋之 龚锦志 编
责任编辑 吕 虹
科 学 出 版 社 出 版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
香河县第二印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1993 年 3 月第 一 版 开本：787×1092 1/32
1994 年 10 月第二次印刷 印张：7 1/4
印数：5001—7018 字数：156 000
ISBN 7-03-003256-X/O · 588
定价：7.80元

出 版 说 明

为了适应成人高等学校财经类各专业数学教学之需要，由北京市第一轻工业总公司职工大学、北京市西城区职工大学、北京市电子仪表局职工大学、北京市化学工业局职工大学、北京市汽车工业总公司职工大学、北京市海淀区职工大学等六所高校的部分教师在总结多年教学经验的基础上，编写了这套《经济应用数学基础》.

这套教材包括《微积分》、《线性代数与线性规划》、《概率论与数理统计》三分册. 编写过程中，在保证数学学科的系统性和严密性的前提下，充分考虑到成人学员的特点，力求选材深浅适度，结构安排合理，密切联系经济实际；论述简明扼要，通俗易懂；每章后附有适量的习题，并在书后给出习题答案. 这套教材可供职工大学、管理干部学院、财经类专科院校选作试用教材或教学参考书，也可作为有关专业的干部专修科或短训班的教学用书，对参加财经类各专业高等教育自学考试的学员也有一定的参考价值.

这套教材是由何嗣玫、金桂堂、葛炎午主持编写的，其中《微积分》由何嗣玫整理，《线性代数与线性规划》由金桂堂整理，《概率论与数理统计》由葛炎午整理.

北京大学经济系范培华副教授，中国人民大学经济信息系龚德恩副教授、胡显佑副教授分别承担了这三册书的审稿工作，对于他们的热情帮助与大力支持，谨表衷心的感谢.

由于我们水平有限，错误和不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

《经济应用数学基础》编写组

1991年12月

目　　录

第一章 函 数

本章从实数讲起，并从变量间依赖关系的角度给出函数的一般定义，并结合图形对函数的一些简单性质作初步的研究。

§1.1 实 数

一、实数与数轴

1. 实数集的构成。

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left.\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\\text{无理数——无限不循环小数}\end{cases}$$

2. 数轴。

数轴是规定了原点、方向和长度单位的直线，如图 1.1 所示. 数轴上的每一个点都有一个唯一确定的实数与之对应；对任一实数，数轴上也有一个唯一确定的点与之对应。这样，实数集合中的全体实数与数轴上的全部点就形成了一一对应关系。所以常常以数轴上的点来代表实数，而且由数轴上点的性质不难理解实数集合具有以下性质。

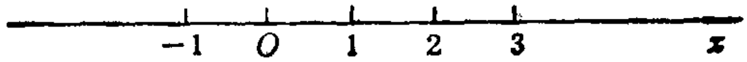

图 1.1

(1) 有序性：任意两个实数 a 和 b 必符合而且只能符合 $a>b$，$a=b$ 或 $a<b$ 三个关系中的一个，即实数可以比较大小。

(2) 稠密性：任意两个不相等的实数之间总有无穷多个实数存在。

(3) 连续性：实数在数轴的分布是连续的，没有空隙，即不间断。

(4) 封闭性：实数对于加、减、乘、除四则运算(除数不为0)是封闭的，即两个实数加、减、乘、除的结果仍为实数。

二、绝对值

定义. 一个实数 x 的绝对值，记为 $|x|$，定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

$|x|$ 的几何定义表示：实数 x 在数轴上的对应点与原点间的距离.实际上，$|x|=|x-0|$。类似地，$|x-a|$ 为点 x 与点 a 间的距离。

若 $b>0$，则

$$|x|\leqslant b \text{ 等价于 } -b\leqslant x\leqslant b$$

$$|x|>b \text{ 等价于 } x>b \text{ 或 } x<-b$$

三、区间

设实数 $a<b$，

1. 满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合称为以

a,b 为端点的开区间，记作 (a,b)，如图 1.2(a)。

2. 满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a,b 为端点的闭区间，记作 $[a,b]$，如图 1.2(b)。

3. 满足不等式 $a < x \leqslant b$ 和 $a \leqslant x < b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a,b 为端点的半开半闭区间，记作 $(a,b]$ 和 $[a,b)$，如图 1.2(c) 和 1.2(d)。

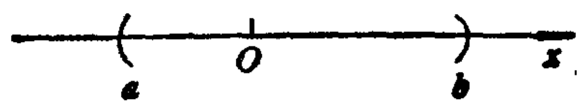

图 1.2(a)

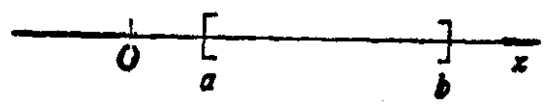

图 1.2(b)

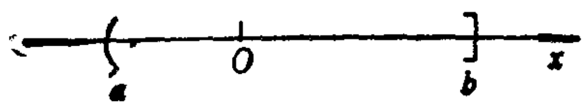

图 1.2(c)

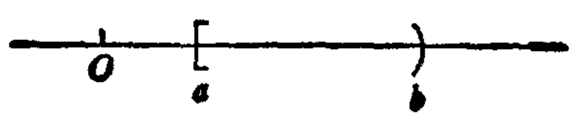

图 1.2(d)

显然，开区间不包括端点，闭区间包括端点。a 称为左端点，b 称为右端点。以上为有限区间，右端点与左端点之差 $b-a$ 为区间的长度。

4. 满足不等式 $x > a$ 和 $x \geqslant a$ 的所有实数 x 的集合分别记作 $(a,+\infty)$ 和 $[a,+\infty)$。

5. 满足不等式 $x < b$ 和 $x \leqslant b$ 的所有实数 x 的集合分别记作 $(-\infty, b)$ 和 $(-\infty, b]$.

6. 满足不等式 $-\infty < x < +\infty$ 的所有实数 x 的集合就是实数集 R，记作 $(-\infty, +\infty)$.

四、邻域

设有实数 x_0 和 $\delta > 0$，则区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，x_0 称为邻域的中心，δ 为邻域的半径. 易知，邻域的长度为 2δ，若点 x 在邻域内，则 $|x - x_0| < \delta$.

§1.2 函 数

一、常量与变量

考查具有不同物理意义或经济意义的量的变化状态，一般可分为常量与变量. 在某个研究过程中，一个固定数值的量称为常量；一系列不同数值的量称为变量. 习惯上常以字母 $a, b, c, \cdots$ 表示常量；以 $x, y, z, \cdots$ 表示变量. 显然，常量在数轴上的对应点是个定点，而变量的对应点是动点.

应该指出，常量与变量的概念是相对于某个具体研究过程而言的. 比如，在飞机的飞行过程中，时间 t 是变量，飞行里程 S 和贮油量 Q 都是随时间而变的变量，乘客人数 N 为常量；而在乘客登机过程中，S 和 Q 为常量，N 为变量.

二、函数

变量的变化不是孤立的，彼此间总存在着某种相互依赖关系所形成的变化规律. 比如：

例 1. 圆的面积 S 与半径 R 之间的关系可用等式 $S=$

πR^2 表示，S 随 R 变而变，在$(0,+\infty)$范围内，R 每取一个值，S 就有一个确定的值与之对应，如当 $R=2\text{cm}$ 时，就有 $S=4\pi\text{cm}^2$，$R=3\text{cm}$ 时，$S=9\pi\text{cm}^2$ 等等。

例 2. 某厂去年的产值列表如下：

表 1.1

t(月)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Q(万元)	105	110	108	110	115	118	120	115	121	125	130	135

变量 t 在集合$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$中每取一个值，产值 Q 就有一个确定的值与之对应。

例 3. 气象台的自记温度计能将一天里的每一时刻的气温自动地记录下来。如某日的记录如图 1.3 所示。

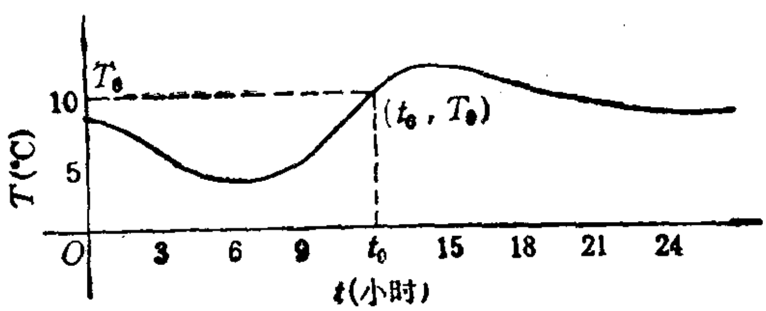

图 1.3

对于 24 小时内的任一时刻 t，都有一个唯一确定的温度 T 与之对应。

综合以上三例，每个例题都包含有两个变量以及它们间的对应关系，即当一个变量在某个范围内取值时，根据某种对应关系，另一变量就有一个唯一确定的值与之对应。两个变量间的这种对应关系就是函数关系。

定义. 设有两个变量 x 和 y，x 的取值范围为 D。若对

于D中的每一个x值，按照某种确定的规律，变量y总有一个唯一确定的值与之对应，则称变量y是变量x的函数。记作$y=f(x)$，$x\in D$。x称为自变量，D称为函数的定义域；y又称为因变量，y的取值范围称为函数的值域。

构成函数的两个基本要素是函数关系和定义域，只有在函数关系和定义域都相同时，两个函数才相同。比如：函数$y=\ln x^2$，$D:(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 与函数 $y=2\ln x$，$D:(0,+\infty)$ 由于定义域不同而函数不同。

同时研究几个函数时，须使用不同的记号，如 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$，$\cdots$，或 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$ 等。

$y=C$（C 为常数）也符合函数定义，即对于自变量x的每一个值，因变量y的唯一确定的值都是C。

三、函数关系的表示法

1. 解析法。

用数学式子表示自变量与因变量的关系称为解析法，该式称为解析式。如上述的例 1，$S=f(R)=\pi R^2\quad R\geqslant 0$。

值得注意的是有的函数关系在定义域的不同部分要用不同的解析法表示，这种函数称为分段函数。另外，也有的函数关系难以用解析式表示。

2. 列表法。

将自变量所取的一系列数值及其对应函数值排列成表来表示函数关系称为列表法。如上述例 2。常用的三角函数表，对数表等都是列表法表示函数的例子。

3. 图象法。

用一条平面曲线表示函数关系的方法是图象法。曲线称作函数的图象，是以自变量为横坐标因变量为纵坐标的点

$(x,f(x))$ 的集合。如上述例3。

在实际研究过程中，常根据需要选择使用或综合使用以上三种方法。

四、函数的定义域

确定函数的定义域就是确定自变量的取值范围。对于用解析式表示的函数，就是确定使解析式中所有的运算全都有意义的自变量的值。有以下几种情形：

1. 以下函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$。

多项式函数 $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，奇次根式 $\sqrt[2n+1]{p(x)}$ $(n\in N)$，指数函数 $a^x(a>0, a\neq 1)$，正弦函数 $\sin x$，余弦函数 $\cos x$，反正切函数 $\operatorname{arctg}x$，反余切函数 $\operatorname{arcctg}x$。

2. 分式函数 $\dfrac{1}{p(x)}$ 的定义域是使分母 $p(x)\neq 0$ 的全体实数。

如：$y=\dfrac{5x}{x^2-x-2}$定义域为使 $x^2-x-2\neq 0$，即 $x\neq 2$ 且 $x\neq -1$ 的全体实数，或

$$D=(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$$

3. 偶次根式 $\sqrt[2n]{p(x)}$ $(n\in N)$，定义域是使被开方式 $p(x)\geqslant 0$ 的全体实数。

如：$y=\sqrt{2+x-x^2}$ 定义域是使 $2+x-x^2\geqslant 0$，即满足 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 的全体实数，或 $D=[-1,2]$。

4. 对数函数 $\log_a p(x)$ $(a>0, a\neq 1)$，定义域是使真数 $p(x)>0$ 的全体实数。

如：$y = \log_2(3x-1)$ 定义域是使 $3x-1>0$，即满足 $x>\frac{1}{3}$ 的全体实数，$D=\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$.

5. 反正弦函数 $\arcsin p(x)$ 和反余弦函数 $\arccos p(x)$，定义域是使 $|p(x)| \leqslant 1$ 的全体实数.

如：$y=\arcsin\frac{x-3}{4}$ 定义域是满足 $\left|\frac{x-3}{4}\right| \leqslant 1$，即 $-1\leqslant \frac{x-3}{4} \leqslant 1$，亦即 $-1\leqslant x \leqslant 7$ 的全体实数，$D=[-1,7]$.

如果函数式中含有以上几种情形，那么函数的定义域则为每种情形所确定的集合的交集，在确定交集时要注意利用数轴。

例 4. 确定 $y=\sqrt{9-x^2}+\frac{\lg(2-x)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域。

解. 解条件组

$$\begin{cases}9-x^2\geqslant 0\\2-x>0\\x-1>0\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 3\\x<2\\x>1\end{cases}$$

则 $D=(1,2)$.

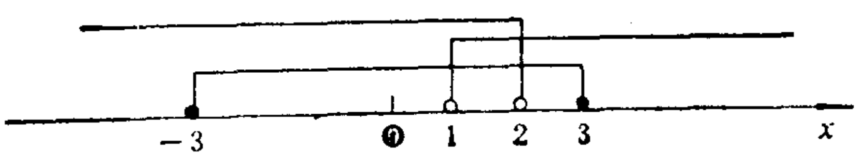

图 1.4

此外，对于具有实际意义的函数，在确定定义域时要注意实际问题的要求。如某商店茶杯的存货共 1000 只，每只售价

为 0.50 元，设 x 为售出的茶杯数量(只)，y 为收入的茶杯售货款(元)，则有函数 $y = 0.50x$，

$$D = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1000,\ \text{且}\ x \in Z\ (\text{整数集})\}$$
$$= \{x \mid x = 0,1,2,\cdots,1000\}$$

五、函数值

给定函数 $y = f(x)$，将自变量的值 $x = x_0$ 代入解析式，即以 x_0 替换式中的 x，就得到函数值 $f(x_0)$，也可记作 y_0 或 $y|_{x=x_0}$，$f(x_0)$ 有意义时，称 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 有定义；$f(x_0)$ 不存在，称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 无定义.

例 5. $y = x^2 + 3x - 1$，求 $f(0), f(x_0), f(x_0 + 1)$.

解.

$$f(0) = 0^2 + 3 \times 0 - 1 = -1$$

$$f(x_0) = x_0^2 + 3x_0 - 1$$

$$f(x_0 + 1) = (x_0 + 1)^2 + 3(x_0 + 1) - 1$$

$$= x_0^2 + 5x_0 + 3$$

例 6. 若 $f(x) = 2^x$，求 $f(-x), -f(x), f\left(\dfrac{1}{x}\right), \dfrac{1}{f(x)}$，$f(x^2), f^2(x)$.

解.

$$f(-x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x},\quad -f(x) = -2^x$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 2^{\frac{1}{x}},\quad \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2^x}$$

$$f(x^2) = 2^{x^2},\quad f^2(x) = (2^x)^2 = 2^{2x} = 4^x$$