

杆系结构理论

朱宝华 编著



同济大学出版社

前 言

本书是编者多年教学实践的总结。书中自始至终抓住虚动原理这条纲，用于阐明杆系结构的理论和分析方法。

编写本书的目的是想帮助学习结构力学课程的读者对课程的重要内容有一个系统的、由浅入深的了解。书中附有必要数量的例题，用以说明解题步骤和引用原理对问题进行具体分析，因而对读者自学能起到指导作用。

书中对空间杆系结构作了较为详细的讨论，这是有别于其他杆系结构教材的特点。

本书全部图稿均由上海城建学院工程制图教研室周乐老师绘制。

限于编者水平，书中难免有不妥之处，希望读者给予批评指正。

编 者

1993 年 2 月

(沪)新登字204号

内 容 提 要

全书共有十三章及两个附录。内容包括：平面杆系结构及空间杆系结构的几何组成分析；静定杆系结构的内力分析；静定平面杆系结构的影响线及其应用；刚体及变形体的虚功原理；总势能驻值原理余能及其偏导数；平面及空间杆系结构的线弹性位移计算；余能驻值原理和力法解超静定平面和空间杆系结构；势能驻值原理和位移法解超静定平面和空间杆系结构；力矩分配法及剪力分配法；平面杆系结构及空间杆系结构矩阵位移法；平面杆系结构的极限荷载；平面杆系结构的稳定性；平面杆系结构的动力计算。

本书可作为土建类专业“结构力学”课程的参考教材，也可供土建工程技术人员参考。

责任编辑 吴永生
封面设计 王肖生

杆 系 结 构 理 论

朱宝华 编 著

同济大学出版社出版

(上海四平路 1239 号)

新华书店上海发行所发行

浙江上虞科技外文印刷厂排版

江苏启东市印刷三厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 31 字数 744千字

1993年5月第1版

1993年5月第1次印刷

印数 1—2000

定价 32.00元

ISBN7-5608-1074-8/TU·119

目 录

前 言

第一章 绪论

- § 1-1 杆系结构理论的内容 (1)
- § 1-2 杆系结构理论在教学计划中的地位 (1)
- § 1-3 杆系结构的研究 (1)

第二章 杆系结构的静定性

- § 2-1 平面杆系结构的几何组成分析 (3)
- § 2-2 空间杆系结构的几何组成分析 (10)
- § 2-3 静定杆系结构的特性 (15)

第三章 杆系静定结构的内力分析

- § 3-1 结构荷载 (18)
- § 3-2 叠加原理在杆系静定结构中的应用 (18)
- § 3-3 杆系结构的分类 (20)
- § 3-4 杆系静定结构中直线杆件的内力分析 (22)
- § 3-5 多跨静定梁的内力和反力计算 (29)
- § 3-6 静定平面刚架的内力和反力计算 (33)
- § 3-7 静定三铰拱的反力和内力计算 (40)
- § 3-8 静定平面梁式桁架的分析 (48)
- § 3-9 几类梁式平面桁架外形的比较 (55)
- § 3-10 静定拱式桁架及组合结构的计算 (58)
- § 3-11 静定空间桁架的分析 (64)
- § 3-12 静定空间刚架的分析 (72)

第四章 杆系静定平面结构的影响线

- § 4-1 影响线的概念 (75)
- § 4-2 简支梁的影响线 (75)
- § 4-3 伸臂梁的影响线 (77)
- § 4-4 多跨静定梁的影响线 (80)
- § 4-5 节点荷载时的影响线 (81)
- § 4-6 静定平面桁架的影响线 (82)
- § 4-7 静定三铰拱的影响线 (85)
- § 4-8 影响线的应用 (86)
- § 4-9 简支梁的绝对最大弯矩 (91)
- § 4-10 简支梁的内力包络图 (93)

第五章 功能原理

- § 5-1 荷载和位移的关系 (96)
- § 5-2 线性弹性结构的实功 (98)

§ 5-3	刚体的虚功原理	(105)
§ 5-4	变形体的虚功原理	(110)
§ 5-5	线性弹性结构的几个互等定理	(113)
§ 5-6	总势能驻值原理	(115)
§ 5-7	余能及其偏导数	(118)
第六章 线性弹性结构的位移计算		
§ 6-1	位移计算概念	(122)
§ 6-2	应用虚单位力计算结构位移	(123)
§ 6-3	荷载作用下的位移计算	(125)
§ 6-4	图乘法	(133)
§ 6-5	温度改变下的位移计算	(138)
§ 6-6	支座移动下的位移计算	(140)
§ 6-7	位移影响线	(141)
第七章 力法		
§ 7-1	力法的基本概念	(143)
§ 7-2	力法解超静定梁	(147)
§ 7-3	余能驻值原理和力法	(154)
§ 7-4	力法解超静定平面刚架	(156)
§ 7-5	对称性利用	(160)
§ 7-6	力法解超静定组合结构	(168)
§ 7-7	超静定拱的计算	(171)
§ 7-8	超静定空间结构的计算	(179)
§ 7-9	超静定结构受温度改变及支座移动影响的计算	(185)
§ 7-10	超静定结构的位移计算	(191)
§ 7-11	超静定结构计算的校核	(192)
§ 7-12	超静定结构的特性	(193)
第八章 位移法		
§ 8-1	位移法的基本概念	(194)
§ 8-2	等截面杆件的载常数和形常数	(198)
§ 8-3	势能驻值原理和位移法	(202)
§ 8-4	连续梁及简单刚架的计算	(205)
§ 8-5	等截面杆的转角位移方程	(210)
§ 8-6	对称结构的计算	(217)
§ 8-7	温度改变和支座移动下的计算	(219)
§ 8-8	混合法和混合能原理	(222)
§ 8-9	变截面杆件的形常数和载常数	(226)
§ 8-10	空间刚架的计算	(231)
第九章 渐近法		
§ 9-1	力矩分配法的基本概念	(235)

§ 9-2	力矩分配法解连续梁及无节点线位移的刚架	(237)
§ 9-3	剪力分配法的基本概念	(242)
§ 9-4	对称性的利用	(248)
§ 9-5	用渐近法分析温度改变及支座移动的影响	(250)
§ 9-6	力矩分配和剪力分配的交替应用	(254)
§ 9-7	静力法绘连续梁的影响线	(261)
§ 9-8	连续梁的内力包络图	(267)
第十章 结构矩阵位移法		
§ 10-1	概述	(279)
§ 10-2	基本原理	(279)
§ 10-3	两端刚接的平面自由单元的分析	(290)
§ 10-4	连续梁及平面刚架的分析	(299)
§ 10-5	空间结构的分析	(317)
§ 10-6	子结构的应用	(333)
第十一章 结构的极限荷载		
§ 11-1	概述	(342)
§ 11-2	静定梁的弹塑性分析	(345)
§ 11-3	单跨超静定梁的极限荷载	(353)
§ 11-4	比例加载情况下极限荷载的定理	(356)
§ 11-5	连续梁的极限荷载	(360)
§ 11-6	刚架的极限荷载	(363)
§ 11-7	轴力和剪力对极限弯矩的影响	(372)
第十二章 杆系结构的稳定性		
§ 12-1	稳定性的概念	(375)
§ 12-2	单自由度杆系的稳定性	(375)
§ 12-3	双自由度杆系的稳定性	(376)
§ 12-4	弹性等截面直杆的稳定性	(378)
§ 12-5	弹性等截面直杆偏心受压的稳定性	(381)
§ 12-6	具有弹性支承的弹性等截面直杆的稳定性	(383)
§ 12-7	变截面直杆的稳定性	(387)
§ 12-8	剪力对临界力的影响	(394)
§ 12-9	组合压杆的稳定性	(395)
§ 12-10	等截面直杆考虑轴力影响的转角位移方程	(398)
§ 12-11	用位移法求临界力	(403)
§ 12-12	刚架的临界力	(405)
§ 12-13	薄片梁的平面弯曲稳定性	(413)
§ 12-14	柱子在弹塑性阶段的稳定性	(417)
第十三章 杆系结构的动力计算		
§ 13-1	概述	(421)

§ 13-2 单自由度结构的自由振动和受迫振动..... (424)

§ 13-3 多自由度结构的自由振动和受迫振动..... (439)

§ 13-4 无限自由度结构的自由振动和受迫振动..... (454)

§ 13-5 能量法求自振频率..... (466)

§ 13-6 矩阵迭代法求主振型及自振频率..... (471)

附录一 稳定函数表..... (478)

附录二 变分法概念..... (482)

主要参考书目..... (487)

第一章 绪 论

§ 1-1 杆系结构理论的内容

在土木建筑工程中,通常所指的杆系结构是和地基直接联系而承受荷载的体系,如房屋、桥梁、塔架等。杆系结构理论研究杆系结构在荷载、温度变化及支座移动等影响下的强度、刚度和稳定性。研究强度是为了满足杆系结构达到既经济又安全的目的;研究刚度是为避免杆系结构产生过大的形变;研究稳定性是为了杆系结构在受到意外扰动时仍能维持原来状态。

§ 1-2 杆系结构理论在教学计划中的地位

杆系结构理论是一门基础技术课。一方面它和理论力学及材料力学这两门先修课程有联系,另一方面它又为后继课程如钢结构、钢筋混凝土结构等课程的学习打下基础。因此可以说,杆系结构理论在教学计划中起着承前启后的作用。

理论力学是一门研究物体机械运动一般规律的课程。因为杆系结构的各部分在动力作用下也发生机械运动,在静力平衡时各部分之间也产生作用力和反力,产生的形变关系也服从运动学规律,所以理论力学中的原理在杆系结构理论中得到应用。材料力学是通过实验观测,作出简化假设,从而对单根杆件建立强度、刚度和稳定性的理论。既然杆系结构是由多数杆件组成的物体,它的强度、刚度和稳定性问题的研究必然会联系到材料力学中已建立的有关理论。由此看来,要学好杆系结构理论这门课程,必须对理论力学和材料力学这两门先修课程具备良好的学习基础。

板体和壳体在结构工程中也常用。但板体和壳体属于连续变形体范畴,与杆系的性质有所区别。连续变形体的强度、刚度和稳定性问题不能用简单假设,它们牵涉到高阶偏微分方程组求解的问题,属于弹塑性力学的范围。由于板壳在工程中得到应用,并作为结构物组成的一部分,有些著作把弹塑性力学研究的板壳问题也归在结构理论中。这种扩大研究范围的结构理论是广义的结构理论。本书本着教学改革的要求,根据少而精原则,为学好基本原理,将限于为本科大学生学习的杆系结构理论的内容。书中所用数学工具除微积分外还涉及线性代数及变分法(附录二中阐述有关变分法的基本概念)。希望读者在这些数学领域具备一定的**基础**。

§ 1-3 杆系结构的研究

对新型或复杂杆系结构的研究,应先在主观上建立一个力学模型。根据设想的力学模型,利用数学工具进行理论分析。分析结果是否符合客观实际,有待于对新型杆系结构进行实验,以测得的数据是否接近分析结果作为判断准则。这是发展杆系结构所应遵循的符合科学真理的途径。

因此，对杆系结构进行科学研究，需要具备进行结构实验的能力以及为理论分析在电子计算机上能顺利进行操作的能力。通过实验数据和从计算机上所得结果的比较，对初步采用的力学模型应予以改进，使计算结果得以进一步接近实验数据。

结构实验能力的培养以及上机进行电算操作的训练应在教学计划中占有特定的地位。本书在着重阐述杆系结构力学的基本原理方面只考虑读者掌握正确手算的能力为首要任务。

第二章 杆系结构的静定性

§ 2-1 平面杆系结构的几何组成分析

杆系结构是由众多杆件相互间联接并与地基联结,使其成为一个几何不变而能承受荷载的杆件集合体。杆件间的联接点称作结构的节点。杆系结构中的节点可分为三种:(1)理想铰接节点;(2)理想刚接节点;(3)部分理想铰接节点及部分理想刚接节点的混合。所谓理想铰接是指联接到节点上的杆件可以无阻地绕铰轴线转动;所谓理想刚接是指联接到节点上的杆件彼此间不产生相对转动,始终保持它们之间的原有角度。

(一)节点全为铰接的分析

图 2-1, *a* 示一杆件 AB 在 $x-y$ 平面内。它在平面中的位置由 A 点的 x 、 y 坐标及杆件轴线 AB 和水平线形成的 θ 角所决定。这三个独立参数 x 、 y 、 θ 说明杆件 AB 在平面内具有三个自由度。以符号 W 代表自由度,则图 2-1, *a* 所示杆件的自由度 $W=3$ 。图 2-1, *b* 中示两根杆件 AB 和 BC 相互在 B 节点用理想铰联接。两杆分离时有六个自由度。但当它们在 B 点用铰联接后, BC 杆不再能在平面内自由移动,它的 B 点位置由杆 AB 的 B 点位置所决定,只能对杆 AB 作相对转动。这说明,铰 B 使杆件 BC 丧失了两个自由度。换句话说,这个铰相当于在两杆之间增加了两个约束。图 2-1, *c* 所示两杆之间的联接相当于图 2-1, *b* 中的铰 B 。

从图 2-1, *d* 起,杆 AB 及杆 BC 均以轴线代替杆件。杆 AB 的 A 端用支杆 1 及支杆 2 和地基相联结,使 AB 杆的 A 点受到 x 方向和 y 方向移动的约束,但杆 AB 仍可绕铰 A 的 z 方向轴线转动。这两根支杆代表一个固定铰支座①。杆 BC 的 C 端用支杆 3 和地基联结,使 BC 杆的 C 点受到 y 方向移动的约束。这根支杆 3 代表一个可动铰支座②,允许 C 点在 x 方向可以产生位移。三根支杆消除三个自由度,但杆件 AB 和杆件 BC 的联接相对地基来说仍然有一个自由度,因而有可能产生如虚线所示的运动。这表示一种几何可变的机构,自由度 $W>0$,当然不可能将荷载平衡地传给地基。

图 2-1, *e* 中示四根支杆 1、2、3、4 将杆件 AB 在 A 端用一个固定铰支座与地基联结,杆件 BC 在 C 端用一个固定铰支座与地基联结。这样,点 A 和点 C 在 $x-y$ 平面内成为不动点。由杆件 AB 和杆件 BC 联接而形成的节点 B 也成为不动点,因为以 C 点为中心并以杆件 BC 为半径的运动弧线不同于以 A 点为中心并以杆件 AB 为半径的运动弧线。从运动学观点,同时在两个不同弧线上运动是不可能的,因而只能是不动的,同时杆件联接后的自由度 $W=0$ 。

①参阅金宝桢、杨式德、朱宝华合编的《结构力学》第三版(增订本)第一册图 2-12,高等教育出版社 1986 年 2 月版。

②参阅注脚 ① 所列参考书第一册图 2-11。

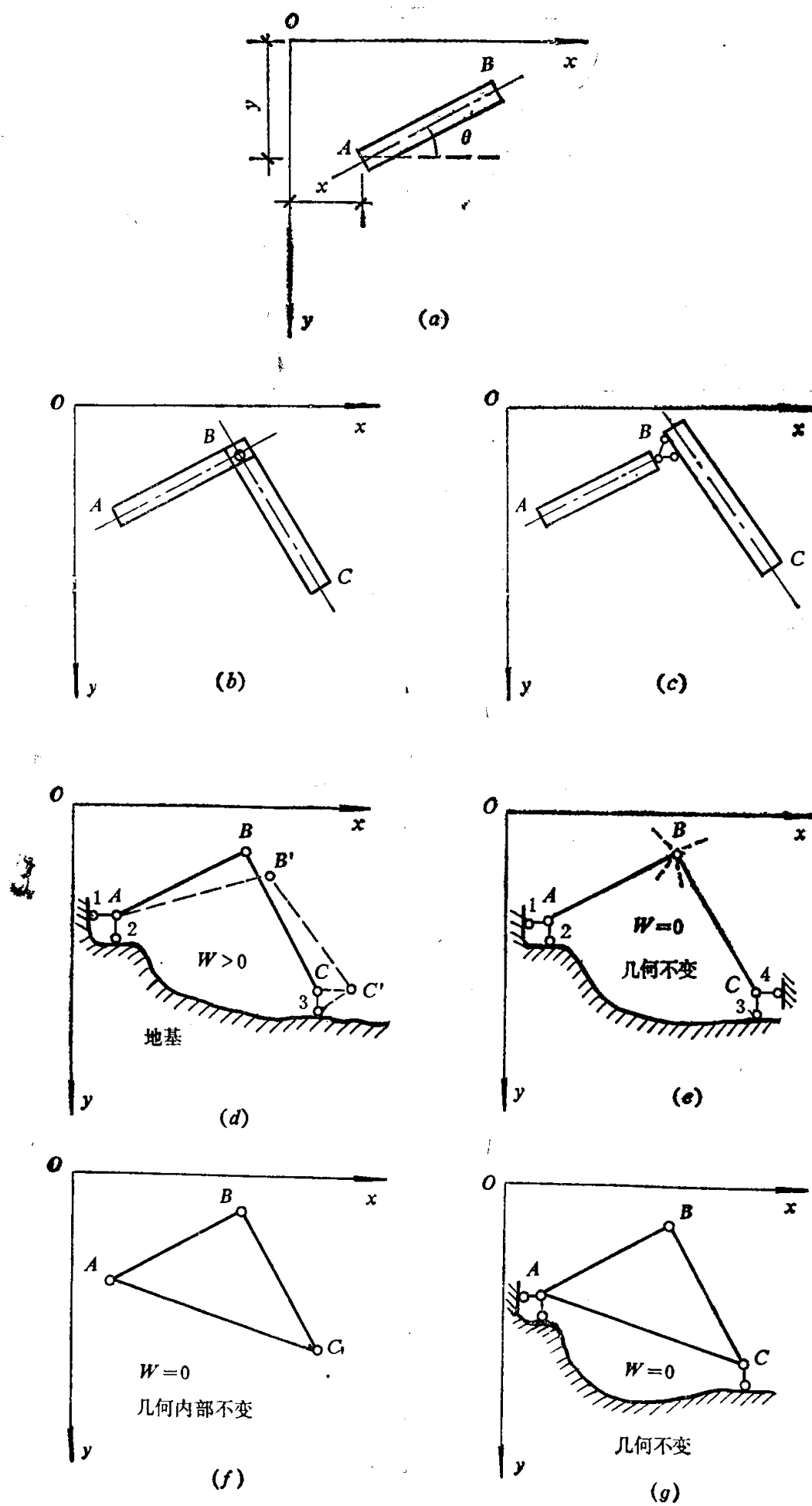


图2-1

在图 2-1, *f* 中, 杆件 *AB* 和杆件 *BC* 仍用铰 *B* 联接, 和图 2-1, *b* 的情况相同。所不同的是, 在图 2-1, *b* 中杆件 *AB* 和杆件 *BC* 原来可有相对转动的可能性, 而在这里却被引进的杆件 *AC* 在 *A* 端及 *C* 端分别由铰 *A* 和铰 *C* 联接杆件 *AB* 和 *BC* 而消失。这样就产生了一个内部几何不变的三角形 *ABC*, 其顶点 *A*、*B*、*C* 的相对位置被三根刚性杆件(指杆件受力后假定不发生形变) *AB*、*BC*、*AC* 的联接所确定。但三角形 *ABC* 在平面内仍有三个自由度, 这是因为图 2-1, *b* 中存在的四个自由度由于杆件 *AC* 的引进而只消去其中一个自由度。显然, 三角形 *ABC* 的内部几何不变性有它的重要意义, 因为它的几何不变范围比一根杆件的几何不变范围要大得多。

为了消除图 2-1, *f* 中的三个自由度, 在图 2-1, *g* 中 *A* 点用一个固定铰支座和地基相联结, 去掉三角形在平面内移动的可能性, 并在 *C* 点用一个可动铰支座去掉三角形绕 *A* 点转动的可能性, 这样便达到自由度 $W=0$ 的目的。如果在 *C* 点也用一个固定铰支座, 则三角形与地基之间存在多余约束, 这样的杆件间联系以 $W<0$ 表示。

杆系结构静定的定义: 在荷载作用下, 结构的全部杆件内力及支座反力只需应用平衡条件即可唯一地确定它们的值。

对于平面铰接结构, 每一个铰节点可有两个自由度, 由其坐标(*x*, *y*) 决定其位置。两个节点由一根杆件联接, 使两个节点之间的坐标被杆件的长度所限制。这就相当于每根杆件在两个节点间起一个约束作用。每根支杆也起一个约束作用。因此, 假如节点数为 *j*, 杆件数为 *m*, 及支杆数为 *r*, 则存在下列关系:

$$W = 2j - (m + r) \tag{2-1}$$

上式表示, 当总自由度数 $2j$ 恰好等于总约束数($m+r$)时, 则 $W=0$ 。例如, 图 2-1, *e* 中的 $j=3, m=2, r=4$, 满足 $W=0$ 的条件。同样, 在图 2-1, *g* 中的 $j=3, m=3, r=3$, 也满足 $W=0$ 的条件。

但图 2-1, *d* 中的 $j=3, m=2, r=3$, 得到 $W=2 \times 3 - (2+3)=1>0$ 。再看图 2-1, *g* 中, $j=3, m=3$, 若 $r=4$, 则 $W=2 \times 3 - (3+4)=-1<0$ 。 $W<0$ 表示结构中存在多余约束。

现在把图 2-1, *g* 重绘于图 2-2, *a* 中, 并在节点 *B* 上加一竖向集中荷载 *P*。应用平面汇交力系的平衡条件($\sum X=0, \sum Y=0$), 可得下列方程组:

$$\left. \begin{aligned} N_1 \cos \alpha - N_2 \cos \beta &= 0 \\ N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \beta &= P \\ N_1 \cos \alpha - N_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

在上式中, N_1 代表杆件 *AB* 中的轴向压力, N_2 代表杆件 *BC* 中的轴向压力, N_3 代表杆件 *AC* 中的轴向拉力。

以 N_1 、 N_2 、 N_3 三个未知数的系数组成的行列式 *D* 为:

$$D = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta & 0 \\ \sin \alpha & \sin \beta & 0 \\ \cos \alpha & 0 & -1 \end{vmatrix} = (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \tag{2-2}$$

为求 N_1 值, 行列式 D_1 为

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -\cos \beta & 0 \\ P & \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -P \cos \beta$$

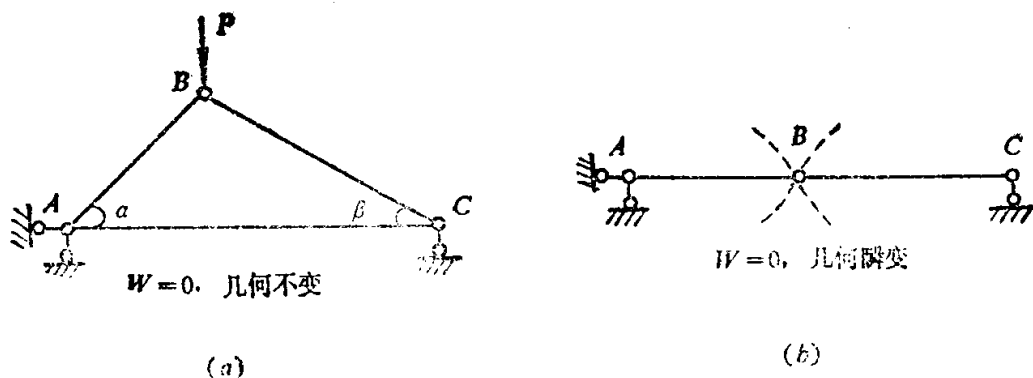


图 2-2

因此，得：

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{D_1}{D} = \frac{P}{\cos\alpha\operatorname{tg}\beta + \sin\alpha} \\ N_2 &= \frac{P}{\sin\beta + \cos\beta\operatorname{tg}\alpha} \\ N_3 &= \frac{P}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

当 α 和 β 都不等于零时， $D \neq 0$ ，而式(2-3)中的三个未知值具有唯一确定的值。

当 α 和 β 都等于零时，图 2-2, a 成为图 2-2, b，表示 A、B、C 三个铰在一直线上，使节点 B 上有公切弧线。这时，结构成为瞬时可变。同时， $D = 0$ ，而 N_1 、 N_2 、 N_3 值有两种可能：

(1) $P = 0$ ， $D = 0$ ， $N = \frac{0}{0}$ ，无唯一确定值。

(2) $P \neq 0$ ， $D = 0$ ， $N = \frac{P}{0}$ ，得无限大值。

从图 2-2, a 和图 2-2, b 的比较可见，虽然二者的自由度 W 都等于零，但由于铰的布置不恰当，图 2-2, b 并不能确保解的唯一确定性。因此，结构的静定性除了需要满足 $W = 0$ 的必要条件外，还需要满足结构几何不变性的充分条件。

下面总结几种构成几何不变性的充分条件的规律：

(1) 参看图 2-1, e，在一个几何不变体(地基可看作一个几何不变体)上的任意两点，例如节点 A 和节点 C，在平面内用两根杆件 AB 和 BC 相互联接，构成一个新的节点 B。只要三个铰 A、B、C 不在一直线上，ABC 便是几何不变的。

(2) 参看图 2-1, f，三根杆件 AB、BC、AC 彼此间用三个不在一直线上的铰 A、B、C 相互联接，形成一个内部几何不变的组成。

(3) 仍参看图 2-1, f。把杆件 AB 和杆件 BC 看作两个几何不变体。这两个几何不变体彼此间用三根链杆相互联接(铰 B 相当于两根链杆，如图 2-1, c 所示)，而且三根链杆并不交于一点，如图 2-1, f 中杆件 AC 看作联接杆件 AB 和杆件 BC 的一根链杆，它并不通过铰 B，这样也形成一个内部几何不变的组成。这个几何不变的组成和地基相互间用三根不交于一点的支杆联结，就成为 $W = 0$ 的几何不变结构，如图 2-1, g 所示。

规律(1)是关于一个几何不变体上用两根杆件扩建新节点,使扩大范围的几何图形成为几何不变的规律。规律(2)是有关三个几何不变体彼此间用三个铰(或六根链杆)相联接,使扩大的范围成为几何不变的规律。规律(3)是有关两个几何不变体彼此间用三根不交于一点的杆件相联接,使扩大的范围成为几何不变的规律。

(二)节点全为刚接的分析

图 2-3, *a* 示两根平面杆件 *AB* 和 *BC*, 彼此间用三根不交于一点的链杆相互联接, 使两杆在节点既不产生相对移动, 也不产生相对转动。这就是刚节点, 在图 2-3, *b* 中两根杆件的轴线保持原有角度。图 2-3, *c* 示刚节点 *B* 被取出的截离体。

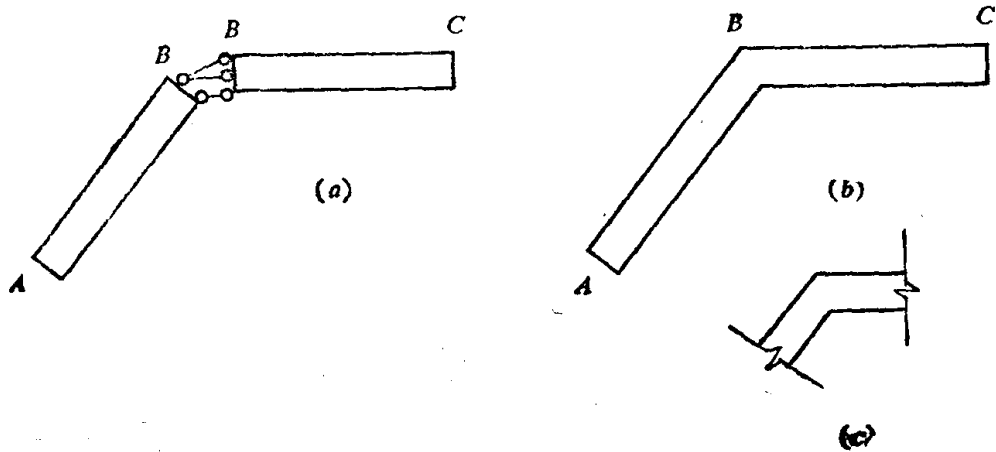


图 2-3

在平面中, 节点 *B* 截离体有三个自由度, 即 *x* 方向和 *y* 方向的移动及绕垂直于平面的一根轴的转动。两个刚节点彼此独立时, 总共有六个自由度。但若在两个刚节点之间用一根杆件联接, 杆件的两端用三根链杆和刚节点联接, 如图 2-3, *a* 所示, 则两个刚节点和一根杆件联接后成为一个几何不变体, 它在平面内有三个自由度。这样看来, 联接的杆件起到三个约束的作用。假如节点数为 *j*, 杆件数为 *m*, 支杆数为 *r*, 则存在下列三种情况:

$$\left. \begin{aligned} 3j - (3m + r) &> 0, \text{ 即 } W > 0 \\ 3j - (3m + r) &= 0, \text{ 即 } W = 0 \\ 3j - (3m + r) &< 0, \text{ 即 } W < 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

例 2-1 图 2-4, *a* 中有 $j = 4, m = 3, r = 2$ 。根据式(2-4), $W = 12 - (9 + 2) = 1 > 0$ 。把两根支杆的轴线延长交于 *O* 点。这一点就是刚接结构 *ABCD* 对地基可以产生转动的中心, 因

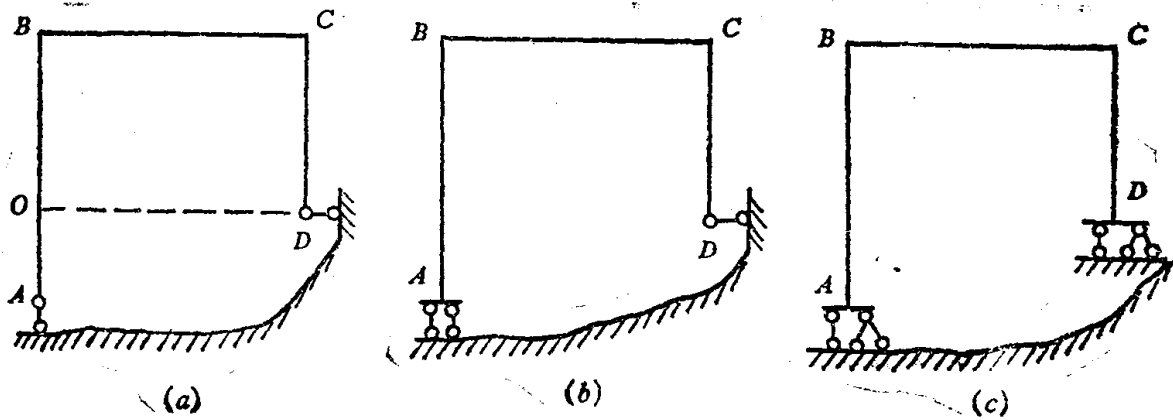


图 2-4

而是几何可变的。

图 2-4, *b* 中的 $j=4, m=3, r=3$ 。根据式(2-4), $W=12-12=0$ 。在 *A* 点的支座称为定向支座③, 它允许 *A* 截面可以有水平位移, 但不能转动。定向支座上的支杆相交在无限远处。这相交点和 *D* 点的水平支杆并不相交, 因而符合几何不变性的规律(3)。既然符合 $W=0$ 和几何不变条件, 图 2-4, *b* 所示刚接结构是静定的。

图 2-4, *c* 中有 $j=4, m=3, r=6$ 。根据式(2-4), $W=12-15=-3<0$ 。*A* 支座和 *D* 支座称为固定支座④。 $W<0$ 表示这个刚接结构具有多余约束。

(三)部分铰节点和部分刚节点的分析

平面结构中一部分节点为铰接而另一部分节点为刚接的情况常会遇到。这种结构称为组合结构。问题还是从运动的角度进行分析。在图 2-1, *a* 中已指出, 一根杆件在平面内的自由度为 3。假如 每根杆件不与其他杆件联接, 总的自由度数为三倍于杆件数。在图 2-1, *b* 中已经阐明, 两根杆件由一个铰相互联接相当于引进两个约束, 称这样的铰为简单铰。假如图 2-1, *b* 中的铰联接三根杆件, 这个铰这时起到四个约束的作用。因为一根杆件上铰的所在位置已被确定, 所以它也就确定了其他两根杆上铰的位置。这样的铰联接 n 根杆件时将起到 $(n-1)$ 个简单铰的作用, 称这样的铰为复铰。用 h 符号代表简单铰数, 则起到的约束数为 $2h$ 。每根支杆引进一个约束。因此, 自由度 W 可用下式表示:

$$W = 3m - 2h - r \quad (2-5)$$

应用式(2-5)到图 2-2, *a* 的情况, 得:

$$\begin{aligned} m &= 3 & h &= 3 & r &= 3 \\ W &= 3 \times 3 - 2 \times 3 - 3 = 0 \end{aligned}$$

这个结果和用式 $W = 2j - (m + r) = 6 - 6 = 0$ 相同。

应用式(2-5)到图 2-4, *b* 的情况。由于节点 *B*、*C* 为刚接, *ABCD* 可看作为一根杆件, 即 $m=1$ 。图中没有其他杆件用铰联接到 *ABCD*, 因而 $h=0$ 。支杆数 $r=3$ 。 $W=3-0-3=0$, 此结果与用式(2-4)计算, $W=3j-(3m+r)=3 \times 4-(3 \times 3+3)=0$ 相同。

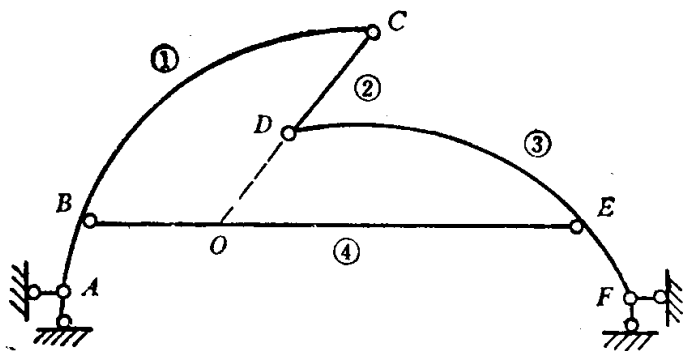


图 2-5

例 2-2 图 2-5 示一平面结构, 试计算其自由度 W 并检查其几何不变性。

③ 参阅脚注(1)所列参考书的图 2-13

④ 参阅脚注(1)所列参考书的图 2-14.

解：图 2-5 中的铰 C 、 D 为全铰，因为它们的轴心和所联接的杆件的轴线交会于一点。铰 B 、 E 为半铰，它们的轴心和所联接的杆件 ABC 和 DEF 的轴线并不相交。

曲杆 ABC 作为一根杆件，由①表示，杆 CD 由②表示，曲杆 DEF 由③表示，杆 BC 由④表示。铰 C 、 D 、 B 、 E 都是简单铰。支杆数 $r=4$ 。

应用式(2-5)，得

$$W = 3m - 2h - r = 3 \times 4 - 2 \times 4 - 4 = 0$$

杆②和杆④相当于杆①和杆③的链杆。在图 2-1, c 中已指出：两根链杆的交点相当于图 2-1, b 中的铰 B 。因此，点 O 成为杆①和杆③的虚铰。

把地基作为一个刚体，则铰 A 联接地基和杆①；铰 F 联接地基和杆③；铰 O 联接杆①和杆③。这三个铰并不在一条直线上，符合几何不变性的规律(2)。所以，图 2-5 的结构是静定的。

例 2-3 计算图 2-6 所示平面结构的自由度并检查其几何不变性。

解：取杆 ABC 为①号杆，杆 $CDEF$ 为②号杆，杆 BD 为③号杆。

$$h = 3, r = 3$$

根据式(2-5)得

$$W = 3m - 2h - r = 9 - 6 - 3 = 0$$

①号杆和③号杆的联接虽然符合几何不变性的规律(3)，但它和地基的联结不符合规律(3)的要求。因为 F 点的水平支杆通过 A 点的两个支杆的交点，所以，该结构是几何瞬变的。

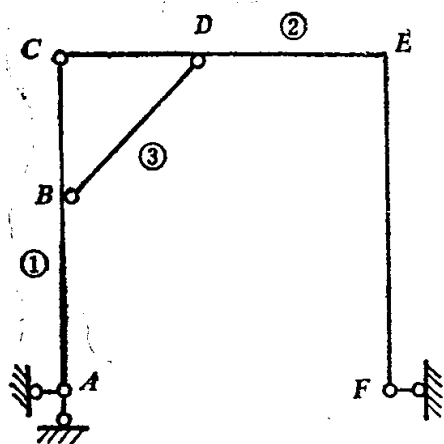


图 2-6

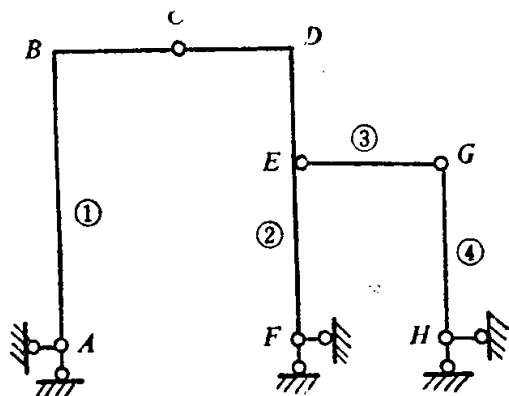


图 2-7

例 2-4 计算图 2-7 所示平面结构的自由度并检查其几何不变性。

解：取杆 ABC 为①号杆，杆 $CDEF$ 为②号杆，杆 EG 为③号杆，杆 GH 为④号杆。

$$h = 3, r = 6, W = 3m - 2h - r = 12 - 6 - 6 = 0$$

①号杆、②号杆和地基彼此间由铰 A 、 C 、 F 联接。这三个铰不在一直线上，因而这部分是几何不变的。节点 G 是由几何不变体上 E 点和地基上的 H 点用两根杆件(③号杆和④号杆)联接而建立的，符合几何不变性规律(1)，因此结构是静定的。

例 2-5 计算图 2-8 所示平面结构的自由度并检查其几何不变性。

解：取杆 ABD 为①号杆，杆 BC 为②号杆，杆 AC 为③号杆，杆 CD 为④号杆。节点 C 上有三根杆由铰 C 联接，这是一个复铰，相当于 $(3-1)$ 个简单铰 h 。 $r = 3$ 。

$$W = 3m - 2h - r = 3 \times 4 - 2(2 + 1 + 1 + 1) - 3 = 12 - 10 - 3 = -1 < 0$$

结构具有一个多余约束。假如从 AC 杆、 BC 杆和 CD 杆中任意去掉一根，结构仍然是

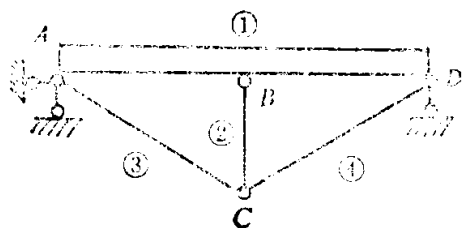


图 2-8

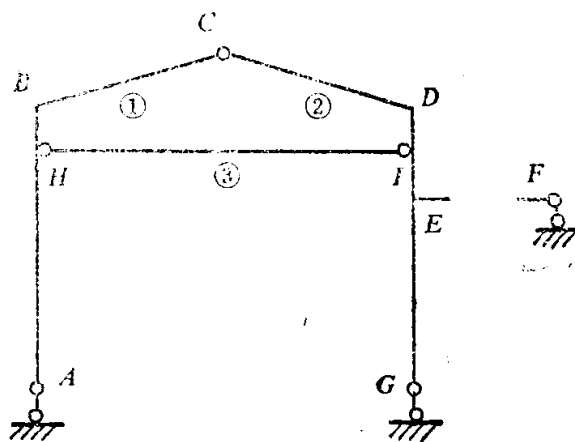


图 2-9

几何不变的,而且成为静定。读者可自行检查。

例 2-3 计算图 2-9 所示平面结构的自由度并检查其几何不变性。

解: 取杆 ABC 为①号杆,杆 $CDEFG$ 为②号杆,杆 HI 为③号杆。

$$h = 3, r = 3$$

$$W = 3m - 2h - r = 3 \times 3 - 2 \times 3 - 3 = 0$$

①号杆和②号杆的联接虽然符合几何不变性规律(3),但由于它与地基的联结用了三根相互平行的竖向支杆,它们的延长线在无限远处交于一点,因而结构是瞬变的。

例 2-7 计算图 2-10 所示平面结构的自由度并检查其几何不变性。

解 三角形 ADB 按照几何不变性规律(2)是几何不变的。节点 E 是符合几何不变规律(1)从 A, D 两点扩建的节点,因此, $ADBE$ 是一个几何不变体。同样, $BFGC$ 也是一个几何不变体。两个几何不变体用铰 B 和杆 EG 相互联接是符合规律(3)的,因而整个组成 $AEGCB$ 是几何不变的。再用三根不交于一点的支杆和地基相联结,符合规律(3),从而结构是几何不变的。

应用式(2-1),

$$W = 2j - (m + r) = 2 \times 7 - (11 + 3) = 0$$

应用式(2-5),

$$W = 3m - 2h - r = 3 \times 11 - 2 \times 15 - 3 = 0$$

假如把 $ABDE$ 作为一个几何不变体,同样 $CBFG$ 也作为一个几何不变体,杆 EG 作为第三个几何不变体,则 $m = 3, h = 3, r = 3, W = 3m - 2h - r = 3 \times 3 - 2 \times 3 - 3 = 0$ 。由于采用了扩大的几何不变性范围计算 m 数,因而可以简化计算,并减少 h 值计算上错误的可能性。

§ 2-2 空间杆系结构的几何组成分析

空间结构的杆件联接,和平面结构一样,可分为三种:(1)理想铰接节点;(2)理想刚接节点;(3)部分理想铰接节点及部分理想刚接节点的混合。下面按这三种情况分别叙述。