数学思想方法纵横论

解恩泽　赵树智　编著

科学出版社

1987

内 容 简 介

本书从纵横两个方面分析了数学思想方法的形成和发展。书中结合大量史料着重论述了数与形概念的演进、数学思想方法的几次重大转折、数学的简单性和复杂性、数学问题、数学研究的几种非常规方法、数学的潜在形态、数学争论、数学蒙难、数学伯乐精神，数学的相对独立性以及马克思和恩格斯论数学思想方法等。

本书内容丰富，史论结合，富有启示性。适合数学工作者、自然辩证法和哲学工作者以及中学数学教师阅读，亦可供理工科院校研究生、大学生和教师参考。

数学思想方法纵横论

解恩泽　赵树智　编著

责任编辑　徐一帆

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1987 年 6 月第 一 版　开本：787×1092　1/32

1987 年 6 月第一次印刷　印张：$7\,^3/_4$

印数：0001—9,800　字数：174,000

统一书号：13031·3539

本社书号：5402·13-1

定价：1.85元

前　言

数学同其它各门科学一样，在其发展的进程中，形成了一整套行之有效的思想方法，而且还在不断地产生新的思想方法。数学思想方法是数学的灵魂。那么，究竟什么是数学思想方法呢？这是一个重大的理论问题。对此，有狭义与广义两种理解。狭义的理解认为，数学思想方法主要指数学本身的论证、运算以及应用的手段；广义的理解认为，数学思想方法除上述内容外，还应包括关于数学概念、理论、方法以及形态的产生与发展规律的认识。本书正是从广义理解的角度来进行讨论的。

历史表明，一个重大数学成果的取得，往往与数学思想方法的突破分不开。一种新的数学思想方法的产生，不仅同数学自身的矛盾运动有关，而且还与社会实践、哲学思想、数学家个人素质等因素有着紧密联系；许多有杰出贡献的数学家十分注重数学思想方法的考察、研究和总结。因此，深入开展数学思想方法的研究，并探讨其产生与发展的规律，对促进数学智力的开发，加强数学队伍的建设，提高数学研究和教学的水平，搞好数学哲学问题的研究，推动数学和哲学的发展，都有十分重要的意义。

数学思想方法的研究内容相当丰富。本书仅涉及有关数学思想方法产生与发展规律的一些问题。主要内容有：数学概念的演进及其矛盾性（第一章），数学方法的历史变革和几种非常规方法（第二、三章），数学的简单性和复杂性（第四章），数学的潜在形态以及由“潜”到“显”的转化（第五、六、七、八、

九章)，数学发展的相对独立性(第十章)，马克思、恩格斯的数学思想(第十一章)等，结合历史，以不同的角度，从纵横两个方面进行初步分析和讨论，目的在于引起更深入的研究。

由于水平有限，书中不当之处在所难免，望读者批评指正。

解恩泽　赵树智

1985年11月于东北师范大学

目　　录

第一章　数与形概念的演进及其矛盾分析

数与形是数学中两个最基本的概念。这两个概念是从现实世界的有关量的关系中直接或间接地逐步抽象出来的，而现实世界又充满着矛盾，因此，它们也必然充满着矛盾，具有深刻的辩证性质。

一、　数概念的演变及其矛盾性

1.数概念的演变

（1）自然数的产生

恩格斯指出："数学是从人的需要中产生的"。[1] 作为数学最基本概念之一的数也不例外，它是原始人类根据生活的直接需要，在长期的实践中逐步形成的。事实上，数(shù)的概念发源于数东西的数(shǔ)。在原始社会里，人类以狩猎、捕鱼和采果为生。因而，过着集群生活的人们，为了满足食物的需要，势必要顾及到人数、工具和收获物多少的问题。例如，要把已有的工具分配给猎人，就有一个够分不够分的问题。当时人们还不知道用数(shǔ)的办法进行比较，只是采取把工具一件一件地分给猎人来判断人和工具哪个多、哪个少。同样，打猎回来后，将猎获的野兽分给大家，又遇到了够分不够分，即人与野兽哪个多、哪个少的问题等。人们就是在这样的无数次比较中，渐渐萌发了"多"和"少"的观念。但这时人们尚不知

1）《反杜林论》，人民出版社，1970年版，第35页。

道“多”与“少”是具体事物集合的一种特征，还没有形成抽象的数的概念。

后来，在“屈指可数”的情况下，人们逐步学会以对应的方式，用人的手指来数（shǔ）某个事物集合中事物的多少。比如，一个事物就用一个手指来对应，五个事物就用五个手指来对应。古人用“手”表示“五”，用“整个人”表示“二十”，就是把集合中的事物数与一个人所有的手指、脚趾总数建立起对应关系，以说明事物数与若干个手指、脚趾的总和那样多。我国古代曾用“丨、ǁ、Ⅲ、Ⅲ丨、Ⅲǁ”或“一 二、三、亖、〓”来表示“一、二、三、四、五”。也有些国家曾用罗马数字“Ⅰ”表示“一”，“Ⅴ”表示“五”，“Ⅹ”表示“十”。许多国家早已使用并一直延续到今天的十进制的记数法。从这些事实中可看出人类最初用手指数（shǔ）数的历史印迹。人们能用手指这样一种具体事物来对应其它各种事物以表示多少，这比起最初人们只会用相互搭配的办法来比较两种事物的多少，是一个很大的进步。但是，这时人们还没有从具体事物中抽象出“数”这个概念。

经过长期的实践，人们逐渐认识到各种事物集合在量上具有共同的特征。比如，三头羊、三条鱼、三只鸡、三个梨、三朵花、三棵树，等等。虽然是一些不同的东西，但它们在量上都有着共同的特征，即都是“三”个东西。又比如，一头羊增加一头羊是两头羊，再增加一头羊就是三头羊；同样，一条鱼增加一条鱼是两条鱼，再增加一条鱼就是三条鱼……，它们在量上有一个特征，即都是“一”个东西增加“一”个东西是“二”个东西，再增加“一”个东西就是“三”个东西。久而久之，人们便从各种不同的具体事物集合中抽象出量的共同特征，即舍弃事物的具体内容而得到抽象的数。后来，人们又引入了数字符号和十进位制记数法。于是，人们由一个东西增加一个东西得二个东西，再增加一个东西得三个东西，依此类推，可得一系

列数：1、2、3、4、5、6、7、8、9、10……。有了它，人们就可以利用它数(shǔ)出任何一个事物集合中元素的多少。这样，人类对数的认识便从感性认识上升到理性认识，发生了质的飞跃，从而抽象出了自然数概念。正如恩格斯指出的那样："数和形的概念不是从其它任何地方，而是从现实世界中得来的。人们曾用来学习计数，从而用来作第一次算术运算的十个指头，可以是任何别的东西，但是总不是悟性的自由创造物。为了计数，不仅要有可以计数的对象，而且还要有一种在考察对象时撇开对象的其他一切特性而仅仅顾到数目的能力，而这种能力是长期的以经验为依据的历史发展的结果。"1)

（2）有理数的建立

人们有了自然数的概念之后，可以解决生产和生活中的一些问题，但由于人类实践的发展，认识的深化，又感到只有自然数是不够用的。例如，人们在建筑房屋、制造工具和丈量土地等实践中，遇到了大量的测量问题。而在测量中，又往往出现用事先规定的单位长度不能正好量完的情况。于是，只有自然数概念就显得不够用了，便产生了分数概念。

事实上，当人们用一个单位长(如一尺)去量某物体，结果量三次后还余一小部分(不够一尺)。起初，人们就大概地说三个单位(三尺)多一点。但后来生产要求精确度越来越高，上述的近似值就不适应了。这时，人们为了满足实际中精确度的要求，自然想到把单位再缩小一些，如将原单位缩小一半，作为新单位再去量。若正好量完，问题就解决了。若仍不能够正好量完，就再把单位缩小一半，作为更新的单位再去量，……。这样，便逐渐认识了$1/2$，$1/4$，……等形如$1/n$($n>1$的自然数)的分数。据史料记载，古代巴比伦人已应用60、60^2、60^3为分母

1）《反杜林论》，人民出版社，1970年版，第35页。

的分数，还编制了用60进位的分数来表示分子是1的分数表。古埃及人遇到象3/4这样的分数便束手无策，但是，他们却能对分子为1的分数进行简单运算。例如，把3/4写成1/2和1/4之和，并把分子不是1的分数统统化成分子是1的分数和，还列出了相应的表[1)]。后来，由于实际的需要，才出现了3/4、5/7……等形如m/n($n>1$的自然数，m为自然数)。我国古代数学名著《九章算术》中，不仅记载了分数概念，而且还系统地叙述了分数的算法，这在世界数学史上占有极其重要的地位。由上可见，所谓"分数概念来源于分"是不无道理的。

分数概念的形成，在实践中解决了不能正好量尽的矛盾。在数学上，解决了在自然数集合范围内，除法不能畅通无阻的矛盾。随着生产的发展，人们对数的认识又加深了，引入了"零"的概念。

"零"概念的产生，与采用十进位制记数法有着密切的关系。在这种记数法中，每个数所代表的多少，一方面与数字本身有关，另一方面又与它在什么位置上有关。比如"2"在个位上表示"2"，在十位上则表示"20"，若在百位上则表示"200"，……。这就是所谓要知数之多寡"先识其位"的道理。使用这种记数法，当某一位上一个单位也没有时，由于不能用1、2、3、……、9等数字符号来表示，因而就出现了"空位"。为了表示这样的"空位"，古代人们想了许多办法。印度人大约在六世纪时，曾用"·"表示"空位"，到了九世纪，又将"·"改为"○"。我国早在北宋之后，当用算筹计数时，就用"口"来表示"空位"，以后又改用"0"。这样，"零"的概念便在实际计算的推动下开始形成。

自然数、分数和零是算术的基本概念，通称为算术数。

1） 参见余元希：《数的概念浅说》，上海教育出版社，1980年版，第31页。

有了算术数，人们可以解决一些简单的实际问题。但随着生产和人们认识的发展，又发现，有些实际问题仅用算术数是解决不了的。比如，一些具有相反意义的量，像卖出与买入，盈利与亏损，上升与下降，增加与减少，向南与向北，前进与后退等等，只有算术数是无法表示的。为了解决这些问题，人们又引进了负数的概念。

据史料记载，中国古代的《九章算术》中的"方程"章里，就引入了正负数的概念，如记有以卖出为正，买入为负；余款为正，欠款为负等。刘徽（约225—295）在《九章算术注》中明确指出："今两算得失相反，要令正负以名之。"大约在西汉时期（公元前二世纪），就用赤筹表示正，用黑筹表示负；或用三角形截面的算筹表示正，矩形截面的算筹表示负。[1]

负数概念的引入，并非一帆风顺。起初，在解方程中得到负根时，人们要么否认，要么回避。古希腊数学家丢番图(Diophantus，约246—330)就曾把方程的负数解说成是"荒唐的东西"[2]而加以舍弃。我国唐朝数学家王孝通（六至七世纪）的《缉古算经》，仅讨论正系数的方程，且只求出一个正根。十二世纪，印度数学家巴斯卡拉在解方程时求出负根，但以"不合宜"为由不予承认。十六世纪，法国数学家韦达(F. Viete，1540—1603)也不取负根。然而，在实践的推动下，负数作为正数的补充，解方程时出现负根的情况，逐渐得到人们的公认。

正整数(自然数)、负整数、正分数、负分数和零，统称为有理数。这样，人们对数的认识便从自然数发展到了有理数。

（3）实数的形成

在有理数的基础上，人们又引入了无理数。而有理数与无理数统称为实数，于是数的概念便从有理数扩展到了实数。

---

1)参见李俨：《中国数学大纲》，商务印书馆，1931年版，第36页。

2)李约瑟：《中国科学技术史》第三卷（数学），科学出版社，1978年版，第200页。

那么，无理数是怎样引入的呢？

在实际度量中，原先人们认为，只要单位取得充分小，总可以把两个量(如线段长)同时量尽，或令一个量为单位，则另一个量总可表成两个正整数m与n之比：m/n。可是，后来人的发现，像正方形的对角线的长与边长之间就找不到适当小的单位把它们同时量尽。或者说，若令正方形的边长为单位，那么，对角线的长度无法表示成为m/n(m、n均为正整数)的形式。实际上，根据勾股定理，正方形一对角线的长与其边长之比不是一个分数，而是$\sqrt{2}$。亦即正方形边与对角线是两个不可公度线段。[1]

由上面的讨论可知，某量与另一被取做单位的量之比，如果用数来表示，其结果则会出现两种情况：第一，当它们是可公度时，其结果是整数或分数，而此分数可表示为有限小数或无限循环小数；第二，当它们是不可公度时，其结果既不是整数、有限小数，亦不是无限循环小数，而是无限不循环小数。可见，表示可公度线段的长度只要用有理数的概念就可以解决。但是，要表示不可公度线段的长度，用有理数的概念就行不通了。为了解决这个矛盾，人们就把整数、有限小数和无限循环小数称为"有理数"，而把无限不循环小数称为"无理数"。这样便引入了"无理数"的概念。无理数在英文中是"irrational number"，是从拉丁文和希腊文直译过来的，其中"irrational"的字义是"无比值的"。因此，就本来的意义，无理数是表示与测量单位无比值的线段长度之数。当然，无理数的引入，也是突破有理数的局限，解决数学中开方(如$\sqrt{2}$)开不尽矛盾的结果。据史料记载，无理数概念的引入，曾经历了相当长的历史时期。

1) 如果两个线段不存在一个适当的单位线段，可把它们同时量尽，那么就称这两个线段为"不可公度线段"。

早在公元前，人们就遇到了像$\sqrt{2}$、π等这样的无理数，但真正建立起严格的无理数概念，并把数的系统扩展到实数，那是十九世纪的事。

（4）复数的确立

有了实数概念，人们就解决了过去仅有有理数概念时所不能解决的不可公度和开方开不尽等矛盾。但后来随着生产实践的深入发展，又产生了新的矛盾，如负数开平方是什么？众所周知，在实数范围内，任何一个正数或负数的平方都得正数，或者说，没有一个数的平方会等于负数。因而，负数开平方（如$\sqrt{-1}$）已超出实数范围。与实数相比较，当时人们把这样的数称之为"虚数"，以示"不存在"、"虚无"的意思。后来，人们经过长期实践逐步认识到，"虚数"并不虚无，还把虚数与实数的复合形式$a+b\sqrt{-1}$（a、b为实数）称为复数。于是，在数的概念中，又引进了复数概念，数的系统得到了再一次的扩展。

"虚数"概念的确立，是一个漫长而曲折的过程，大体可分为以下几个阶段：

第一，问题提出阶段。早在公元前，在解决生产实际问题时，人们就遇到了负数开平方的问题，例如，解方程$x^2+1=0$时，就出现了$x=\pm\sqrt{-1}$。当时，人们认为方程无解，便回避了它。后来在解决从实践中提出的三次方程时，又遇到了负数开平方。例如，公元七世纪，我国唐代的《辑古算经》中，就有三次方程问题及其解法。但一直到十六世纪以前，无论是我国还是外国，虽然研究并解决了许多三次方程问题，但对负数开平方问题仍采取回避的态度。就是说，问题是提出来了，但没有解决。

第二，理论探讨阶段。到了十六世纪，人们已获得了三次方程的一般求解公式：对$x^3+px+q=0$（p、q为实数），有

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \quad (\mathrm{I})$$

后来，人们发现，某些三次方程有实根，但用公式(Ⅰ)求不出实根，于是出现了矛盾。例如，$x^3-15x-4=0$，显然有实根$x=4$。但应用公式(Ⅰ)，则得

$$x=\sqrt[3]{-\frac{-4}{2}+\sqrt{\frac{(-4)^2}{4}+\frac{(-15)^3}{27}}}$$
$$+\sqrt[3]{-\frac{-4}{2}-\sqrt{\frac{(-4)^2}{4}+\frac{(-15)^3}{27}}}$$
$$=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$
$$=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} \quad (\mathrm{II})$$

如何解决这一矛盾？当时，人们从理论上进行了探讨，充分发挥了辩证思维的能动作用。例如，1572年，意大利数学家邦别利(R·Bombelli, 1526—1572)，从$(\sqrt{-1})^2=-1$出发，证得

$$\begin{cases} 2+11\sqrt{-1}=(2+\sqrt{-1})^3 \\ 2-11\sqrt{-1}=(2-\sqrt{-1})^3 \end{cases} \quad (\mathrm{III})$$

将(Ⅲ)代入(Ⅱ)，得

$$x=\sqrt[3]{(2+\sqrt{-1})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{-1})^3}$$
$$=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}$$
$$=4$$

这样，就解决了用公式(Ⅰ)求不出实根的矛盾。不仅如此，还逐渐建立了关于虚数的一些运算法则。虚数开始得到人们的承认。

第三，实践检验阶段。　有了虚数概念之后，人们在理论

上把数的概念由实数扩展到了复数。但是，在相当长的时期里，一些人对虚数和复数的存在是有怀疑的。十六世纪的意大利数学家卡当(G. Cardane，1501—1576)仍称复数为"似实而虚的"数。十七、八世纪，人们努力寻找复数的几何表示和物理意义。到了十九世纪初，人们最终作出了复数的几何解释，它被理解为平面上的点或矢量，并与物理学上的各种矢量联系起来了。这样，复数在物理学的实际研究中首先得到了一些应用，并受到了初步检验。这种应用，反过来又推动了复数理论的进一步发展，逐渐形成了一门重要的数学分支——复变函数论。复变函数论在解决与弹性力学、电工学、空气动力学、流体力学等有关的生产实际问题中显示出，它是一种很有效的数学工具。既然复变函数论在实践中得到了检验，证明它是科学的数学理论，那么，作为这种理论的基本概念的复数及其虚数，也就一同在实践中得到了检验，证明它是科学的数学概念。

复数确立之后，数的概念得到了又一次扩展。

历史表明，数学概念的扩展，一方面与人们生产、生活的实际需要有关，另一方面也是与数学理论自身的矛盾运动分不开的。实际上，从解决数学自身矛盾角度来看，数概念的每一次扩展，也是解决数学运算中所出现的种种矛盾的必然结果。例如，解决不能整除的矛盾产生了分数；解决当两数相等时不能进行减法运算的矛盾产生了零；解决不够减的矛盾产生了负数；解决开方开不尽的矛盾产生了无理数；解决负数不能开偶次方的矛盾产生了虚数。从而数的概念就出现了自然数⟶有理数⟶实数⟶复数这样一个演变、扩展的系列。

(5)超复数的引入

在一段时间里，人们认为数概念扩展到复数，就算达到完

善的程度了，以后的发展只能表现在已演变，扩展出的系列之内的变化上。然而，事实恰相反，随着社会实践的发展，人们对现实世界的认识在不断深化，而数概念又是反映现实世界量侧面认识的重要方面，因此，数概念也必然会打破原有范畴，继续向前扩展。超复数的引入，就说明了这一点。

所谓超复数，就是象过去由两个实数数组建立复数那样，由三个以上实数数组所组成的“多元数”。人们研究和应用比较多的是“四元数”。

1843年10月16日，英国数学家哈密顿（W.R.Hamilton，1805—1865）在爱尔兰的都柏林提出了“四元数”。四元数是由1和另外三个单位i、j、k构成的，使得每一个四元数$q=a+xi+yj+zk$都是一个“标量”a（实数）和一个向量$xi+yj+zk$之和，其中x、y、z是实数。四元数可用来描述三维空间的旋转。四元数有广泛的应用。它在数论、群论、圆锥曲面和二次曲面、刚体运动、数学物理方法、量子理论以及相对论等方面，都有重要应用。

与此同时，人们还开展了关于“多元数”的理论研究，其研究成果应用于数学以及自然科学的许多领域。

（6）广义数的出现

有了多元数这种超复数，我们就可以把复数和超复数称之为狭义数。相对于狭义数，又出现了广义数。上面谈到的自然数、有理数、实数、复数和超复数，它们的每一元素均是本来意义的数，并都有相应的运算法则。但是，由于实践的需要，数学中又出现了一系列以“运算”为其特征的概念。这些概念，人们就统称为“广义数”。例如，向量，张量、矩阵等，都属于广义数。此外，带有某种“运算”的“数”的集合即代数系统，例如群、环、域等，也都是一些广义数。这些广义数，在数学和自然科学中的应用是极其广泛的。

由上可见，数概念确是在人们的社会实践和数学理论自身矛盾运动的推动下，不断演变，不断发展的。为明显起见，我们可以将数概念演变和发展的过程，归列为下表：

- 数
  - 狭义数
    - 复　数
      - 实　数
        - 有理数
          - 整　数
            - 正整数〔自然数〕
            - 负整数
          - 零
          - 分　数
            - 正分数
            - 负分数
        - 无理数
          - 正无理数
          - 负无理数
      - 虚　数
        - 纯虚数
        - 混合虚数
    - 超复数
      - 四元数
      - ⋮
      - ⋮
      - 多元数
  - 广义数
    - 向　量
    - 张　量
    - 矩　阵
    - 代数系统

2. 数概念的矛盾性[1]

前面已讲过，数概念产生和发展的过程是自然数$\xrightarrow{\text{(分数、零、负数)}}$有理数$\xrightarrow{\text{(无理数)}}$实数$\xrightarrow{\text{(虚数)}}$复数$\xrightarrow{\text{(超复数)}}$狭义数$\xrightarrow{\text{(广义数)}}$数。这个过程始终都存在着矛盾。在自然数中存在一与多的矛盾，在整数中存在有与无的矛盾，在有理数中存在整数与分数、正数与负数的矛盾，在实数中存在有理数与无理数的矛盾，在复数中存在实数与虚数的矛盾，在狭义数中存在复数与超复数的矛盾等。数的概念，正是在不断认识和解决这些矛盾的过程中不断发展的。

（1）“一”中包含着多

1）此部分是根据作者与陈任昭同志合作的论文改写而成的。